Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

Grundlagen

Stefan Witzel

Punkte, Abstand

Die Euklidische Ebene $\mathbb{E}^2$ besteht aus Punkten.

Zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{E}^2$ haben einen Abstand $|PQ| \geq 0$.

Axiome (Abstand). Für Punkte $P, Q, R \in \mathbb{E}^2$ gilt:

1. $|PQ| = 0$ genau dann, wenn $P = Q$,
2. $|PQ| = |QP|$,
3. $|PQ| + |QR| \geq |PR|$ (Dreiecksungleichung).

Der Punkt Q liegt zwischen P und R wenn $|PQ| + |QR| = |PR|$.

Segmente, Strahlen, Geraden

Seien P und Q verschiedene Punkte.

Das Segment $\overline{PQ}$ besteht aus Punkten zwischen P und Q.

Der Strahl $\overrightarrow{PQ}$ besteht aus Punkten R mit $R \in \overline{PQ}$ oder $Q \in \overline{PR}$.

Die Gerade PQ besteht aus Punkten R, so dass einer von P, Q, R zwischen den anderen beiden liegt.

Axiome zu Punkten und Geraden

Axiome (Punkte und Geraden).

1. Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Für zwei verschiedene Punkte P und Q gilt:

2. Es gibt nur eine einzige Gerade, die durch P und Q geht.
3. Es gibt in $\overline{PQ}$ einen Punkt außer P und Q.
4. Es gibt auf dem Strahl $\overrightarrow{PQ}$ einen Punkt außerhalb von $\overline{PQ}$.
5. Wenn eine Gerade g das Segment $\overline{PQ}$ trifft und R ein weiterer Punkt ist, dann trifft g auch $\overline{PR}$ oder $\overline{QR}$.

Proposition.
Jede Gerade teilt die Ebene in zwei Hälften.

Folgerungen zu Punkten und Geraden

Proposition. Vier Punkte auf einer Geraden können so mit P, Q, R, S benannt werden, dass $Q, R \in \overline{PS}$, $Q \in \overline{PR}$ und $R \in \overline{QS}$.

Folgerung. Wenn $Q, Q' \in \overline{PR}$, dann liegt $Q \in \overline{PQ'}$ und $Q' \in \overline{QR}$ oder es liegt $Q' \in \overline{PQ}$ und $Q \in \overline{Q'R}$.

Folgerung. Jeder Punkt auf einer Geraden teilt die Gerade in zwei Hälften.

Dreiecke

Seien P, Q, R Punkte.

Wenn alle drei Punkte auf einer Geraden liegen, d.h. wenn $PQ = QR = PR$, dann heißen sie kollinear.

Wenn sie nicht kollinear sind, bilden sie ein Dreieck, dessen Ecken sie sind und dessen Kanten die Segmente $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{PR}$ sind.

Kreise

Seien M, P, Q Punkte.

Der Kreis M_P besteht aus Punkten die den gleichen Abstand zu M haben, wie P.

Der Kreis M_{PQ} besteht aus Punkten die den gleichen Abstand zu M haben, wie P zu Q.

Konstruktionen: gleichseitiges Dreieck, Kreis

Problem. Gegeben Punkte P, Q, konstruiere ein Dreieck PQR mit $|PQ| = |QR| = |PR|$.

Konstruktion. Wähle R als einen Schnittpunkt von P_Q und Q_P. $\Diamond$

Beweis. Weil $R \in P_Q$, ist $|PR| = |PQ|$. Weil $R \in Q_P$, ist $|QR| = |PQ|$. $\Box$

Problem. Gegeben Punkte M, P, Q, konstruiere den Kreis M_{PQ} und verwende dazu nur Kreise der Form X_Y.

Konstruktion. Konstruiere A, so dass AMP ein gleichseitiges Dreieck ist. Wähle B als Schnittpunkt von $\overrightarrow{AP}$ und P_Q. Wähle C als Schnittpunkt von A_B und $\overrightarrow{AM}$. Dann ist $M_C = M_{PQ}$. $\Diamond$

Beweis. Es ist $|AM| = |AP|$ weil AMP ein gleichseitiges Dreieck ist. Weil C auf A_B liegt, ist $|AC| = |AB|$. Weil $B \in P_Q$, ist $|PB| = |PQ|$. Man sieht, dass $|AB| = |AP| + PB$ und $|AC| = |AM| + |MC|$. Also ist $|MC| = |AC| - |AM| = |AB| - |AP| = |PB| = |PQ|$. $\Box$

Übungsaufgaben

Aufgabe. Gegeben Punkte P, Q, konstruiere ein Dreieck PQR mit $|PQ| = |QR| = |PR|$.

Konstruktionsbeschreibung.

Wähle R als einen Schnittpunkt von P_Q und Q_P. $\Diamond$

Begründung. Weil $R \in P_Q$, ist $|PR| = |PQ|$. Weil $R \in Q_P$, ist $|QR| = |PQ|$. $\square$

Aufgabe. Gegeben Punkte M, P, Q, konstruiere den Kreis M_{PQ} und verwende dazu nur Kreise der Form X_Y.

Konstruktionsbeschreibung. Konstruiere A, so dass AMP ein gleichseitiges Dreieck ist. Wähle B als Schnittpunkt von $\overrightarrow{AP}$ und P_Q. Wähle C als Schnittpunkt von A_B und $\overrightarrow{AM}$. Dann ist $M_C = M_{PQ}$. $\Diamond$

Begründung. Es ist $|AM| = |AP|$ weil AMP ein gleichseitiges Dreieck ist. Weil C auf A_B liegt, ist $|AC| = |AB|$. Weil $B \in P_Q$, ist $|PB| = |PQ|$. Man sieht, dass $|AB| = |AP| + PB$ und $|AC| = |AM| + |MC|$. Also ist $|MC| = |AC| - |AM| = |AB| - |AP| = |PB| = |PQ|$. $\square$

Schnittpunkte

Wähle R als einen Schnittpunkt von P_Q und Q_P.

Warum sollten sich die beiden Kreise schneiden?

„ . . . “

— Euklid

Axiome (Kreis-Schnittpunkte).

1. Seien M_P und N_Q Kreise. Wenn M_P mindestens einen Punkt innerhalb von N_Q und einen Punkt außerhalb davon, dann haben M_P und N_Q in jedem Halbraum von MN einen eindeutigen Schnittpunkt.
2. Sei M_P ein Kreis und $\overrightarrow{QR}$ ein Strahl. Wenn Q im Innern von M_P liegt, dann haben M_P und $\overrightarrow{QR}$ einen eindeutigen Schnittpunkt.

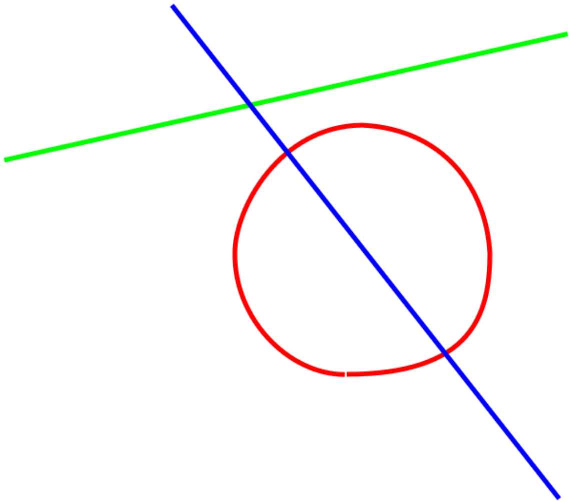
Schnittpunkte

Axiome (Kreis-Schnittpunkte).

1. Seien M_P und N_Q Kreise. Wenn M_P mindestens einen Punkt innerhalb von N_Q und einen Punkt außerhalb davon, dann haben M_P und N_Q in jedem Halbraum von MN einen eindeutigen Schnittpunkt.
2. Sei M_P ein Kreis und $\overrightarrow{QR}$ ein Strahl. Wenn Q im Innern von M_P liegt, dann haben M_P und $\overrightarrow{QR}$ einen eindeutigen Schnittpunkt.

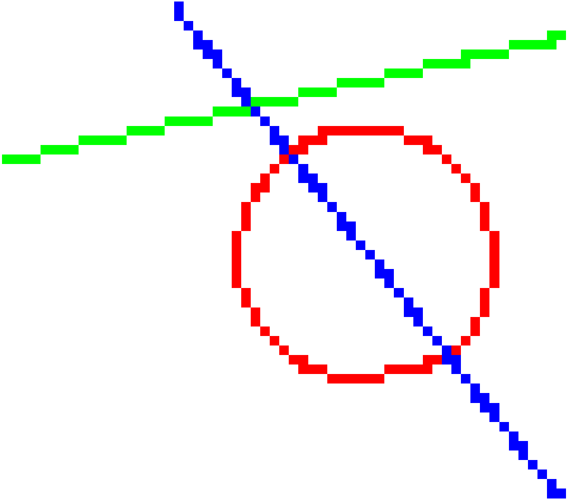
Exkurs: diskontinuierliche Geometrie

Warum muss man so etwas explizit fordern? Ist das nicht klar – wenn es unendlich viele Punkte gibt?



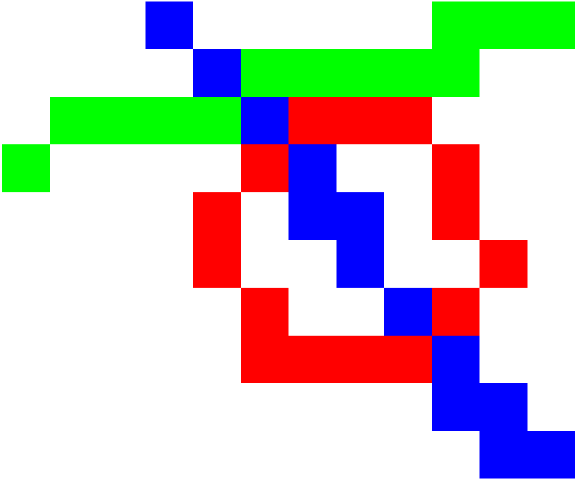
Exkurs: diskontinuierliche Geometrie

Warum muss man so etwas explizit fordern? Ist das nicht klar – wenn es unendlich viele Punkte gibt?



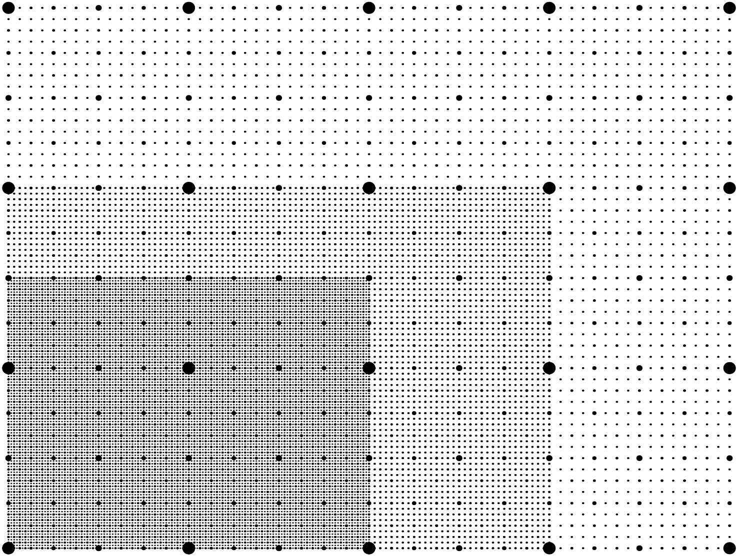
Exkurs: diskontinuierliche Geometrie

Warum muss man so etwas explizit fordern? Ist das nicht klar – wenn es unendlich viele Punkte gibt?



Exkurs: diskontinuierliche Geometrie

Warum muss man so etwas explizit fordern? Ist das nicht klar – wenn es unendlich viele Punkte gibt?



Geraden-Schnittpunkte

Erinnerung:

Axiom. Durch zwei verschiedene Punkte geht höchstens eine Gerade.

Anders ausgedrückt: Seien P und Q Punkte und g und h Geraden. Wenn g und h durch P und Q gehen...

- und P und Q verschieden sind, dann sind g und h gleich.
- dann ist g und h gleich oder P und Q gleich.
- und g und h sind verschieden, dann sind P und Q gleich.

Folgerung. Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in höchstens einem Punkt.

Zwei Geraden sind parallel wenn sie gleich sind oder keinen Schnittpunkt haben.

Meta: Umkehrschluss (Kontraposition)

Aussage: Wenn A, dann B
Umkehrschluss: Wenn nicht B, dann nicht A!

Beispiel. A = der Wecker klingelt, B = ich wache auf

Wenn $\boxed{\text{der Wecker klingelt}}$, dann $\boxed{\text{wache ich auf}}$

Wenn ich $\boxed{\text{weiter schlafe}}$, dann $\boxed{\text{klingelt der Wecker}}$ nicht

...denn wenn der Wecker klingeln würde, würde ich ja aufwachen.

Beispiel. A = g und h schneiden sich in mindestens zwei Punkten
B = g und h sind gleich

Wenn $\boxed{g \text{ und } h \text{ sich in mindestens zwei Punkten schneiden}}$, dann $\boxed{\text{sind } g \text{ und } h \text{ gleich}}$.

Wenn $\boxed{g \text{ und } h \text{ verschieden}}$ sind,
dann $\boxed{\text{schneiden sich } g \text{ und } h \text{ in höchstens einem Punkten}}$.

Geraden-Schnittpunkte

Erinnerung:

Axiom. Durch zwei verschiedene Punkte geht höchstens eine Gerade.

Anders ausgedrückt: Seien P und Q Punkte und g und h Geraden. Wenn g und h durch P und Q gehen...

- und P und Q verschieden sind, dann sind g und h gleich.
- dann ist g und h gleich oder P und Q gleich.
- und g und h sind verschieden, dann sind P und Q gleich.

Folgerung. Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in höchstens einem Punkt.

Zwei Geraden sind parallel wenn sie gleich sind oder keinen Schnittpunkt haben.

Parallelen-Axiom

Axiom (Parallelen-Axiom). Wenn g eine Gerade ist und P ein Punkt, dann existiert genau eine Gerade, die parallel zu g ist und durch P geht.

Mit anderen Worten:

Wenn P nicht auf g liegt, gibt es genau eine Gerade, die P enthält und g nicht schneidet.

Konstruktion von Parallelen

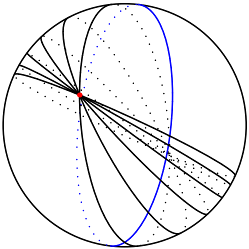
Problem. Gegeben eine Gerade g und einen Punkt P, der nicht auf g liegt, konstruiere die Gerade parallel zu g durch P.

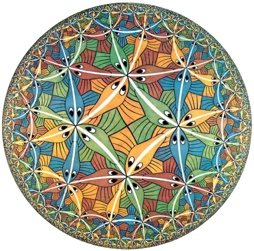
Konstruktion. Wähle $A \in g$ beliebig. Sei B ein Schnittpunkt von A_P mit g. Sei C der Schnittpunkt von P_A und B_A, der von A verschieden ist. Dann ist $h := PC$ die gewünschte Gerade. $\Diamond$

Beweisversuch. Angenommen g und h würden sich in einem Punkt D schneiden. Dann wäre APD ein Dreieck mit einer Winkelsumme echt größer als 180°. Aber über Winkel haben wir noch nicht geredet... $\square$

Exkurs: nicht-euklidische Geometrie

- Euklid versuchte zu zeigen, dass das Parallelen-Axiom aus den anderen Axiomen folgt, was ihm nicht gelang.
- Heute wissen wir, dass es Geometrien gibt, die verschiedenen Varianten des Parallelen-Axioms genügen:
  - Jede Gerade durch P schneidet g $\rightsquigarrow$ projektive Geometrie.
  - Unendlich viele Geraden durch P schneiden g nicht $\rightsquigarrow$ hyperbolische Geometrie.
- Es ist also unmöglich, dass Parallelen-Axiom aus den anderen Axiomen abzuleiten, und zeugt von Euklids logischer Strenge.





Bewegungen

Eine *Bewegung* ist eine bijektive Abbildung $\varphi\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ die den Abstand erhält: $|\varphi(P)\varphi(Q)| = |PQ|$.

Bewegungen bilden (parallele) Geraden auf (parallele) Geraden und Kreise auf Kreise ab.

Ein Punkt P heißt *Fixpunkt* von φ wenn er invariant ist: $\varphi(P) = P$.

Die Menge aller Fixpunkte einer Bewegung φ ist seine *Fixpunktmenge*.

Die *Identität* id lässt jeden Punkt wo er ist: alle Punkte sind Fixpunkte.

Verschiebungen

Eine *Translation* (Verschiebung) ist eine Bewegung, die keinen Fixpunkt hat und jede Gerade auf eine parallele Gerade abbildet. Per Definition ist auch die Identität eine Translation.

Axiom. Gegeben zwei Punkte P und Q existiert genau eine Translation τ mit $\tau(P) = Q$.

Konstruktion von Verschiebungen

Problem. Gegeben Punkte P, Q und R, die nicht kollinear sind. Konstruiere $S := \tau(R)$ wobei τ die Translation ist, die P auf Q abbildet.

Konstruktion. Sei g die Gerade parallel zu PQ durch R und h die Gerade parallel zu PR durch Q. Sei S der Schnittpunkt von g und h. $\Diamond$

Beweis. Da τ eine Verschiebung ist, ist $\tau(PQ) \parallel PQ$. Diese beiden parallelen Geraden schneiden sich aber in $\tau(P) = Q$, sind also gleich. Es folgt, dass auch g auf eine parallele Gerade abgeblidet wird: weil τ eine Bewegung ist und $g \parallel PQ$, ist $\tau(g) \parallel \tau(PQ)$, also $g \parallel PQ = \tau(PQ) \parallel \tau(g)$. Tatsächlich wird g auf sich selbst abgebildet, weil τ sonst einen Fixpunkt hätte [Abkürzung]. Weil τ eine Bewegung ist, wird außerdem PR auf die dazu parallele Gerade durch $\tau(P) = Q$ abgebildet, also auf h. Damit der Schnittpunkt R von g und PR auf den Schnittpunkt S von g und h abgebildet. $\square$

Drehungen

Eine Bewegung ist eine *Rotation* (Drehung) sie genau einen Fixpunkt hat. Wieder gilt auch die Identität als Rotation.

Axiom. Gegeben drei Punkte P, Q und Q' mit $|PQ| = |PQ'|$ existiert genau eine Rotation ρ mit $\rho(P) = P$ und $\rho(Q) = Q'$.

Spiegelungen

Eine Bewegung ist eine *Reflektion* (Spiegelung) es eine Gerade gibt, wenn ihre Fixpunktmenge eine Gerade ist.

Axiom. Gegeben eine Gerade ℓ gibt es genau eine Spiegelung σ, deren Fixpunktmenge die Gerade ℓ ist.

Konstruktion von Spiegelungen

Problem. Gegeben eine Gerade ℓ und einen Punkt P. Konstruiere $Q := \sigma(P)$ wobei σ die Spiegelung an ℓ ist.

Konstruktion. Seien A und B auf ℓ beliebig aber verschieden. Sei Q der von P verschiedene (oder der einzige) Schnittpunkt von A_P und B_P. $\Diamond$

Beweis. Da σ eine Isometrie ist und A und B Fixpunkte, muss $|\sigma(P)\sigma(A)| = |\sigma(P)A| = |PA|$ sein und analog für Q. Also ist $\sigma(P)$ ein Schnittpunkt von A_P und B_P. Wenn $P \in AB$ ist P ein Fixpunkt von σ und der einzige Schnittpunkt von A_P und B_P. Andernfalls ist P kein Fixpunkt von σ, also muss $\sigma(P) \neq P$ sein und der zweite Schnittpunkt der beiden Kreise. $\square$

Verknüpfung von Bewegungen

Die *Verknüpfung* von zwei Bewegungen $\varphi \circ \psi$ führt erst die eine aus, dann die andere: $(\varphi \circ \psi)(P) = \varphi(\psi(P))$.

Jede Bewegung φ hat eine *Inverse* φ^{-1} die ihre Wirkung rückgängig macht: $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id} = \varphi^{-1} \circ \varphi$.

Kongruenz

Zwei Figuren (Segmente, Dreiecke, Vierecke, Winkel, Kreise, ...) f und f' sind kongruent, geschrieben $f \equiv f'$, wenn es eine Bewegung φ gibt, die f auf f' abbildet: $\varphi(f) = f'$.

Dann gibt es auch eine Bewegung, die f' auf f abbildet, nämlich φ^{-1}.

Wenn f und f' kongruent sind (durch die Abbildung φ) und f' und f'' kongruent sind (durch die Abbildung ψ), dann sind f und f'' kongruent (durch die Abbildung $\psi \circ \varphi$).

Eindeutigkeit von Bewegungen

Proposition. Die Fixpunktmenge einer Bewegung φ ist entweder leer, ein einziger Punkt, eine Gerade, oder die ganze Ebene.

Beweis. Schritt 1: wenn P und Q Fixpunkte von φ sind, dann ist jeder Punkt auf PQ ein Fixpunkt.

Eindeutigkeit von Bewegungen

Proposition. Die Fixpunktmenge einer Bewegung φ ist entweder leer, ein einziger Punkt, eine Gerade, oder die ganze Ebene.

Beweis. Schritt 2: wenn alle Punkte auf PQ und außerdem R Fixpunkte von φ sind, dann ist jeder Punkt ein Fixpunkt. $\square$

Bewegungen und Dreiecke I

Folgerung. Wenn PQR ein Dreieck ist und φ und ψ Bewegungen mit $\varphi(P) = \psi(P)$, $\varphi(Q) = \psi(Q)$, $\varphi(R) = \psi(R)$, dann ist $\varphi = \psi$.

Beweis. Die Bewegung $\psi^{-1} \circ \varphi$ hat drei nicht kollineare Fixpunkte P, Q, R.
Nach der Proposition ist jeder Punkt ein Fixpunkt.
Also $\psi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}$, das heißt $\psi = \varphi$. $\square$

Bewegungen und Dreiecke II

Satz (Kongruenzsatz „SSS"). Wenn PQR und $P'Q'R'$ Dreiecke sind, so dass $|PQ| = |P'Q'|$, $|QR| = |Q'R'|$ und $|PR| = |P'R'|$, dann existiert eine Bewegung φ mit $\varphi(PQR) = P'Q'R'$. Das heißt, PQR und $P'Q'R'$ sind kongruent.

Beweis. Sei τ eine Translation, die P auf P' abbildet.
Sei ρ eine Rotation, die P' fest hält und $\tau(Q)$ auf Q' abbildet.
Sei σ die Spiegelung and $P'Q'$ falls $\rho(\tau(R)) \neq R$. Falls nicht, sei $\sigma = \mathrm{id}$.
Dann funktioniert $\varphi = \sigma \circ \rho \circ \tau$. $\square$

Bewegungen und Dreiecke II

Satz (Kongruenzsatz „SSS“). Wenn PQR und $P'Q'R'$ Dreiecke sind, so dass $|PQ| = |P'Q'|$, $|QR| = |Q'R'|$ und $|PR| = |P'R'|$, dann existiert eine Bewegung φ mit $\varphi(PQR) = P'Q'R'$. Das heißt, PQR und $P'Q'R'$ sind kongruent.

Folgerung. Zwei Segmente PQ und $P'Q'$ sind kongurent genau dann, wenn $|PQ| = |P'Q'|$.

Beweis. Dass kongruente Segmente die gleiche Länge haben müssen, ist klar. Umgekehrt zeigt der Satz, dass gleich lange Segmente kongruent sind. □

Winkel

Ein *Winkel* $\angle(s, t)$ besteht aus zwei Strahlen s und t, die denselben Ausgangspunkt Q haben.

Die Strahlen s und t heißen *Schenkel*, der Punkt Q *Scheitel* des Winkels.

Wenn $s = \overrightarrow{QP}$ und $t = \overrightarrow{QR}$ schreiben wir auch $\angle PQR = \angle(s, t)$.

Winkelhalbierende

Problem. Gegeben einen Winkel $\angle(s,t)$, konstruiere einen Strahl r, so dass $\angle(s,r) = \angle(r,t)$.

Die Gerade, die r enthält, ist die *Winkelhalbierende* von $\angle(s,t)$.

Folgerung. Die Winkel $\angle(s,t)$ und $\angle(t,s)$ sind kongruent zueinander.

Beweis. Die Spiegelung an der Winkelhalbierenden bildet $\angle(s,t)$ auf $\angle(t,s)$ ab. $\square$

Nebenwinkel, Gegenwinkel

Seien g und h Geraden, die sich in einem Punkt Q schneiden. Seien s und s' die Strahlen ab Q in g. Seien t und t' die Strahlen ab Q in h.

Die Winkel $\angle(s, t)$ und $\angle(t, s')$ sind *Nebenwinkel*.

Die Winkel $\angle(s, t)$ und $\angle(s', t')$ sind *Gegenwinkel*.

Nebenwinkel

Proposition. Nebenwinkel von kongruenten Winkeln sind kongruent.

Beweis. Seien $\angle(s, t)$ und $\angle(s', t')$ kongruente Winkel.
Sei φ eine Bewegung, die $\angle(s, t)$ auf $\angle(s', t')$ abbildet.
Sei u der zu s komplementäre Strahl und u' der zu s' komplementäre.
Dann bildet φ den eindeutigen zu s komplementären Strahl u auf den eindeutigen zu s' komplementären Strahl u' ab: $\varphi(u) = u'$.
Also bildet φ den Winkel $\angle(t, u)$ auf $\angle(t', u')$ ab. $\square$

Gegenwinkel

Folgerung. Gegenwinkel sind zueinander kongruent.

Beweis. Seien $\angle(s, t)$ und $\angle(s', t')$ Gegenwinkel.
Die Winkel $\angle(t, s')$ und $\angle(t, s')$ sind Nebenwinkel dieser Winkel.
Sie sind zueinander kongruent, also sind auch ihre Gegenwinkel kongruent. $\square$

Zweiter Kongurenzsatz

Satz (Kongruenzsatz „SWS"). Wenn PQR und $P'Q'R'$ Dreiecke sind mit $|PQ| = |P'Q'|$ und $|QR| = |Q'R'|$ und wenn $\angle PQR$ kongruent ist zu $\angle P'Q'R'$, dann ist PQR kongruent zu $P'Q'R'$.

Beweis. Sei φ eine Bewegung, die $\angle PQR$ auf $\angle P'Q'R'$ abbildet.
Dann bildet φ den Punkt P auf P' ab:
P ist der eindeutigen Punkt auf $\overrightarrow{QP}$ mit Abstand $|QP|$ von Q;
P' ist der eindeutige Punkt auf $\overrightarrow{Q'P'}$ mit Abstand $|Q'P'| = |QP|$ von Q'.
Ein analoges Argument zeigt, dass $\varphi(R) = R'$. $\square$

Weitere Kongruenzsätze

Satz (Kongruenzsätze). Wenn PQR und $P'Q'R'$ Dreiecke sind mit

(WSW) $|PQ| = |P'Q'|$, $\angle QPR \equiv \angle Q'P'R'$ und $\angle PQR \equiv P'Q'R'$ oder

(WWS) $|PQ| = |P'Q'|$, $\angle QPR \equiv \angle Q'P'R'$ und $\angle QRP \equiv Q'R'P'$ oder

(WSS) $|PQ| = |P'Q'|$, $|QR| = |Q'R|$ und $\angle QPR \equiv \angle Q'P'R'$

dann ist PQR kongruent zu $P'Q'R'$.

Gestreckte und rechte Winkel

Der Winkel $\angle(s, s')$ zwischen zwei Strahlen s uns s' die eine Gerade bilden ist ein *gestreckter Winkel*.

Ein Winkel der kongruent zu einem Nebenwinkel ist, ist ein *rechter Winkel*.

Gestreckte und rechte Winkel

Der Winkel $\angle(s, s')$ zwischen zwei Strahlen s uns s' die eine Gerade bilden ist ein *gestreckter Winkel*.

Ein Winkel der kongruent zu einem Nebenwinkel ist, ist ein *rechter Winkel*.
Aus der Eindeutigkeit von Spiegelungen folgt:

Proposition. Rechte Winkel sind kongruent zueinander.

Winkel messen

Wir ordnen Winkeln eine Gradzahl zwischen 0° und 180° zu:

Ein trivialer Winkel $\angle(s, s)$ misst 0°.

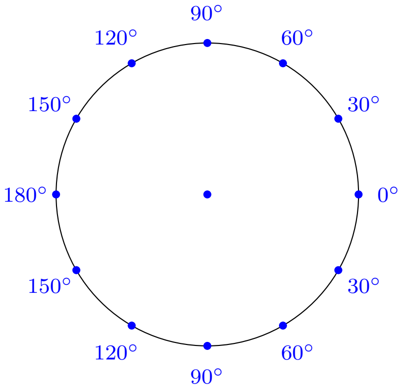
Ein rechter Winkel misst 90°.

Ein gestreckter Winkel misst 180°.

Die Summe von zwei Winkeln,
die x° und y° messen, misst $(x + y)$°,
vorausgesetzt $x + y \leq 180$.

Kleinere Winkel messen
kleinere Gradzahlen.

Wir schreiben einfach $\angle(s, t) = x$°.



Winkel messen (algebraisch)

Wenn wir den Winkel zwischen zwei Strahlen s und t im Gegenuhrzeigersinn messen, können wir ihm eine Zahl zwischen 0° und 360° zuordnen.

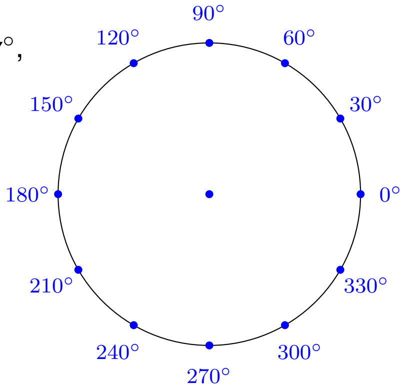
$\ldots -720^\circ = -360^\circ = 0^\circ = 360^\circ = 720^\circ \ldots$

Wir schreiben dann $\sphericalangle(s,t) = x^\circ$.

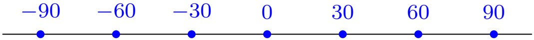
Vorteil: wenn $\sphericalangle(s,t) = x^\circ$ und $\sphericalangle(t,u) = y^\circ$, dann $\sphericalangle(s,u) = (x+y)^\circ$.

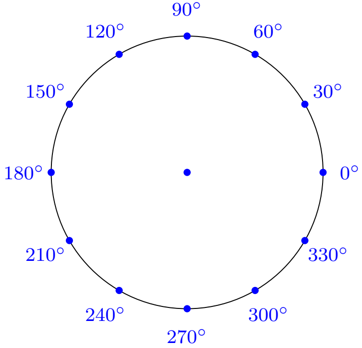
Nachteil: $\sphericalangle(s,t)$ ist nicht invariant unter Kongruenz!

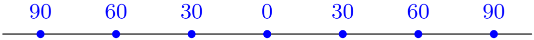
Die Winkel $\angle(s,t)$ und $\angle(s',t')$ können kongruent sein, aber $\sphericalangle(s,t) = -\sphericalangle(s',t')$.

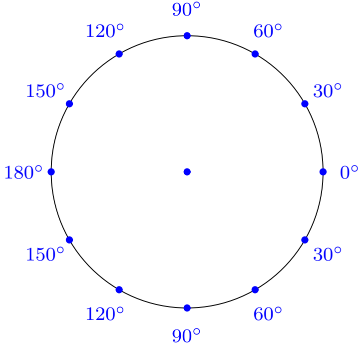


Meta: Zahlen und Relationen









Winkelsumme

Proposition. Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°. Das heißt, ist PQR ein beliebiges Dreieck, dann ist die Summe von $\angle PQR$, $\angle QRP$ und $\angle RPQ$ gerade 180°.

Winkelsumme

Proposition. Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°. Das heißt, ist PQR ein beliebiges Dreieck, dann ist die Summe von $\angle PQR$, $\angle QRP$ und $\angle RPQ$ gerade 180°.

Beweis. Sei g die zu PQ parallele Gerade durch R. Sei A der Schnittpunkt von R_{QP} mit g der im selben Halbraum von QR liegt, wie P. Sei B der von Q verschiedene Schnittpunkt von R_Q und QR.
Wir wollen zeigen, dass $\angle QPR \equiv \angle ARP$ und $\angle PQR \equiv \angle ARB$.
Sei τ_{QP} die Translation, die Q auf P abbildet. Es ist $\tau_{QP}(\angle PQR) = \angle ARB$.
Sei τ_{PR} die Translation, die P auf R abbildet. Der Winkel $\tau_{PR}(\angle QPR)$ ist ein Gegenwinkel von $\angle ARP$, also $\angle QPR \equiv \angle ARP$. $\square$