

Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

Bewegungen: Parameter

Stefan Witzel

Parameter

Ziel: gegeben eine Bewegung φ , beschreibe Parameter, die φ eindeutig beschreiben.

Diese werden sein:

1. die Parität ε : ist φ gerade oder ungerade?
2. der Drehwinkel ϑ : um wieviel dreht der gerade Anteil von φ ?
3. der Verschiebungsvektor $\underline{v}$: wie verschiebt der Verschiebungsanteil von φ ?

Wir wählen einen Punkt O und eine Gerade ℓ und können jede Bewegung eindeutig zerlegen als

$$\varphi = \tau_{\underline{v}} \circ \rho_{\vartheta} \circ \sigma^{\varepsilon}$$

wobei $\tau_{\underline{v}}$ eine Verschiebung ist, ρ_{ϑ} eine Drehung mit Fixpunkt O und σ die Spiegelung, die ℓ festhält.

Übersicht

Vektoren

Drehwinkel

Parität

Vektoren und Verschiebungen

Vektoren

- ▶ beschreiben die relative Lage zweier Punkte.
- ▶ parametrisieren Verschiebungen (eindeutig).

Wenn τ eine Verschiebung ist, wollen wir die Beziehung

$$Q = \tau(P) \quad \text{schreiben als} \quad Q = P + \underline{v}$$

wobei $\underline{v}$ der zu τ gehörende Vektor ist.

Wenn ein Vektor und eine Bewegung so zueinander gehören, schreiben wir

$$\underline{v} = \text{vec } \tau \quad \text{bzw.} \quad \tau = \tau_{\underline{v}}$$

und sagen, $\underline{v}$ ist der **Verschiebungsvektor** von τ und τ **verschiebt um** $\underline{v}$.

Vektoren

Für beliebige Punkte P und Q gibt es einen Vektor $\underline{v}$ von P nach Q .

(Entspricht der Verschiebung, die P auf Q abbildet.)

Wir schreiben $Q = P + \underline{v}$ oder

$$\underline{v} = Q - P.$$

Zwei Vektoren $\underline{v} = Q - P$ und $\underline{w} = S - R$ sind gleich ($\underline{v} = \underline{w}$), wenn die zugehörigen Verschiebungen gleich sind, d.h. wenn $PRSQ$ ein Parallelogramm ist.

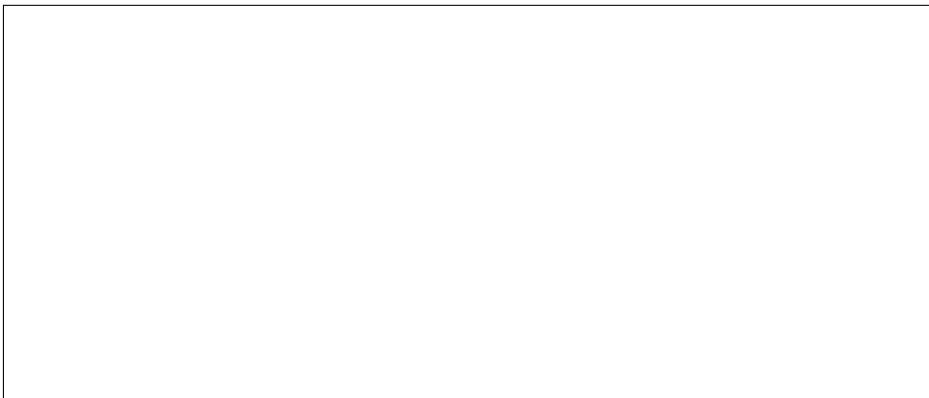


Vektor an Punkt

Jeder Vektor $\underline{v}$ kann an jeden Punkt P angetragen werden.

D.h. man kann den Vektor schreiben als $\underline{v} = Q - P$ für den geeigneten Punkt Q :

Wenn $\underline{v} = S - R$, wähle Q als den eindeutigen Punkt Q , so dass $PRSQ$ ein Parallelogramm ist.



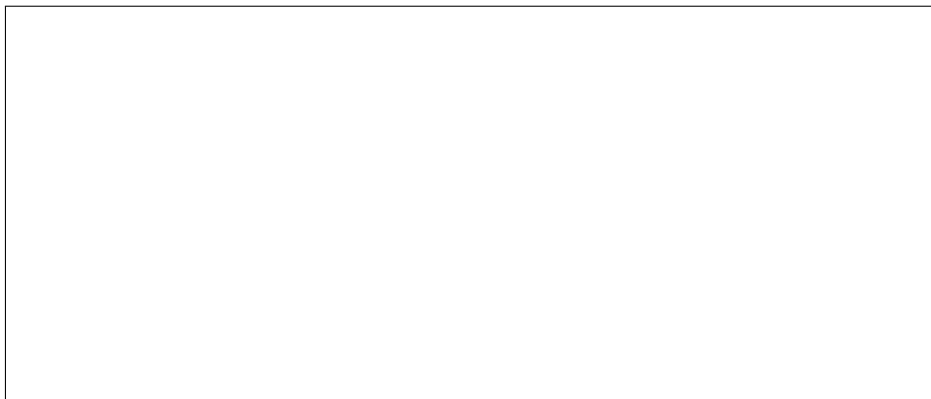
Punkt + Vektor

Wenn P ein Punkt ist und $\underline{v}$ ein Vektor, gibt es einen Punkt $P + \underline{v}$.

Wenn $\underline{v} = S - R$ ist, schreiben wir $\underline{v} = Q - P$.

Dann ist

$$P + \underline{v} = P + (Q - P) = Q.$$



Vektor + Vektor

Wenn $\underline{v}$ und $\underline{w}$ Vektoren sind, gibt es einen Vektor $\underline{v} + \underline{w}$.

Wenn $\underline{v} = P - O$ und $\underline{w} = S - R$, dann gibt es einen Punkt Q , so dass $\underline{w} = Q - P$ ist.

Dann ist dann

$$\underline{v} + \underline{w} = (P - O) + (Q - P) = Q - O.$$



Null-Vektor, Negation

Es gibt einen 0-Vektor $\underline{0}$ mit der Eigenschaft $P + \underline{0} = P$.

Zu jedem Vektor $\underline{v}$ gibt es den negativen Vektor $-\underline{v}$ mit der Eigenschaft $\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$.

Wenn $\underline{v} = Q - P$, dann ist $-\underline{v} = P - Q$.

Daraus ergibt sich, dass wir auch die Differenz von Vektoren bilden können: Wenn $\underline{v} = Q - P$ und $\underline{w} = S - R$, dann ist

$$\underline{v} - \underline{w} = \underline{v} + (-\underline{w}) = (Q - P) + (-(S - R)) = (Q - P) + (R - S).$$



Übersetzung Vektoren Verschiebungen

Seien τ, τ_1, τ_2 die Verschiebungen um die Vektoren $\underline{v}, \underline{v}_1, \underline{v}_2$:

Dann entsprechen sich die folgenden Aussagen

$Q = \tau(P)$	wenn	$Q = P + \underline{v}$
$\tau = \tau_2 \circ \tau_1$	wenn	$\underline{v} = \underline{v}_2 + \underline{v}_1$
$\tau(P) = \tau_2(\tau_1(P))$	wenn	$\underline{v} = \underline{v}_2 + \underline{v}_1$
$\tau = \text{id}$	wenn	$\underline{v} = \underline{0}$
$\tau_1 = \tau_2^{-1}$	wenn	$\underline{v}_1 = -\underline{v}_2$

Reihenfolge vertauschen und Umklammern

Da Verschiebungen vertauschen, tun es auch Vektoren:

$$\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v}.$$

Man kann sogar umklammern:

$$(Q - P) + (S - R) = (Q - R) + (S - P).$$

Für Abenteuerlustige ($A, B, C, \dots$ Punkte):

$A + B - C + D - E + F - G - H$ ist ein Vektor.

$A + B - C + D - E + F - G - H + I$ ist ein Punkt.

Übersicht

Vektoren

Drehwinkel

Parität

algebraische Winkel und gerade Bewegungen

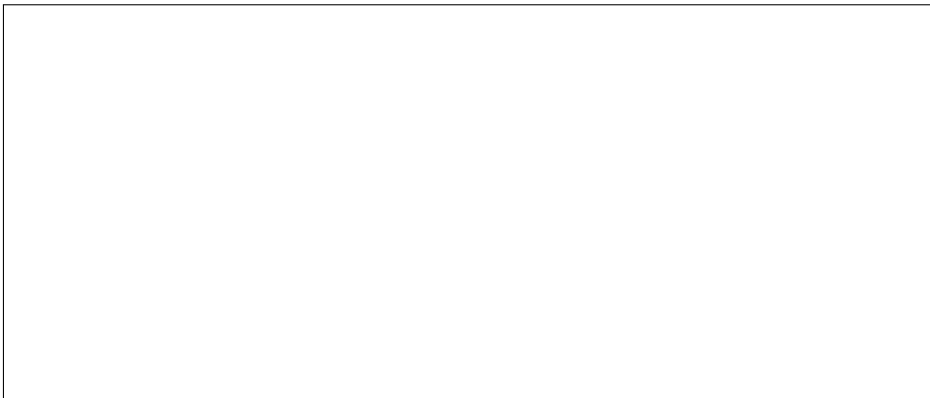
Erinnerung: gerade Bewegungen erhalten algebraisches Winkelmaß.

Zwei algebraische Winkel $\sphericalangle(s, t)$ und $\sphericalangle(u, v)$ sind **kongruent**, geschrieben $\sphericalangle(s, t) \equiv \sphericalangle(u, v)$, wenn es eine **gerade** Bewegung gibt, die den einen in den anderen überführt.

Algebraische Winkel sind kongruent genau dann, wenn sie gleiches Winkelmaß haben.

Eindeutigkeit algebraischer Winkel

Proposition. Für einen Strahl s und einen algebraischen Winkel $\sphericalangle(u, v)$ gibt es genau einen Strahl t , so dass $\sphericalangle(s, t) \equiv \sphericalangle(u, v)$.



Eindeutigkeit algebraischer Winkel

Proposition. Für einen Strahl s und einen algebraischen Winkel $\sphericalangle(u, v)$ gibt es genau einen Strahl t , so dass $\sphericalangle(s, t) \equiv \sphericalangle(u, v)$.

Beweis. Existenz:

Sei P der Ausgangspunkt von s , sei $u = \overrightarrow{RS}$ und $v = \overrightarrow{RT}$.

Sei $\{Q\} = s \cap P_{RS}$.

Sei τ die Verschiebung, die R auf P abbildet und ρ die Drehung mit Fixpunkt P , die $\tau(R)$ auf Q abbildet.

Dann ist $s = \rho(\tau(s))$, also bildet $t = \rho(\tau(v))$ den gewünschten Winkel.

Eindeutigkeit: Wenn $\sphericalangle(s, t')$ ein weiterer solcher Winkel ist, gibt es eine gerade Bewegung φ , die s festhält und t auf t' abbildet.

Die von s aufgespannte Gerade ist in der Fixpunktmenge von φ .

Also ist $\varphi = \text{id}$ und $t = t'$.



Eindeutigkeit algebraischer Winkel

Proposition. Für einen Strahl s und einen algebraischen Winkel $\sphericalangle(u, v)$ gibt es genau einen Strahl t , so dass $\sphericalangle(s, t) \equiv \sphericalangle(u, v)$.

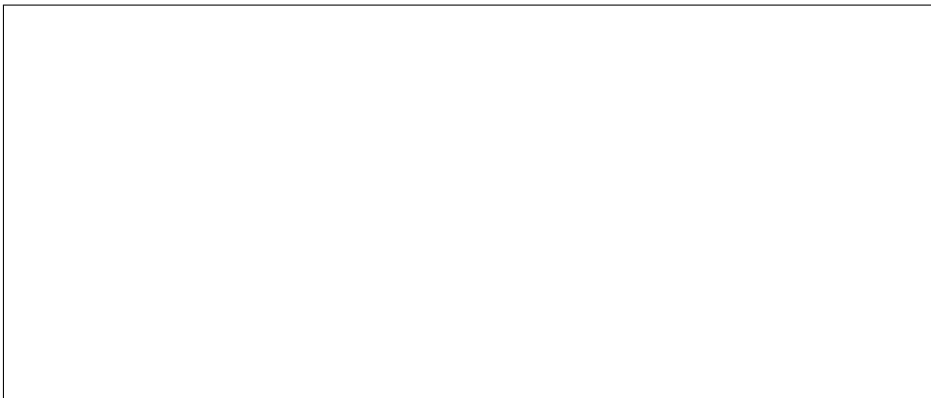
Folgerung. Eine Drehung ρ ist eindeutig festgelegt durch ihren Fixpunkt P und den Winkel $\sphericalangle(s, \rho(s))$ für irgendeinen Strahl $ab\ P$.

Wir wollen den Winkel $\sphericalangle(s, \rho(s))$ den **Drehwinkel** von ρ nennen und müssen dazu zeigen, dass er nicht vom Strahl s abhängt.

Drehwinkel

Proposition. Für eine Drehung ρ ist der Winkel $\sphericalangle(s, \rho(s))$ bis auf Kongruenz vom Strahl s unabhängig.

Wenn s irgendein Strahl ab dem Fixpunkt von ρ ist, ist $\sphericalangle(s, \rho(s))$ der **Drehwinkel** von ρ , geschrieben $\text{ang } \rho$.



Drehwinkel

Proposition. Für eine Drehung ρ ist der Winkel $\sphericalangle(s, \rho(s))$ bis auf Kongruenz vom Strahl s unabhängig.

Wenn s irgendein Strahl ab dem Fixpunkt von ρ ist, ist $\sphericalangle(s, \rho(s))$ der **Drehwinkel** von ρ , geschrieben $\text{ang } \rho$.

Beweis. Sei ρ eine Drehung und s und s' Strahlen ab dem Fixpunkt von ρ . Da ρ eine gerade Bewegung ist, ist $\sphericalangle(s, s')$ kongruent zu $\sphericalangle(\rho(s), \rho(s'))$. Also ist

$$\begin{aligned}\sphericalangle(s, \rho(s)) &\equiv \sphericalangle(s, s') + \sphericalangle(s', \rho(s)) \equiv \\ &\sphericalangle(\rho(s), \rho(s')) + \sphericalangle(s', \rho(s)) \equiv \sphericalangle(s', \rho(s')).\end{aligned}$$



Drehwinkel

Proposition. Für eine Drehung ρ ist der Winkel $\sphericalangle(s, \rho(s))$ bis auf Kongruenz vom Strahl s unabhängig.

Wenn s irgendein Strahl ab dem Fixpunkt von ρ ist, ist $\sphericalangle(s, \rho(s))$ der **Drehwinkel** von ρ , geschrieben $\text{ang } \rho$.

Folgerung. Sei P ein Punkt. Der Drehwinkel ist additiv: für Drehungen ρ_1 und ρ_2 mit Fixpunkt P gilt $\sphericalangle(\rho_2 \circ \rho_1) = \sphericalangle(\rho_2) + \sphericalangle(\rho_1)$.

Beweis. Sei s ein Strahl ab P . Es ist

$$\begin{aligned}\sphericalangle(s, \rho_2(\rho_1(s))) &\equiv \\ \sphericalangle(s, \rho_1(s)) + \sphericalangle(\rho_1(s), \rho_2(\rho_1(s))) &\equiv \sphericalangle(s, \rho_1(s)) + \sphericalangle(s, \rho_2(s)).\end{aligned}$$



Übersetzung Drehwinkel Drehungen

Seien ρ, ρ_1, ρ_2 die Drehungen mit Fixpunkt P um die Drehwinkel $\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2$.

Dann entsprechen sich die folgenden Aussagen

$\rho = \rho_2 \circ \rho_1$	wenn	$\vartheta = \vartheta_2 + \vartheta_1$
$\rho = \text{id}$	wenn	$\vartheta = 0^\circ$
$\rho_1 = \rho_2^{-1}$	wenn	$\vartheta_1 = -\vartheta_2$

Drehwinkel ohne Fixpunkt

Bisher brauchten wir den Fixpunkt, um den Drehwinkel zu bestimmen.
Ziel jetzt: Drehwinkel für Gerade Bewegungen ohne Fixpunkt.

- ▶ Leichter zu bestimmen für Drehungen.
- ▶ Auch für Verschiebungen definiert.

Seien s ein Strahl ab P und t ein Strahl ab Q .

Sei τ die Verschiebung, die Q auf P abbildet.

Wir definieren den verallgemeinerten algebraischen Winkel

$$\sphericalangle(s, t) := \sphericalangle(s, \tau(t)).$$

Drehwinkel ohne Fixpunkt

Seien s ein Strahl ab P und t ein Strahl ab Q .

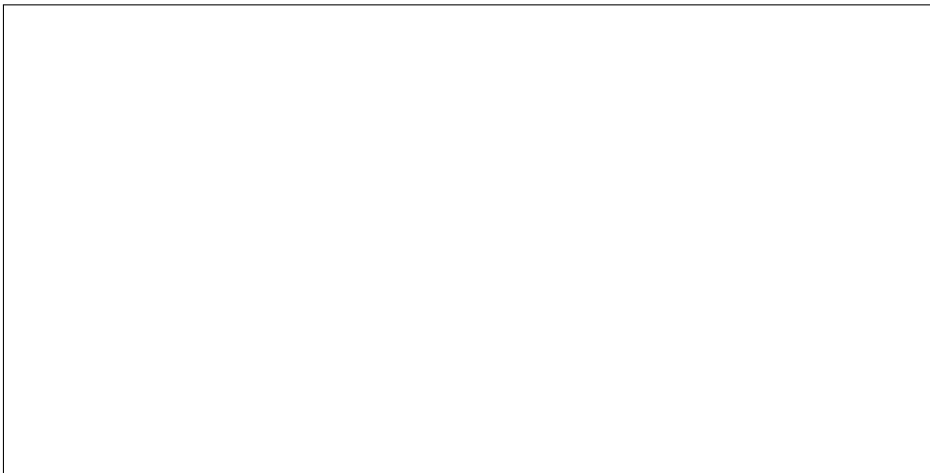
Sei τ die Verschiebung, die Q auf P abbildet.

Wir definieren den verallgemeinerten algebraischen Winkel

$$\sphericalangle(s, t) := \sphericalangle(s, \tau(t)).$$

Invarianz des verallgemeinerten Winkels

Proposition. Seien s und t Strahlen und τ_1 und τ_2 Verschiebungen. Es ist $\sphericalangle(\tau_1(s), \tau_2(t)) = \sphericalangle(s, t)$.



Invarianz des verallgemeinerten Winkels

Proposition. Seien s und t Strahlen und τ_1 und τ_2 Verschiebungen. Es ist $\sphericalangle(\tau_1(s), \tau_2(t)) = \sphericalangle(s, t)$.

Beweis. Seien P und Q die Ausgangspunkte von s und t .

Sei τ die Verschiebung, die Q auf P abbildet.

Dann ist $\tau' = \tau_1 \circ \tau \tau_2^{-1}$ die Verschiebung, die $\tau_2(Q)$ auf $\tau_1(P) = \tau_1(\tau(Q))$ abbildet.

$$\begin{aligned}\sphericalangle(s, t) &= \sphericalangle(s, \tau(t)) \\ &\equiv \sphericalangle(\tau_1(s), \tau_1(\tau(t))) \\ &= \sphericalangle(\tau_1(s), \tau'(\tau_2(t))) = \sphericalangle(\tau_1(s), \tau_2(t)).\end{aligned}$$



Invarianz des verallgemeinerten Winkels

Proposition. Seien s und t Strahlen und τ_1 und τ_2 Verschiebungen. Es ist $\sphericalangle(\tau_1(s), \tau_2(t)) = \sphericalangle(s, t)$.

Proposition. Gerade Bewegungen erhalten den (verallgemeinerten) algebraischen Winkel: wenn φ eine gerade Bewegung ist, ist $\sphericalangle(\varphi(s), \varphi(t)) = \sphericalangle(s, t)$.

Drehwinkel gerader Bewegungen

Wir definieren den **Drehwinkel** $\text{ang } \varphi$ einer geraden Bewegung φ durch

$$\text{ang } \varphi = \angle(s, \varphi(s))$$

wobei s irgendein Strahl ist.

Wie beim Drehwinkel für Drehungen sieht man:

- ▶ Der Drehwinkel ist wohldefiniert (von s unabhängig).
- ▶ Der Drehwinkel ist additiv: $\sphericalangle(\varphi \circ \psi) = \sphericalangle\varphi + \sphericalangle\psi$.
- ▶ Insbesondere $\sphericalangle(\varphi^{-1}) = -\sphericalangle(\varphi)$.

Proposition. Eine gerade Bewegung φ hat Drehwinkel $\text{ang } \varphi = 0^\circ$ genau dann, wenn φ eine Verschiebung ist.

Zerlegung gerader Bewegungen

Proposition. Sei P ein Punkt. Jede gerade Bewegung ψ lässt sich eindeutig schreiben als

$$\psi = \tau \circ \rho$$

wobei τ eine Verschiebung ist und ρ eine Drehung mit Fixpunkt P .
Genauer ist ρ die Drehung mit Drehwinkel $\text{ang } \psi$.

Beweis. Wenn ρ die Drehung mit Fixpunkt P und Drehwinkel $\text{ang } \psi$ ist, hat die Bewegung $\tau = \psi \circ \rho^{-1}$ Drehwinkel

$$\text{ang } \tau = \text{ang } \psi + \text{ang}(\rho_{\text{ang } \psi}^{-1}) = \text{ang } \psi - \text{ang } \rho_{\text{ang } \psi} = \text{ang } \psi - \text{ang } \psi = 0^\circ,$$

ist also eine Verschiebung.

Umgekehrt muss die Drehung ρ den gleichen Drehwinkel haben wie ψ , da Verschiebungen Drehwinkel 0° haben. □

Übersicht

Vektoren

Drehwinkel

Parität

Parität

Die *Parität* einer Bewegung ist definiert als

$$\begin{array}{ll} \text{par } \varphi = 0 & \text{wenn } \varphi \text{ gerade,} \\ \text{par } \varphi = 1 & \text{wenn } \varphi \text{ ungerade.} \end{array}$$

Proposition. Sei ℓ eine beliebige Gerade. Jede Bewegung φ lässt sich eindeutig schreiben als $\varphi = \psi \circ \zeta$ wobei ψ eine gerade Bewegung ist und ζ die Gerade ℓ fixiert. Genauer ist $\zeta = \sigma_\ell^{\text{par } \varphi}$.

Merke $\sigma_\ell^0 = \text{id}$, $\sigma_\ell^1 = \sigma_\ell$.

Beweis. Wenn $\zeta = \sigma_\ell^{\text{par } \varphi}$ ist, ist $\psi = \varphi \circ \zeta$ gerade.

Soll umgekehrt ψ gerade sein, muss $\zeta = \sigma_\ell$ sein wenn φ ungerade ist und die Identität wenn φ gerade ist. □

Zerlegung von Bewegungen

Satz. Sei P ein beliebiger Punkt und ℓ eine beliebige Gerade.

Jede Bewegung φ ist eindeutig beschrieben durch einen Vektor $\underline{v}$, einen algebraischen Winkel ϑ und eine Parität ε so dass gilt

$$\varphi = \tau_{\underline{v}} \circ \rho_{P,\vartheta} \circ \sigma_{\ell}^{\varepsilon}.$$

Diese Parameter ergeben sich wie folgt: die Parität $\varepsilon = \text{par } \varphi$ ist die von φ , der Winkel ist der Drehwinkel $\vartheta = \angle \psi$ von $\psi = \varphi \circ \sigma_{\ell}^{\varepsilon}$, der Vektor ist der Verschiebungsvektor $\underline{v} = \text{vec } \tau$ von $\tau = \psi \circ \rho_{P,\vartheta}^{-1}$.

Beweis. Zusammensetzen, was wir bisher gezeigt haben. □