Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

Verhältnisse, Ähnlichkeiten

Stefan Witzel

Konstruktionsprobleme: Zahlen und Winkel

Viele Konstruktionsprobleme bestehen im Wesentlichen darin, eine Zahl oder einen Winkel zu konstruieren.

Beispiel. Um ein regelmäßiges n-Eck zu konstruieren, muss man im Wesentlichen einen Winkel $360^\circ/n$ konstruieren:

Zahlen konstruieren? Was soll das heißen? Wozu soll das gut sein?

Ziel: wir wollen ein regelmäßiges Fünfeck konstruieren.

Zahlen

Zahlen kann man Längen kann man

- addieren $a + b$,
- multiplizieren $a \cdot b$,
- subtrahieren $a - b$,
- dividieren a/b ($b \neq 0$).

Es gibt ausgezeichnete Zahlen

- 0 mit $0 + a = a + 0 = a$ und
- 1 mit $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ ($a \neq 0$).

Zahlen

Zahlen kann man

- addieren $a + b$,
- multiplizieren $a \cdot b$,
- subtrahieren $a - b$,
- dividieren a/b ($b \neq 0$).

Es gibt ausgezeichnete Zahlen

- 0 mit $0 + a = a + 0 = a$ und
- 1 mit $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ ($a \neq 0$).

Längenverhältnisse kann man

Zahlen

Zahlen kann man

- addieren $a + b$,
- multiplizieren $a \cdot b$,
- subtrahieren $a - b$,
- dividieren a/b ($b \neq 0$).

Es gibt ausgezeichnete Zahlen

- 0 mit $0 + a = a + 0 = a$ und
- 1 mit $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ ($a \neq 0$).

Längenverhältnisse kann man

$\rightsquigarrow$ Zahlen treten auf als Längenverhältnisse.

Multiplikation geometrisch

Problem. Sei $\overrightarrow{OI}$ ein Strahl und seien $P_1, Q_1, Q_2 \in \overrightarrow{OI}$ Punkte mit $Q_1 \neq O$. Konstruiere den Punkt P_2 mit $|OP_2| = |OP_1|/|OQ_1| \cdot |OQ_2|$.

Multiplikation geometrisch

Problem. Sei $\overrightarrow{OI}$ ein Strahl und seien $P_1, Q_1, Q_2 \in \overrightarrow{OI}$ Punkte mit $Q_1 \neq O$. Konstruiere den Punkt P_2 mit $|OP_2| = |OP_1|/|OQ_1| \cdot |OQ_2|$.

Konstruktion. Sei I' nicht auf OI.
Sei $\{Q_1'\} = O_{Q_1} \cap \overrightarrow{OI'}$ und $\{Q_2'\} = O_{Q_2} \cap \overrightarrow{OI'}$.
Sei $g_1 = Q_1'P_1$ und sei g_2 die Parallele zu g_1 durch Q_2'.
Der Schnittpunkt P_2 von g_2 und $\overrightarrow{OI}$ ist der gesuchte Punkt. $\Diamond$

Multiplikation geometrisch

Problem. Sei $\overrightarrow{OI}$ ein Strahl und seien $P_1, Q_1, Q_2 \in \overrightarrow{OI}$ Punkte mit $Q_1 \neq O$. Konstruiere den Punkt P_2 mit $|OP_2| = |OP_1|/|OQ_1| \cdot |OQ_2|$.

Konstruktion. Sei I' nicht auf OI.
Sei $\{Q_1'\} = O_{Q_1} \cap \overrightarrow{OI'}$ und $\{Q_2'\} = O_{Q_2} \cap \overrightarrow{OI'}$.
Sei $g_1 = Q_1' P_1$ und sei g_2 die Parallele zu g_1 durch Q_2'.
Der Schnittpunkt P_2 von g_2 und $\overrightarrow{OI}$ ist der gesuchte Punkt. $\Diamond$

Beweis. ?!

Multiplikation geometrisch

Problem. Sei $\overrightarrow{OI}$ ein Strahl und seien $P_1, Q_1, Q_2 \in \overrightarrow{OI}$ Punkte mit $Q_1 \neq O$. Konstruiere den Punkt P_2 mit $|OP_2| = |OP_1|/|OQ_1| \cdot |OQ_2|$.

Konstruktion. Sei I' nicht auf OI.
Sei $\{Q_1'\} = O_{Q_1} \cap \overrightarrow{OI'}$ und $\{Q_2'\} = O_{Q_2} \cap \overrightarrow{OI'}$.
Sei $g_1 = Q_1'P_1$ und sei g_2 die Parallele zu g_1 durch Q_2'.
Der Schnittpunkt P_2 von g_2 und $\overrightarrow{OI}$ ist der gesuchte Punkt. $\Diamond$

Beweis. Wir zeigen, dass $|P'P|/|PZ| = |Q'Q|/|QZ|$.
Sei L_P der Lotfußpunkt von P auf h und L_Q der Lotfußpunkt von Q auf g.
Flächeninhalt(ZPQ) $= 1/2 \cdot |ZQ| \cdot |QL_Q| = 1/2 \cdot |ZP| \cdot |PL_P|$
Flächeninhalt(PQQ') $= 1/2 \cdot |QQ'| \cdot |QL_Q|$, Flächeninhalt($PQP'$) $= 1/2 \cdot |PP'| \cdot |PL_P|$.
Flächeninhalt(PQQ') $=$ Flächeninhalt(PQP'): Grundseite PQ, zwischen selben Parallelen.

$$\text{Also} \quad \frac{|PP'| \cdot |PL_P|}{|ZP| \cdot |PL_P|} = \frac{|QQ'| \cdot |QL_Q|}{|ZQ| \cdot |QL_Q|}. \quad [\ldots]$$

Beweis. [...] Wissen $|P'P|/|PZ| = |Q'Q|/|QZ|$.
Es ist $\pm|P'P| \pm |PZ| = |P'Z|$ und $\pm|Q'Q| \pm |QZ| = |Q'Z|$.
Vorzeichen hängen von Reihenfolge von Z, P, P' und Z, Q, Q' ab.
Die Reihenfolge gleiche, weil ℓ und m parallel sind.
Also ist

$$\begin{aligned}\frac{|P'Z|}{|PZ|} &= \pm\frac{|P'P|}{|PZ|} \pm \frac{|PZ|}{|PZ|} = \pm\frac{|P'P|}{|PZ|} \pm 1 \\ &= \pm\frac{|Q'Q|}{|QZ|} \pm 1 = \pm\frac{|Q'Q|}{|QZ|} \pm \frac{|QZ|}{|QZ|} = \frac{|Q'Z|}{|QZ|} \quad \square\end{aligned}$$

Umkehrung

Proposition. Seien g und h Geraden die sich in einem Punkt Z schneiden und seien ℓ und m Geraden, die nicht durch Z gehen und weder zu g noch zu h parallel sind.

Seien $\{P\} = g \cap \ell$, $\{Q\} = g \cap m$, $\{P'\} = h \cap \ell$, $\{Q'\} = h \cap m$. Wenn

$$\frac{|P'Z|}{|PZ|} = \frac{|Q'Z|}{|QZ|}$$

dann sind ℓ und m parallel.

Zusammenhang Längen $\leftrightarrow$ Längenverhältnisse

Wenn wir uns eine feste Länge $|OI|$ als Einheitslänge vorgeben, können wir jede andere Länge darauf beziehen.

Bekommen Entsprechung

$$\text{Länge} \longleftrightarrow \text{Längenverhältnis}$$
$$|AB| \longleftrightarrow \frac{|AB|}{|OI|}.$$

Beispiel. Aus

$$|OP_2| = \frac{|OP_1|}{|OQ_1|} \cdot |OQ_2|$$

wird

$$\frac{|OP_2|}{|OI|} = \frac{|OP_1|}{|OQ_1|} \cdot \frac{|OQ_2|}{|OI|}.$$

Wir nennen unser Einheitssegment häufig $\overline{OI}$ mit O für 0 und I für 1.

2. Strahlensatz

Folgerung (2. Strahlensatz). Seien die Punkte und Geraden wie im 1. Strahlensatz und seien ℓ und m parallel. Dann ist

$$\frac{|PQ|}{|ZP|} = \frac{|P'Q'|}{|ZP'|}.$$

2. Strahlensatz

Folgerung (2. Strahlensatz). Seien die Punkte und Geraden wie im 1. Strahlensatz und seien ℓ und m parallel. Dann ist

$$\frac{|PQ|}{|ZP|} = \frac{|P'Q'|}{|ZP'|}.$$

Beweis. Sei h' Parallele zu h durch P und G Schnittpunkt von h' mit m.
Wir wenden den 1. Strahlensatz mit Zentrum P' an.
Es ist $|ZP|/|ZP'| = |Q'G|/|Q'P'|$.
Da $PQQ'G$ ein Parallelogramm ist, ist $|Q'G| = |PQ|$. $\square$

3. Strahlensatz

Folgerung (3. Strahlensatz). Seien die Punkte und Geraden wie im 1. Strahlensatz und seien ℓ und m parallel. Sei i eine weitere Gerade durch Z, die ℓ und m in Punkten R und R' schneidet. Dann ist

$$\frac{|PQ|}{|PR|} = \frac{|P'Q'|}{|P'R'|}.$$

3. Strahlensatz

Folgerung (3. Strahlensatz). Seien die Punkte und Geraden wie im 1. Strahlensatz und seien ℓ und m parallel. Sei i eine weitere Gerade durch Z, die ℓ und m in Punkten R und R' schneidet. Dann ist

$$\frac{|PQ|}{|PR|} = \frac{|P'Q'|}{|P'R'|}.$$

Beweis. Wir wenden zweimal den 2. Strahlensatz an und erhalten

$$\frac{|PQ|}{|PZ|} = \frac{|P'Q'|}{|P'Z|} \quad \text{und} \quad \frac{|PR|}{|PZ|} = \frac{|P'R'|}{|P'Z|}.$$

Umformen ergibt $|PQ|/|P'Q'| = |PZ|/|P'Z| = |PR|/|P'R'|$. $\square$

Ähnlichkeiten

Erinnerung: Bewegungen erhalten Länge, $|\varphi(P)\varphi(Q)| = |PQ|$.

Zahlen sind Längenverhältnisse. Was erhält Längenverhältnisse?

Eine bijektive Abbildung $\varphi\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ heißt Ähnlichkeit wenn für beliebige vier Punkte P, Q, R, S gilt

$$|PQ| \cdot |\varphi(R)\varphi(S)| = |RS| \cdot |\varphi(P)\varphi(Q)|.$$

Die Gleichung ist äquivalent zu

$$\frac{|PQ|}{|RS|} = \frac{|\varphi(P)\varphi(Q)|}{|\varphi(R)\varphi(S)|} \quad \text{und} \quad \frac{|RS|}{|PQ|} = \frac{|\varphi(R)\varphi(S)|}{|\varphi(P)\varphi(Q)|}$$

wann immer diese definiert sind, Ähnlichkeiten erhalten also Längenverhältnisse.

Zwei Figuren f und f' heißen *ähnlich*, geschrieben $f \sim f'$, wenn es eine Ähnlichkeit φ gibt, die f auf f' abbildet: $\varphi(f) = f'$.

Ähnlichkeiten bilden Gruppe

Proposition. Die Komposition von zwei Ähnlichkeiten ist eine Ähnlichkeit. Die Inverse einer Ähnlichkeit ist eine Ähnlichkeit.

Beweis. Seien $P \neq Q$ und $R \neq S$ Punkte. Wenn φ und ψ Ähnlichkeiten sind ist

$$\frac{|\psi(\varphi(P))\psi(\varphi(Q))|}{|\psi(\varphi(R))\psi(\varphi(S))|} = \frac{|\varphi(P)\varphi(Q)|}{|\varphi(R)\varphi(S)|} = \frac{|PQ|}{|RS|}$$

also ist $\psi \circ \varphi$ eine Ähnlichkeit.

Wenn φ eine Ähnlichkeit ist, wenden wir die definierende Gleichung auf die Punkte $\varphi^{-1}(P)$, $\varphi^{-1}(Q)$, $\varphi^{-1}(R)$ und $\varphi^{-1}(S)$ an und erhalten

$$\frac{|PQ|}{|RS|} = \frac{|\varphi(\varphi^{-1}(P))\varphi(\varphi^{-1}(Q))|}{|\varphi(\varphi^{-1}(R))\varphi(\varphi^{-1}(S))|} = \frac{|\varphi^{-1}(P)\varphi^{-1}(Q)|}{|\varphi^{-1}(R)\varphi^{-1}(S)|}$$

also ist φ^{-1} eine Ähnlichkeit. $\square$

Folgerung. Die Menge der Ähnlichkeiten ist eine Gruppe.

Streckungen

Sei Z ein Punkt und $P, Q \neq Z$.

Die bijektive Abbildung $\varphi\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ die jeden Strahl ab M invariant lässt und für jedes $R \neq Z$

$$\frac{|Z\varphi(R)|}{|ZR|} = \frac{|ZQ|}{|ZP|}$$

erfüllt ist die *Streckung* mit *Zentrum* Z und *Streckungsfaktor* $|ZQ|/|ZP|$.

Proposition. Streckungen sind Ähnlichkeiten.

Beweis. Sei α die Streckung mit Mittelpunkt Z und Streckungsfaktor $x = |ZQ|/|ZP|$. Seien R und S beliebige Punkte.

Müssen zeigen: $|\alpha(R)\alpha(S)|/|RS| = x$ ist.

Nach Definition von Streckungen ist $|Z\alpha(R)|/|ZR| = x = |Z\alpha(S)|/|ZS|$.

Aus der Umkehrung des Strahlensatzes folgt, dass RS und $\alpha(R)\alpha(S)$ parallel sind.

Aus dem 2. Strahlensatz folgt, dass $|\alpha(R)\alpha(S)|/|Z\alpha(R)| = |RS|/|ZR|$.
Umformen ergibt $|\alpha(R)\alpha(S)|/|RS| = |Z\alpha(R)|/|ZR| = x$. $\square$

Ähnlichkeit = Bewegung ∘ Streckung

Proposition. Jede Ähnlichkeit φ kann geschrieben werden als Komposition $\varphi = \iota \circ \alpha$ einer Streckung α und einer Bewegung ι.

Das Zentrum der Streckung kann dabei beliebig gewählt werden.

Beweis. Sei M ein beliebiger Punkt. Sei $P \neq M$ beliebig und sei $Q \in \overrightarrow{MP}$ der Punkt mit $|MQ| = |\varphi(M)\varphi(P)|$.

Sei α die Streckung mit Zentrum M, die P auf Q abbildet.

Für Punkte $A \neq B$ und $C \neq D$ gilt dann

$$\frac{|\varphi(A)\varphi(B)|}{|AB|} = \frac{|\varphi(M)\varphi(P)|}{|MP|} = \frac{|MQ|}{|MP|} = \frac{|\alpha(C)\alpha(D)|}{|CD|}. \tag{1}$$

Wir definieren $\iota := \alpha^{-1} \circ \varphi$, so dass gilt $\varphi = \alpha \circ \iota$. Wenn wir in (1) $C = \iota(A))$ und $D = \iota(B))$ setzen, erhalten wir

$$\frac{|\varphi(A)\varphi(B)|}{|AB|} = \frac{|\alpha(\alpha^{-1}(\varphi(A)))\alpha(\alpha^{-1}(\varphi(B)))|}{|\iota(A)\iota(B)|} = \frac{|\varphi(A)\varphi(B)|}{|\iota(A)\iota(B)|}.$$

Umformen ergibt, dass $|\iota(A)\iota(B)| = |AB|$. Also ist ι eine Bewegung. $\square$

Winkel invariant unter Ähnlichkeiten

Folgerung. Ähnliche Winkel sind kongruent: Wenn $\angle(s, t)$ ein Winkel ist und α eine Ähnlichkeit, dann ist $\angle(s, t) \equiv \angle(\alpha(s), \alpha(t))$.

Beweis. Sei Z der Scheitel von $\angle(s, t)$. Mit der letzte Proposition schreiben wir α als Komposition einer Streckung mit Zentrum Z und einer Bewegung. Die Streckung bildet $\angle(s, t)$ auf sich selbst ab und die Bewegung auf einen kongruenten Winkel. $\square$

Kein Kongruenzsatz „WWW“?!

Wir haben nie einen Kongruenzsatz „WWW“ gezeigt.

Winkel zu erhalten heißt nicht, Längen zu erhalten…

Ähnlichkeitssatz

Satz (Ähnlichkeitssatz „WWW“). Wenn PQR und $P'Q'R'$ Dreiecke sind mit $\angle RPQ = \angle R'P'Q'$, $\angle PQR \equiv \angle P'Q'R'$ und $\angle QRP \equiv \angle Q'R'P'$, dann ist $PQR \sim P'Q'R'$.

Ähnlichkeitssatz

Satz (Ähnlichkeitssatz „WWW“). Wenn PQR und $P'Q'R'$ Dreiecke sind mit $\angle RPQ = \angle R'P'Q'$, $\angle PQR \equiv \angle P'Q'R'$ und $\angle QRP \equiv \angle Q'R'P'$, dann ist $PQR \sim P'Q'R'$.

Beweis. Sei ι die Bewegung, die $\angle RPQ$ auf $\angle R'P'Q'$ abbildet.
Wir ersetzen PQR durch sein Bild unter ι und können also annehmen, dass $\angle RPQ = \angle R'P'Q'$ ist.
Da die beiden innen liegenden Winkel $\angle PQR$ und $\angle P'Q'R'$ kongruent sind, folgt dass QR und $Q'R'$ parallel sind.
Mit dem Strahlensatz folgt

$$\frac{|P'R'|}{|PR|} = \frac{|P'Q'|}{|PQ|}.$$

Ist also α die Streckung mit Zentrum P und Streckungsfaktor $|P'R'|/|PR|$, dann ist $\alpha(PQR) = P'Q'R'$. $\square$

Seitenverhältnisse und Winkel

Proposition. Seien PQR und $P'Q'R'$ gleichschenklige Dreiecke mit $|PQ| = |QR|$ und $|P'Q'| = |Q'R'|$.

Es ist $\sphericalangle PQR \equiv \sphericalangle P'Q'R'$ genau dann, wenn $\sphericalangle PQ/\sphericalangle PR = \sphericalangle P'Q'/\sphericalangle P'R'$.

Seitenverhältnisse und Winkel

Proposition. Seien PQR und $P'Q'R'$ gleichschenklige Dreiecke mit $|PQ| = |QR|$ und $|P'Q'| = |Q'R'|$.

Es ist $\sphericalangle PQR \equiv \sphericalangle P'Q'R'$ genau dann, wenn $\sphericalangle PQ / \sphericalangle PR = \sphericalangle P'Q' / \sphericalangle P'R'$.

Beweis. Wenn die Bedingung an die Winkel erfüllt ist, folgt aus der Gleichschenkligkeit und der Winkelsumme im Dreieck , dass alle Winkel paarweise kongruent sind. Aus dem Ähnlichkeitssatz folgt, dass die Dreiecke ähnlich sind, also sind insbesondere die Seitenverhältnisse gleich.
Sind umgekehrt die Seitenverhältnisse gleich, sind die Dreiecke nach einer zentrischen Streckung kongruent und haben damit gleiche Winkel. $\square$

Winkel und Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck

Sei PQR ein rechtwinkliges Dreieck mit $\angle PQR = \alpha$ und $\angle QRP = 90^\circ$.

Hypothenuse	$\overline{PQ}$
Ankathete	$\overline{QR}$
Gegenkathete	$\overline{PR}$
Sinus	$\sin\alpha = \dfrac{\lvert PR\rvert}{\lvert PQ\rvert} = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$
Kosinus	$\cos\alpha = \dfrac{\lvert QR\rvert}{\lvert PQ\rvert} = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$
Tangens	$\tan\alpha = \dfrac{\lvert PR\rvert}{\lvert QR\rvert} = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$

Helfen uns, den Zusammenhang zwischen Winkeln und Längenverhältnissen zu *beschreiben* und *berechnen*, aber nicht zu *konstruieren*.

Rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke

Sei PQR gleichschenklig, $|PQ| = |QR|$.

Kann in zwei kongruente, rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden.

Also ist

$$\frac{|PR|}{|PQ|} = 2\sin\left(\frac{\angle PQR}{2}\right) = 2\cos\angle RPQ.$$