

Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

Ornamente

Stefan Witzel

Ornamente

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{E}^2$ ist ein **Ornament** wenn die Gruppe der Verschiebungssymmetrien einen Punkt nicht auf einen beliebig nahe Punkte abbilden kann.

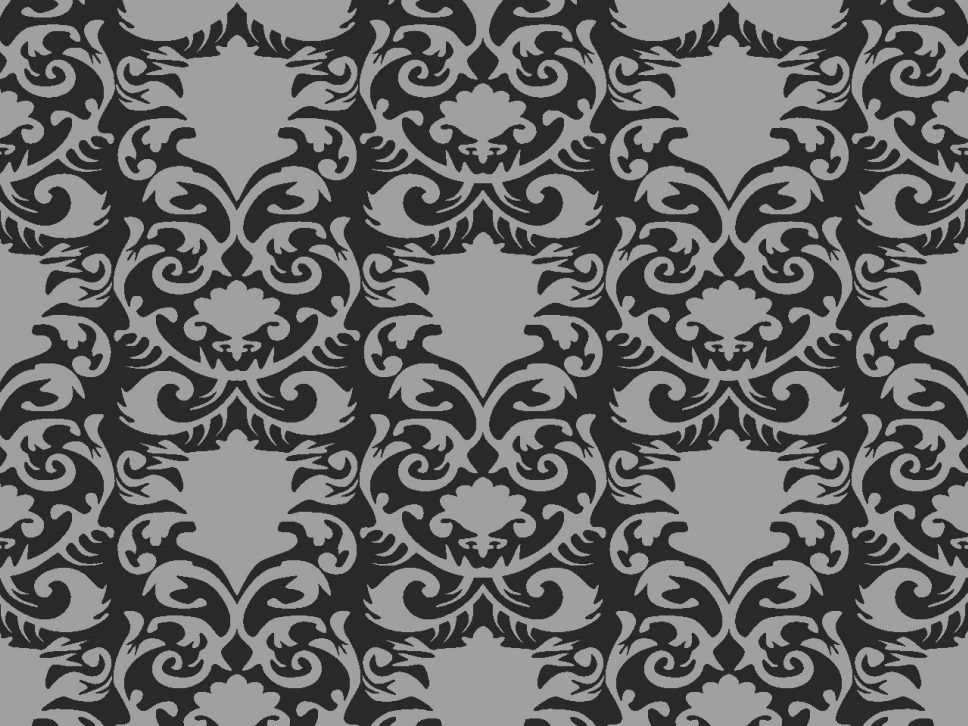
Hat ein Ornament **keine** Verschiebungssymmetrien, dann ist die Symmetriegruppe zyklisch oder eine Dieder-Gruppe.

Werden die Verschiebungssymmetrien von **einer** Verschiebung τ erzeugt (jede Verschiebungssymmetrie ist τ^m für eine ganze Zahl m) ist die Menge ein **Band-Ornament**.¹

Werden die Verschiebungssymmetrien von **zwei** Verschiebungen τ_1, τ_2 erzeugt, (jede V.S. ist $\tau_1^m \circ \tau_2^n$, für ganze Zahlen m, n) handelt es sich um ein **Tapetenmuster**.

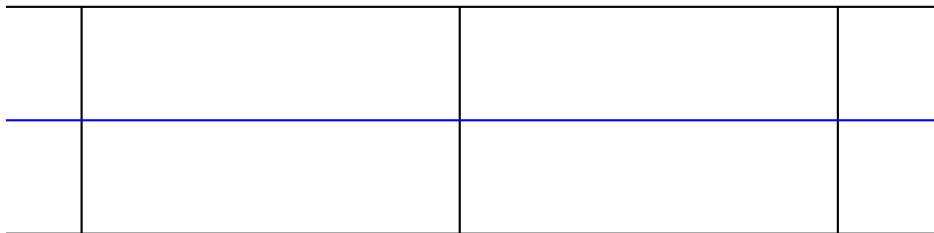
Frage: welche Symmetriegruppen können auftreten?

¹Bandornamente von craftsmanspace.com



Band-Ornamente

Wir gehen der Einfachheit halber davon aus, dass ein Bandornament in der Vertikalen beschränkt ist. Das heißt es gibt zwei Randgeraden und eine Mittelachse.



Jedes Band-Ornament hat nach Definition eine (T)ranslationssymmetrie.

Symmetrien von Band-Ornamenten: Spiegelungen

Welche Spiegelsymmetrien kann ein Band-Ornament haben?

(H)orizontalspiegelung oder (V)ertikalspiegelung.

Symmetrien von Band-Ornamenten: Drehungen

Welche Drehsymmetrien kann ein Band-Ornament haben?

(P)unktspiegelung an der Mittelachse.

Symmetrien von Band-O.: Gleitspiegelungen

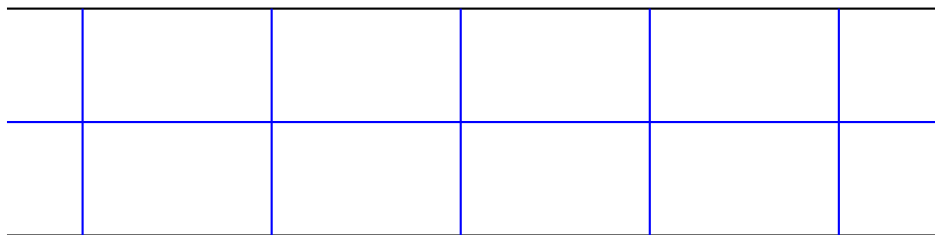
Welche Gleitspiegelungssymmetrien kann ein Band-Ornament haben?

(G)leitspiegelung entlang der Mittelachse.

Mögliche Symmetriegruppen von Band-Ornamenten

Fall 1: Es gibt eine vertikale Spiegelung.

Unterfall 1a: Es gibt auch eine horizontale Spiegelung.



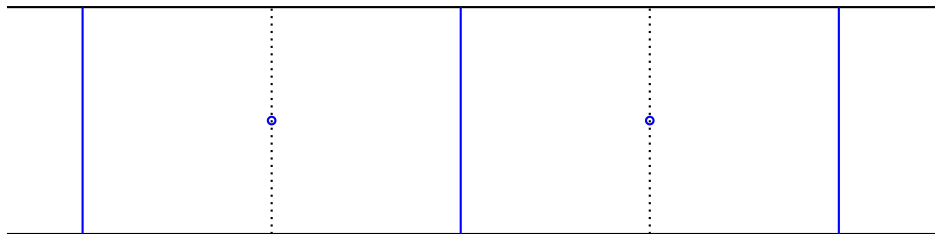
Klasse (TVHPG).

Mögliche Symmetriegruppen von Band-Ornamenten

Fall 1: Es gibt eine vertikale Spiegelung.

Unterfall 1a: Es gibt **keine** horizontale Spiegelung.

Unterfall 1a1: Es gibt trotzdem Punktspiegelungen.



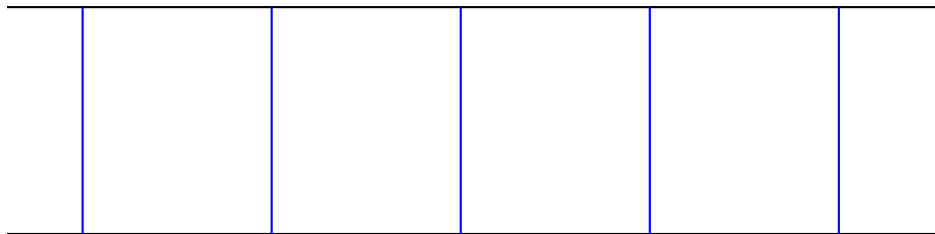
Klasse (TVPG).

Mögliche Symmetriegruppen von Band-Ornamenten

Fall 1: Es gibt eine vertikale Spiegelung.

Unterfall 1a: Es gibt auch keine horizontale Spiegelung.

Unterfall 1a2: Es gibt auch keine Punktspiegelungen.

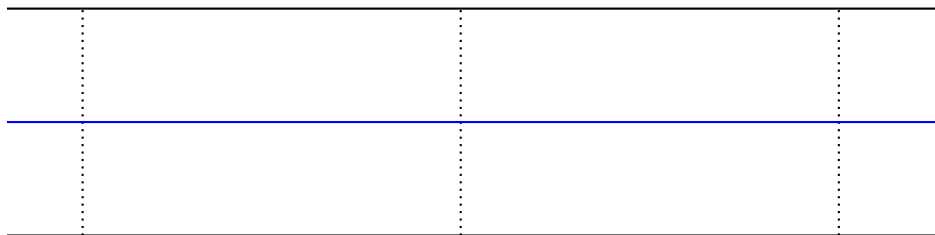


Klasse (TV).

Mögliche Symmetriegruppen von Band-Ornamenten

Fall 2: Es gibt **keine** vertikale Spiegelung.

Unterfall 2a: Es gibt eine horizontale Spiegelung.



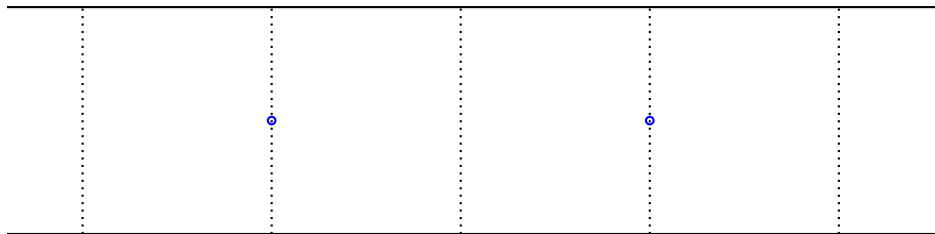
Klasse (THG).

Mögliche Symmetriegruppen von Band-Ornamenten

Fall 2: Es gibt keine vertikale Spiegelung.

Unterfall 2a: Es gibt **keine** horizontale Spiegelung.

Unterfall 2a1: Es gibt trotzdem Punktspiegelungen.



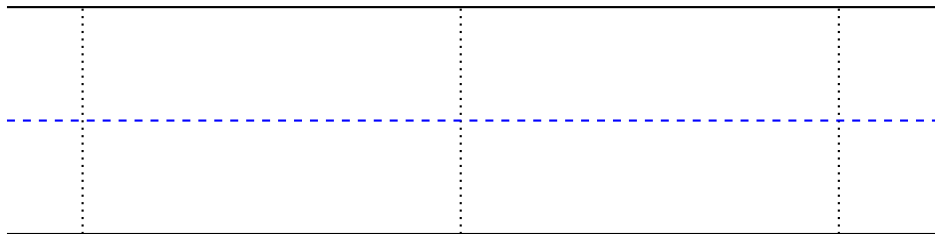
Klasse (TP).

Mögliche Symmetriegruppen von Band-Ornamenten

Fall 2: Es gibt keine vertikale Spiegelung.

Unterfall 2a: Es gibt **keine** horizontale Spiegelung.

Unterfall 2a2: Es gibt trotzdem Gleitspiegelungen.



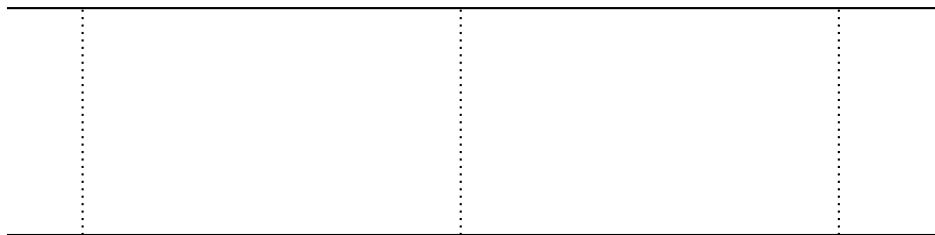
Klasse (TG).

Mögliche Symmetriegruppen von Band-Ornamenten

Fall 2: Es gibt keine vertikale Spiegelung.

Unterfall 2a: Es gibt **keine** horizontale Spiegelung.

Unterfall 2a3: Es gibt weder Punktspiegelungen noch Gleitspiegelungen.



Klasse (T).

Klassifikation von Band-Ornamenten

Satz. Jedes Band-Ornament hat eine von sieben möglichen Klassen von Symmetriegruppen:

1. (TVHPG)



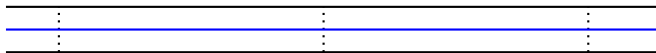
2. (TVPG)



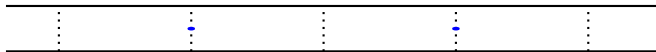
3. (TV)



4. (TH)



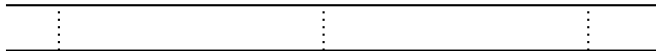
5. (TP)



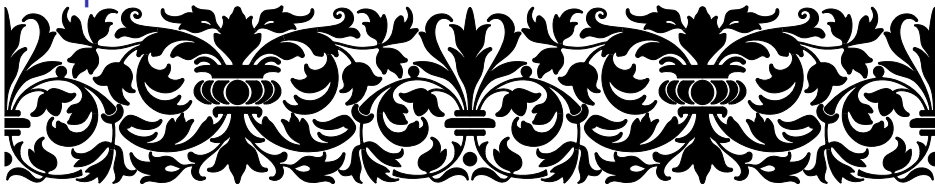
6. (TG)



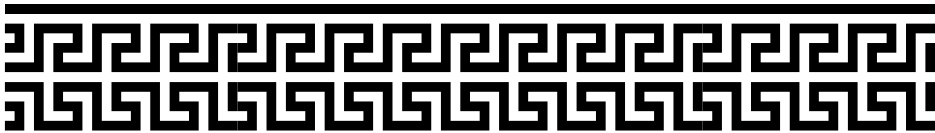
7. (T)



Beispiele



Klasse:



Klasse:

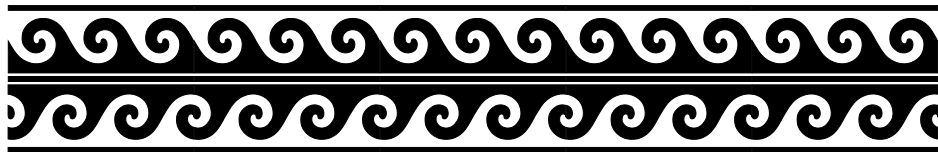


Klasse:

Beispiele

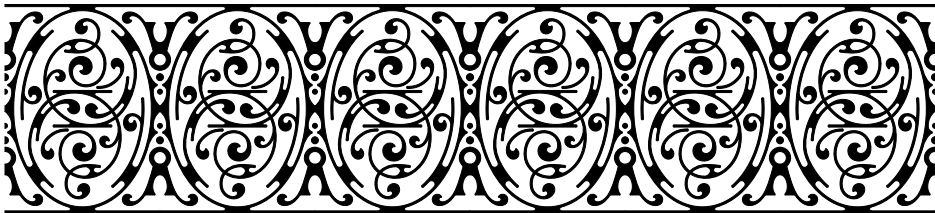


Klasse:

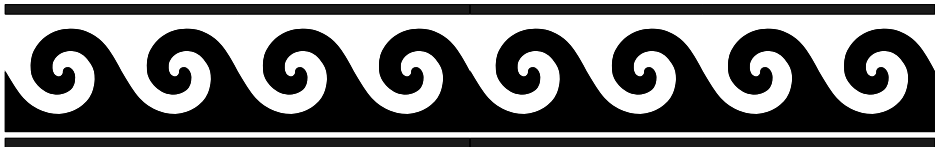


Klasse:

Beispiele



Klasse:



Klasse:

Klassifikation von Tapetenmustern

Eine ähnliche Klassifikation existiert auch für Tapetenmuster:

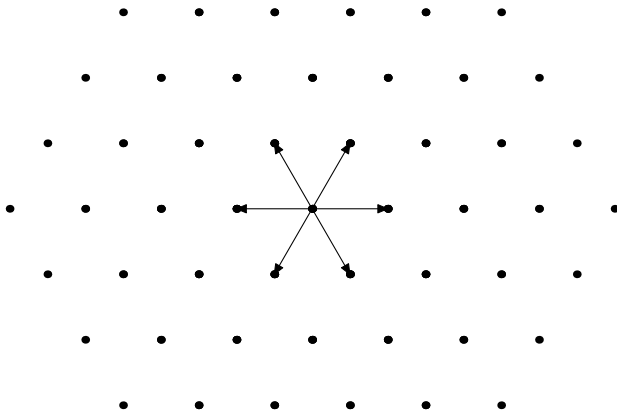
Satz. Jedes Tapetenmuster hat eine von siebzehn möglichen Klassen von Symmetriegruppen.

→ Wikipedia „Ebene kristallographische Gruppe“.

Frage: Warum nur endlich viele — wo es doch unendlich viele **endliche** Symmetriegruppen gibt?

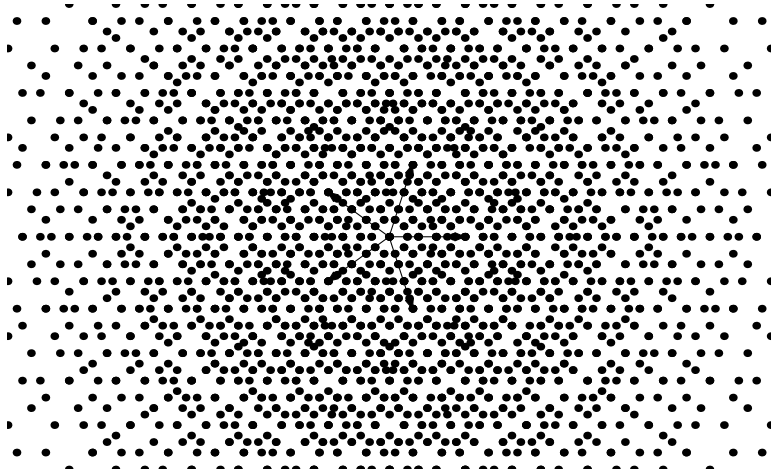
Antwort: Es können nur bestimmte Drehungen auftreten, weil es sonst „zu viele“ Verschiebungen gibt.

Mögliche Drehwinkel



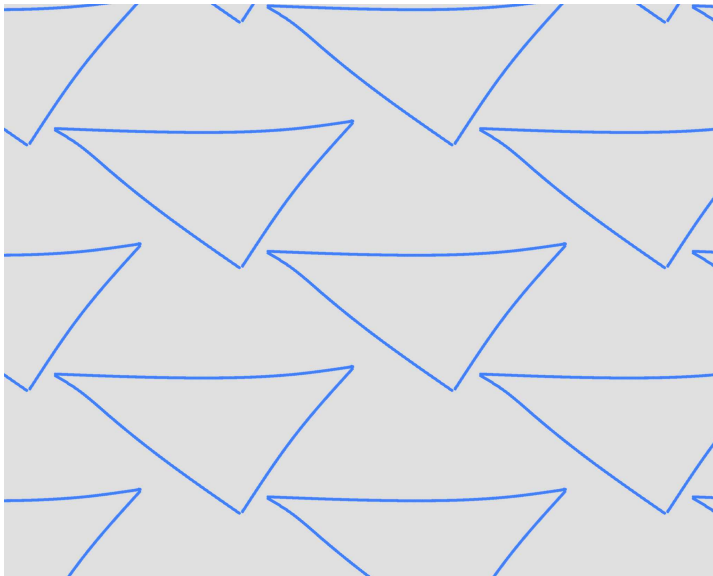
$\leadsto$ Die einzig möglichen Drehwinkel sind $360^\circ/n$ für $n \in \{2, 3, 4, 6\}$.

Mögliche Drehwinkel



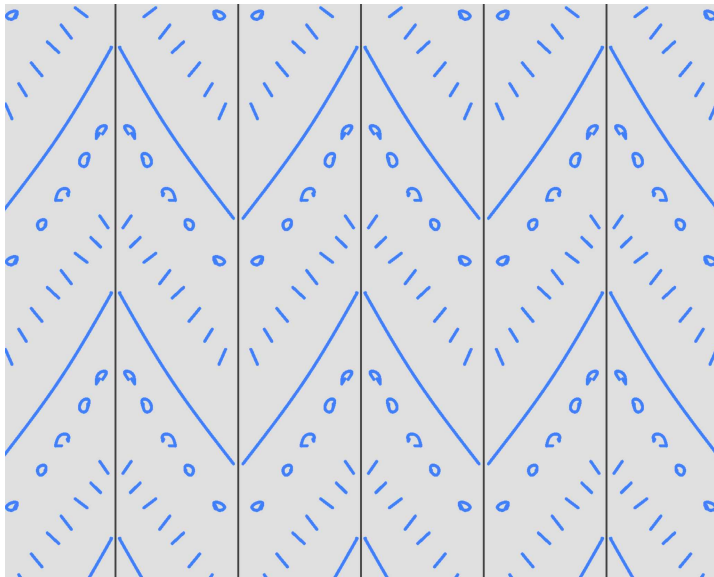
↪ Die einzig möglichen Drehwinkel sind $360^\circ/n$ für $n \in \{2, 3, 4, 6\}$.

Beispiele



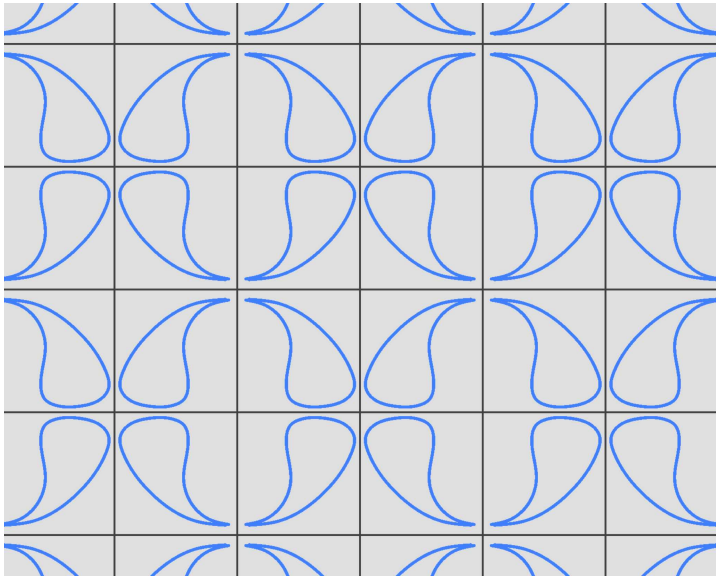
Verschiebung pur

Beispiele



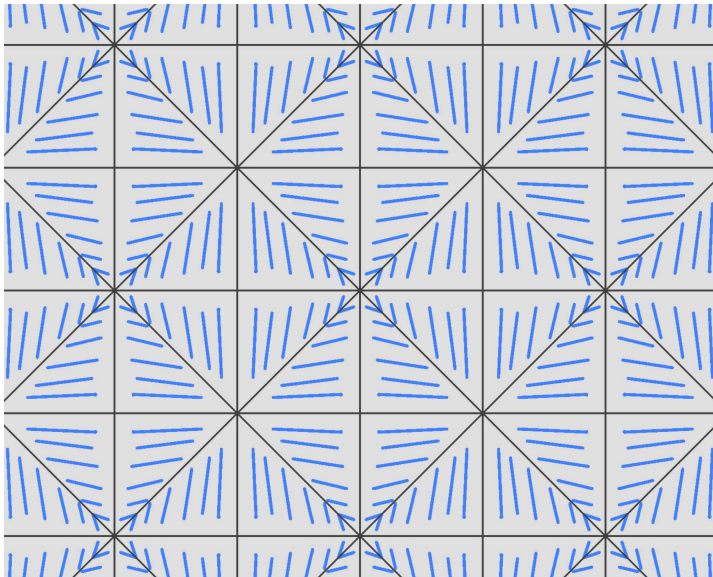
Spiegelungen light

Beispiele



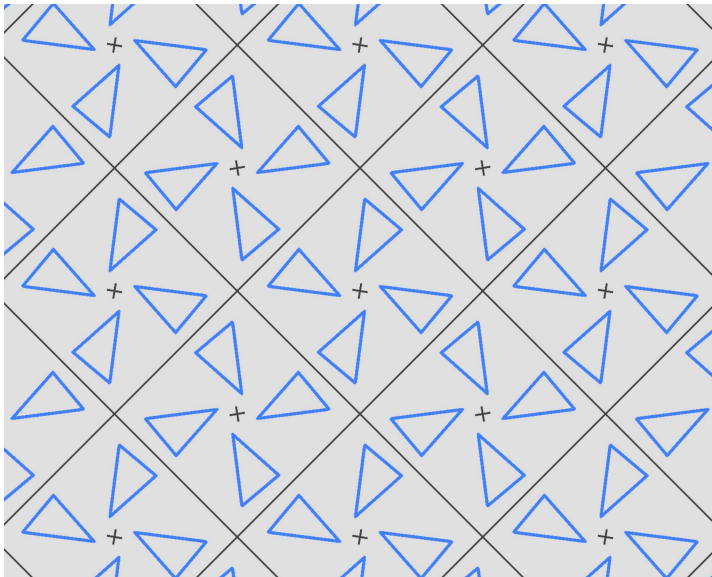
Spiegelungen normal

Beispiele



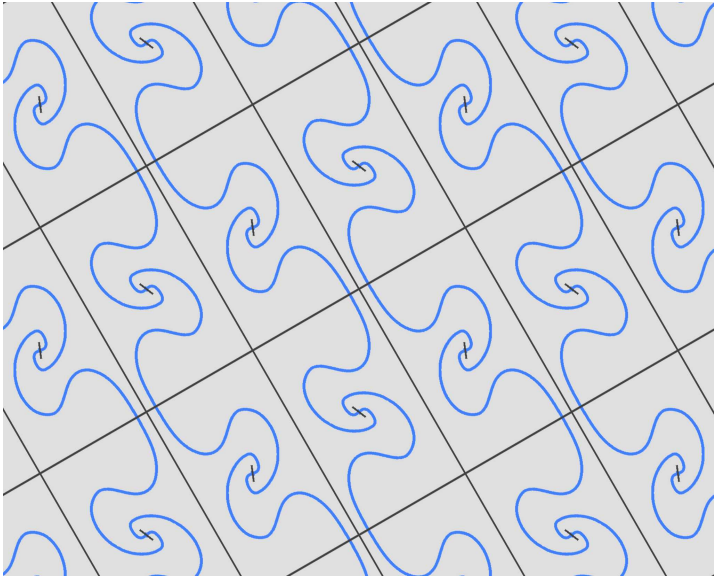
Spiegelungen extra

Beispiele



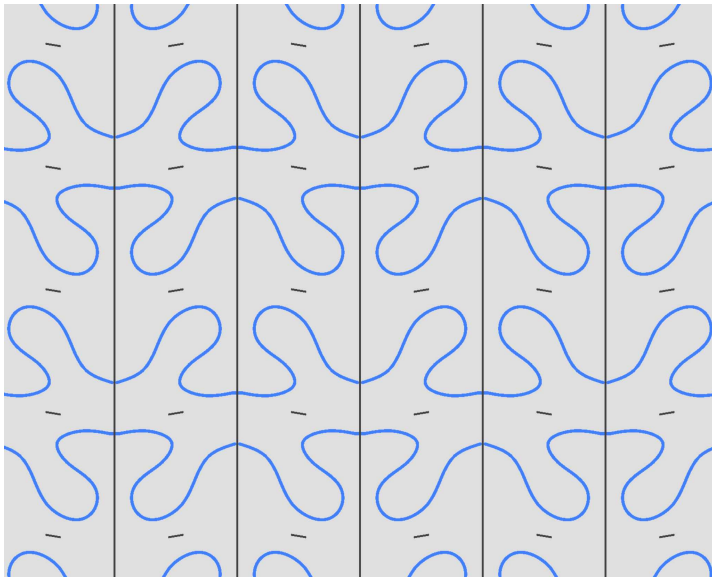
Statt D_4 nur $C_4 \dots$

Beispiele



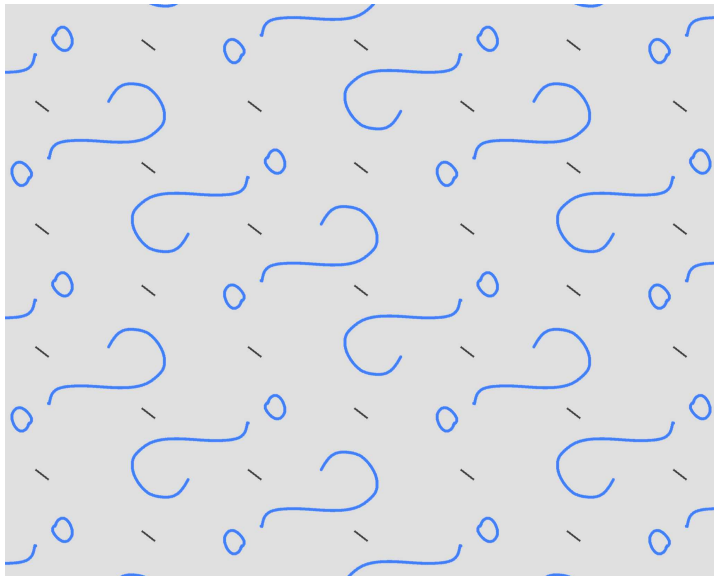
... oder nur C_2

Beispiele



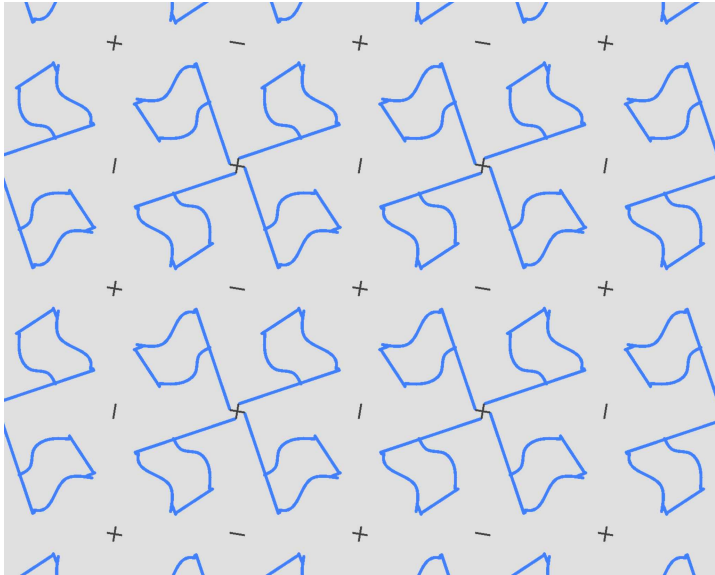
C_2 mit Spiegelungen light

Beispiele



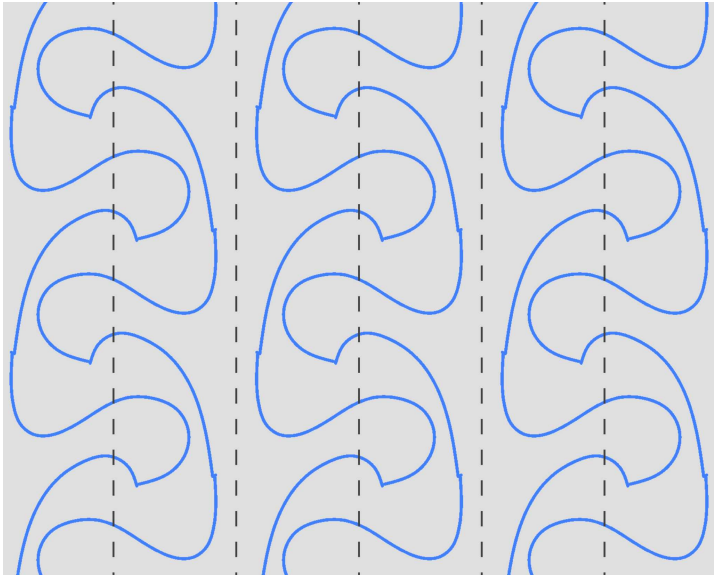
C_2 ohne Spiegelungen

Beispiele



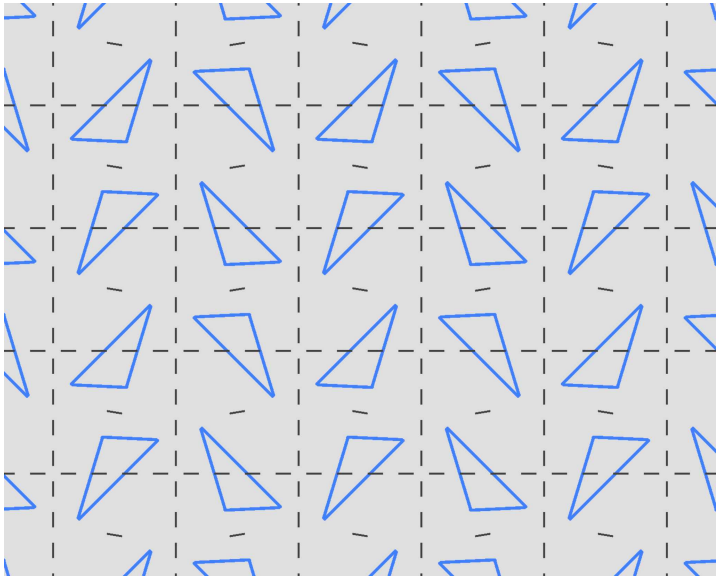
C_4 ohne Spiegelungen

Beispiele



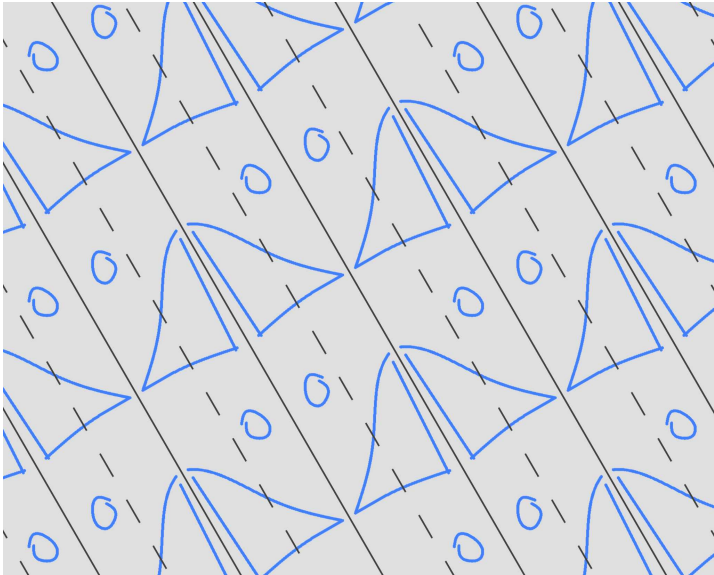
Gleitspiegelungen normal

Beispiele



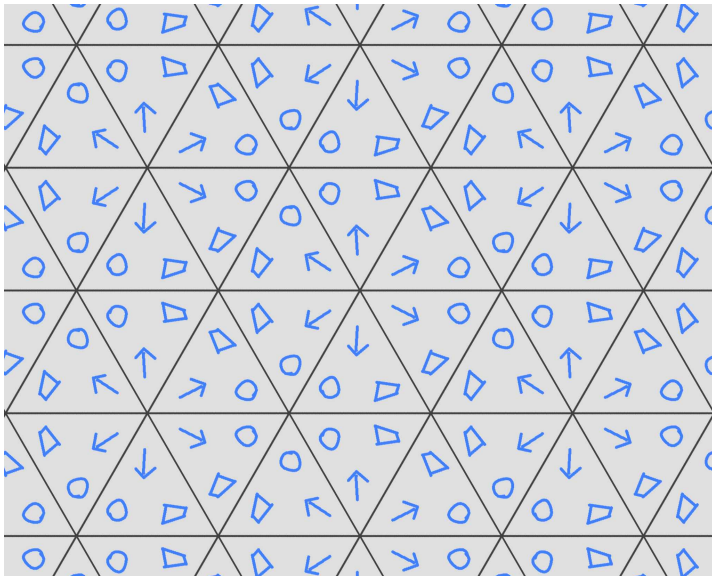
Gleitspiegelungen extra

Beispiele



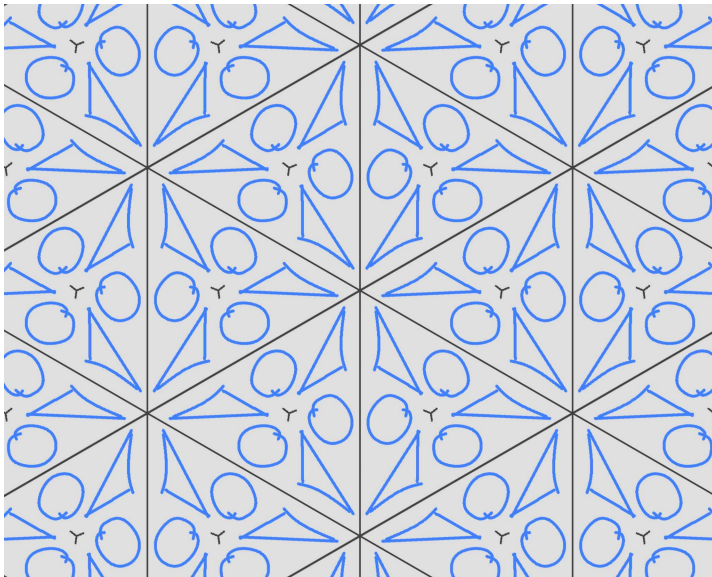
Gleitspiegelungen und Spiegelungen gemischt

Beispiele



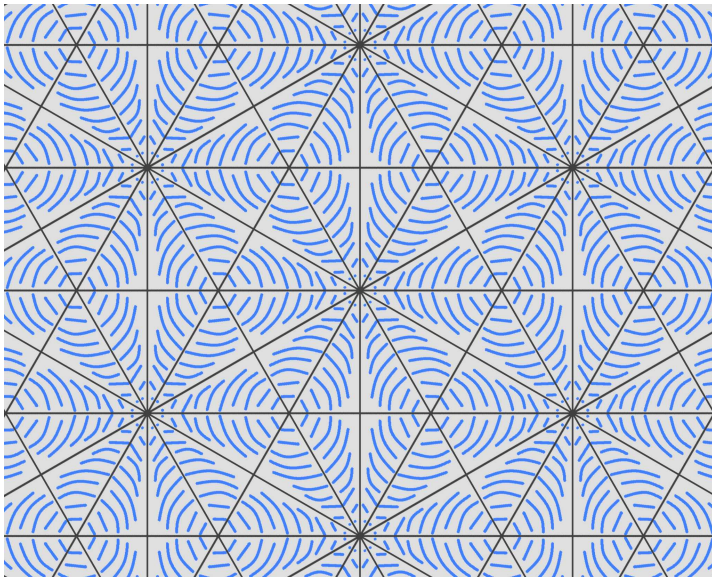
Dreiecke mit Spiegelungen extra (Ordnung 3)

Beispiele



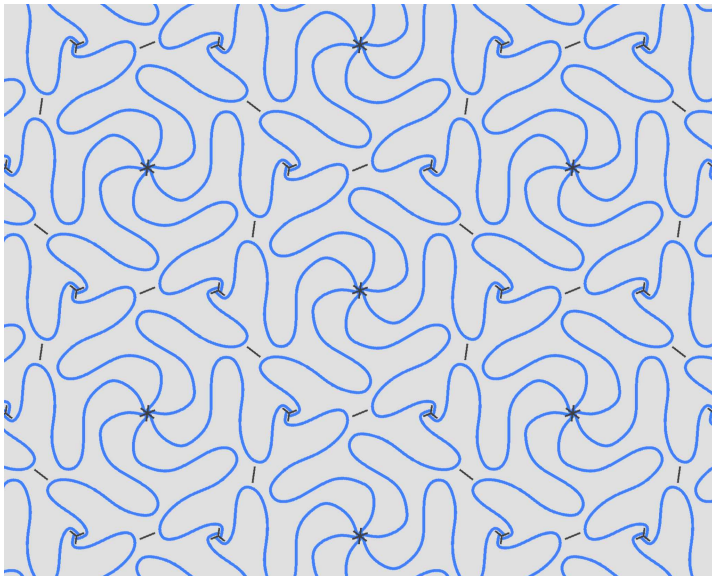
Statt D_3 nur C_3

Beispiele



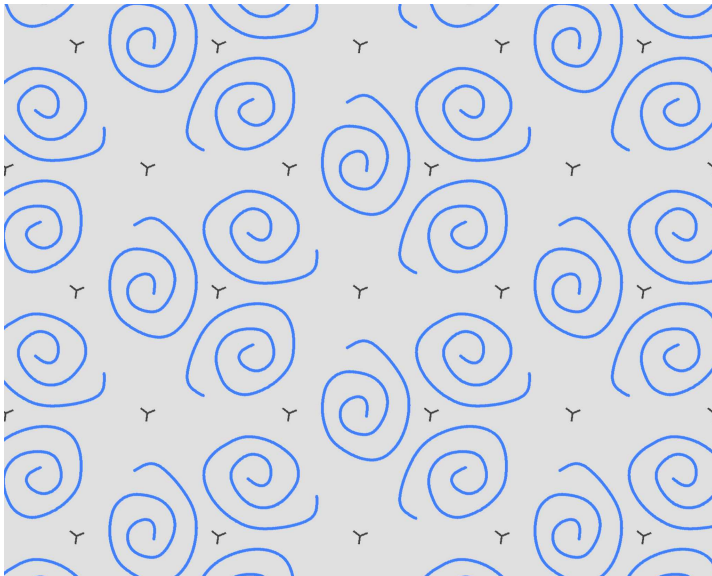
Dreiecke mit Spiegelungen ultra (Ordnung 6)

Beispiele



Statt D_6 und D_2 nur C_6 und C_2

Beispiele



Statt C_6 und C_2 nur C_3 und C_1