Riemannsche Geometrie

10. Übungsblatt

Übung 10.1 (Lokal-symmetrischer Raum hat $\nabla R = 0$)

a) Sei $p \in U \subseteq M$, U offen und sei $\sigma\colon U \to U$ eine Isometrie mit $\sigma(p) = p$ und $\mathrm{d}\sigma_p(v) = -v$. Sei $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ eine Geodäte mit $\gamma(0) = p$ und X ein paralleles Vektorfeld entlang γ. Zeigen Sie, dass $\mathrm{d}\sigma_{\gamma(t)}X(\gamma(t)) = -X(\gamma(-t))$.

b) Folgern Sie, dass in einem lokal-symmetrischen Raum ∇R verschwindet.

Wir werden vielleicht später sehen, dass die Umkehrung auch gilt: M ist ein lokal-symmetrischer Raum genau dann, wenn $\nabla R = 0$.

Hinweis: (a) Es ist klar, dass $\sigma(\gamma(t)) = \gamma(-t)$. Zeigen Sie, dass $t \mapsto \mathrm{d}\sigma_{\gamma(t)}X(\gamma(t))$ ein paralleles Vektorfeld entlang γ ist. (b) Für eine Kurve mit $\gamma'(0) = W(\gamma(0))$ und parallele Vektorfelder X, Y, Z, T entlang γ ist

$$\nabla_W(X,Y,Z,T)(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X,Y,Z,T)(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{(X,Y,Z,T)(\gamma(t)) - (X,Y,Z,T)(\gamma(-t))}{2t}.$$

Übung 10.2 ($\nabla R = 0$, zweiter Teil)

a) Wir nehmen an, dass $\nabla R = 0$. Zeigen Sie, dass wenn X, Y, Z parallele Vektorfelder entlang einer Geodäte γ sind, dann ist auch $R(X,Y)Z$ ein paralleles Vektorfeld entlang γ.

b) Sei M zusammenhängend, 2-dimensional, mit $\nabla R = 0$. Folgern Sie, dass M konstante Schnittkrümmung hat.

c) Zeigen Sie, dass für Räume konstanter (Schnitt-)Krümmung gilt $\nabla R = 0$.

Übung 10.3 (Invarianz der Metrik auf $P_n(\mathbb{R})$)

Verifizieren Sie, dass die Metrik auf $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ invariant unter der Wirkung von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist. Das heißt zeigen Sie, dass

$$\langle \mathrm{d}(t_g)_p(X) \mid \mathrm{d}(t_g)_p(Y)\rangle_{t_g(p)} = \langle X \mid Y\rangle_p$$

wobei $t_g(p) = gpg^{-1}$.

Übung 10.4 (Schnittkrümmung in $P_3^1(\mathbb{R})$)

Wir betrachten den symmetrischen Raum $P_3^1(\mathbb{R})$ und fassen die Matrizen

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

als Tangentialvektoren an I auf.

a) Berechnen Sie die Schnittkrümmung $K_I(\sigma)$ wobei σ der von X und Y aufgespannte Raum ist.

b) Berechnen Sie die Schnittkrümmung $K_I(\tau)$ wobei τ der von X und Z aufgespannte Raum ist.

Hinweis: (a) Nutzen Sie, dass $XY = YX$. Schließen Sie dann mit Lemma 6.13 oder etablieren Sie eine Isometrie zwischen $\exp_p(\sigma)$ und $\mathbb{R}^2$. (b) Nutzen Sie die Aufgaben 9.2 und 9.4.