Riemannsche Geometrie

12. Übungsblatt

Übung 12.1 (Alexandrovs Lemma)

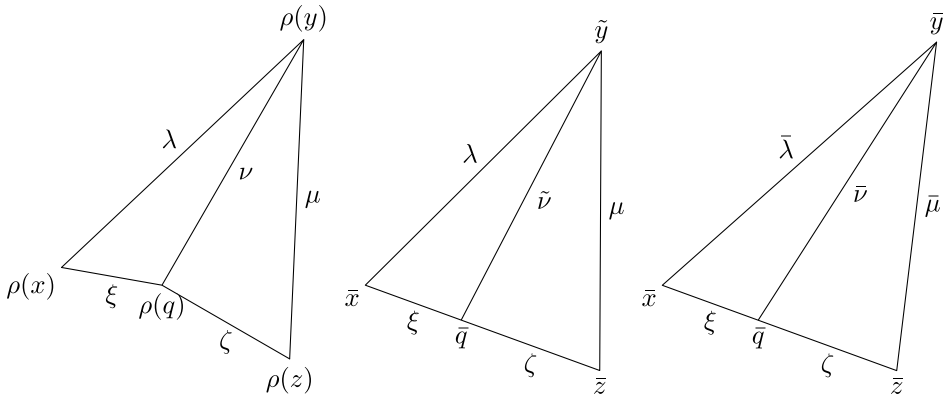
In den Abbildungen unten stellt alles, was wie ein Dreieck aussieht, ein Dreieck dar. Gleich beschriftete Kantenlängen sind gleich. Die Eckenbeschriftungen spielen vorerst keine Rolle.

Alexandrovs Lemma besagt, dass wenn $\nu \leq \tilde{\nu}$, $\bar{\lambda} \geq \lambda$ und $\bar{\mu} \geq \mu$ ist, dann ist $\nu \leq \bar{\nu}$.

a) Beweisen Sie Alexandrovs Lemma für Dreiecke in $\mathbb{R}^2$. Benutzen Sie gegebenenfalls den ebenen Kosinussatz:
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

b*) Beweisen Sie Alexandrovs Lemma für Dreiecke in H^2. Benutzen Sie dazu den hyperbolischen Kosinussatz:
$$\cosh(c) = \cosh(a)\cosh(b) - \sinh(a)\sinh(b)\cos(\gamma)$$

c*) Beweisen Sie Alexandrovs Lemma für Dreiecke in S^2 unter der Bedingung $\bar{\lambda} + \bar{\mu} + \xi + \zeta \leq 2\pi$. Benutzen Sie dazu den sphärischen Kosinussatz:
$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\cos(\gamma).$$



Übung 12.2 (Krümmung des direkten Produkts)

Sei $M = M_1 \times M_2$ ein direktes Produkt riemannscher Mannigfaltigkeiten mit der Produktmetrik ausgestattet.

a) Zeigen Sie, dass der riemannsche Zusammenhang auf M gegeben ist durch
$$\nabla_{X_1+X_2} Y_1 + Y_2 = \nabla^1_{X_1} Y_1 + \nabla^2_{X_2} Y_2$$
wobei ∇^i der riemannsche Zusammenhang auf M_i ist.

b) Zeigen Sie, dass $S^2 \times S^2$ nicht-negative Schnittkrümmung hat.

c) Beschreiben Sie einen flachen Torus $T^2 \cong S^1 \times S^1$ in $S^2 \times S^2$.

Hinweis: Für (b) wählen Sie zwei Vektorfelder E und F die in p orthonormal sind und berechnen Sie die Schnittkrümmung nach Definition als $\langle R(E,F)E, F\rangle$. Schreiben Sie dazu $E = E_1 + E_2$ und $F = F_1 + F_2$ und verwenden Sie (a).

Übung 12.3 (Unvollständige Mannigfaltigkeit)

Wir betrachten die obere Halbebene $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ mit der Metrik, die durch $g_{i,j} = \delta_{i,j}\frac{1}{y}$ (sic!) gegeben ist. Zeigen Sie, dass die Länge des geodätischen Segments $\{0\} \times (\varepsilon, 1)$ für $\varepsilon \to 0$ gegen 2 geht. Folgern Sie, dass R^2_+ in dieser Metrik nicht geodätisch vollständig ist.

Übung 12.4 (Homogene Räume sind vollständig)

Zeigen Sie, dass homogene Räume vollständig sind. Erinnern Sie sich, dass eine riemannsche Mannigfaltigkeit M ein homogener Raum ist, wenn es für Punkte $p, q \in M$ eine Isometrie von M gibt, die p auf q abbildet.