Riemannsche Geometrie

9. Übungsblatt

Übung 9.1 (Ableitung der Krümmung entlang einer Geodäten)

Sei $\gamma\colon [0,\ell] \to M$ eine Geodäte und X ein Vektorfeld entlang γ mit $X(0) = 0$. Zeigen Sie, dass

$$\nabla_{\gamma'}(R(\gamma', X)\gamma')(0) = (R(\gamma', X')\gamma')(0)$$

wobei $X' = \frac{DX}{\mathrm{d}t}$.

Hinweis: Sei $T\colon \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{D}(M)$ der Krümmungstensor mit

$$T(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z \mid W\rangle$$

(in der Vorlesung nur durch $(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ bezeichnet). Nutzen Sie, dass

$$((\nabla_{\gamma'}T)(\gamma', X, \gamma', Z))(0) = 0$$

und rechnen Sie die Ableitung aus.

Übung 9.2 (Krümmung der hyperbolischen Ebene)

Berechnen Sie den Krümmungstensor ${R_{ijk}}^s$ der hyperbolischen Ebene. Benutzen Sie die Rechnung um die Schnittkrümmung (des eindeutigen zweidimensionalen Tangentialraums) der hyperbolischen Ebene zu bestimmen.

Hinweis: Wegen Proposition 6.6 müssen Sie nur eine Rechnung durchführen.

Übung 9.3 (Kovariante Ableitung von Vektorfeldern)

Sei $X \in \mathcal{X}(M)$ und sei T der Tensor $T\colon \mathcal{X}(M) \to \mathcal{D}(M), Y \mapsto \langle X \mid Y\rangle$. Zeigen Sie, dass für $Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ gilt

$$(\nabla_Z T)(Y) = \langle \nabla_Z X \mid Y\rangle\,.$$

Die Identifikation von X mit T ist also kompatibel mit der kovarianten Ableitung.

Übung 9.4 ($P_2^1(\mathbb{R})$)

Der symmetrische Raum $P_2^1(\mathbb{R})$ besteht aus positiv-definiten Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

mit $ad - b^2 = 1$.

Zeigen Sie, dass $P_2^1(\mathbb{R})$ isometrisch zur hyperbolischen Ebene H^2 ist. Geben Sie dazu eine $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-äquivariante Isometrie $\varphi\colon P_2^1(\mathbb{R}) \to H^2$ an, die I auf i abbildet. (Äquivarianz bedeutet, dass $\varphi(g.p) = g.\varphi(p)$.)

Hinweis: Nach Voraussetzung gilt $\varphi(gg^T) = \varphi(g.I) = g.\varphi(I) = g.i$ für $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Verwenden Sie die Matrix

$$g = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}.$$