# Riemannsche Geometrie

## 11. Übungsblatt

**Übung 11.1** (Konjugierte Punkte und nicht-positive Krümmung)

Sei $M$ eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit nicht-positiver Krümmung. Zeigen Sie, dass für jeden Punkt $p \in M$ der Konjugierten-Lokus $C(p)$ leer ist.

*Hinweis:* Zeigen Sie, dass für ein nicht-triviales Jacobi-Feld gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\langle \frac{DJ}{\mathrm{d}t} \mid J \right\rangle \geq 0$. Nehmen Sie an, dass $J(a) = 0$ und erhalten Sie einen Widerspruch indem Sie $\langle J \mid J \rangle$ ableiten.

**Übung 11.2** (Skalieren der Metrik)

Sei $M$ eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit Metrik $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. Wir wählen $c > 0$ und definieren eine zweite Metrik durch

$$\langle X \mid Y \rangle' (p) = c \langle X \mid Y \rangle (p)$$

für $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ und $p \in M$. Wie verhält sich die die Skalarkrümmung $K'$ bezüglich $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ zu der ursprünglichen Skalarkrümmung $K$?

**Übung 11.3** (Hyperbolischer Raum)

Der *$n$-dimensionale hyperbolische Raum* ist die Menge

$$H^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_n > 0\}$$

mit der Metrik $g_{i,j}(x_1, \ldots, x_n) = \delta_{i,j}/x_n^2$.

a) Zeigen Sie, dass die Wirkung von $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{n-1})$ auf den ersten $n-1$ Koordinaten eine Wirkung durch Isometrien ist. Das heißt, wenn $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{n-1})$ ist, dann ist die Abbildung

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n) \quad \text{mit} \quad g.(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (y_1, \ldots, y_{n-1})$$

eine Isometrie.

b) Beschreiben Sie die Geodäten in $H^n$.

*Hinweis:* (b) Zeigen Sie, dass für zwei Punkte $p := (x_1, \ldots, x_n)$ und $q := (y_1, \ldots, y_n)$ der zweidimensionale Raum

$$H_{p,q} = \{(z_1, \ldots, z_n) \in H^n \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} (z_1, \ldots, z_{n-1}) = (1-\lambda)(x_1, \ldots, x_{n-1}) + \lambda(y_1, \ldots, y_{n-1})\}$$

eine abgeschlossene, riemannsche Untermannigfaltigkeit ist, die isometrisch zu $H^2$ ist. Nutzen Sie (a) um $H_{p,q} = \{(x_1, 0, \ldots, 0, x_n) \mid x_n > 0\}$ zu wählen.

**Übung 11.4** (Krümmung der Sphären)

Zeigen Sie, dass die Schnittkrümmung der $n$-Sphäre

$$\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

in jedem Punkt konstant 1 ist.

*Hinweis:* Wenn wir $\mathbb{R}^{n+1}$ mit seinem Tangentialraum identifizieren ist $N(p) = p$ ein Normalenvektorfeld. Die Gauß-Abbildung ist die Identität. Wenden Sie Satz 8.3 an und achten Sie sorgfältig auf Vorzeichen.