Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

Konstruktion von Zahlen

Stefan Witzel

Rechnen durch Konstruktion

Wir haben gesehen, wie man mit Konstruktionen Rechnungen durchführen kann.

Hier gehen wir diese Konstrukionen noch einmal systematisch durch.

Dazu betrachten wir eine Gerade durch zwei Punkte O und I.

Wir stellen uns die Gerade als Zahlengerade vor und die Punkte O und I als 0 und 1.

Plan:

- Übersetze beliebige Länge $|PQ|$ in Länge $|OA|$ mit $A \in \overrightarrow{OI}$.
- Überzetze beliebiges Verhältnis in $|OA|/|OI|$ mit $A \in \overrightarrow{OI}$.
- „Rechne“ mit Verhältnissen $|OA|/|OI|$.

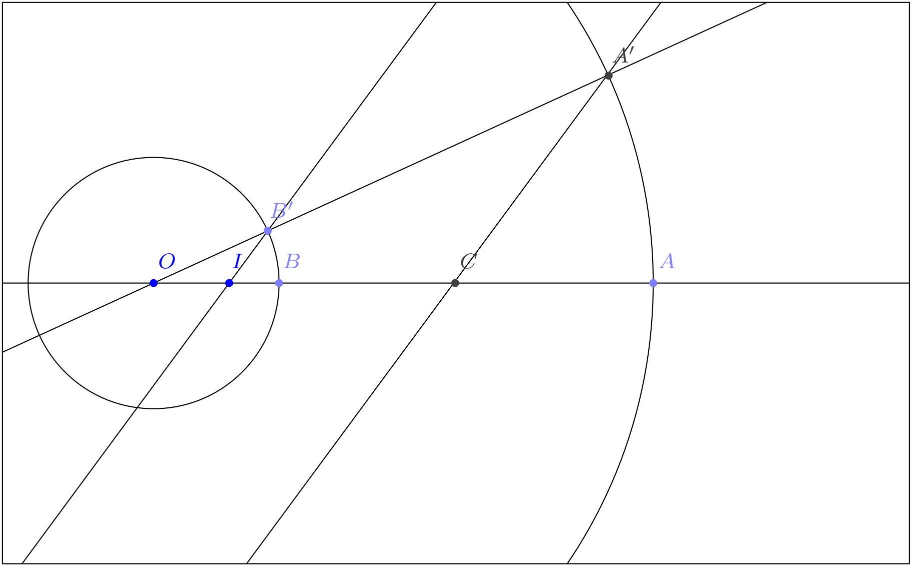
1. Reduktion: Segment auf $|OI|$

Problem. Gegeben Punkte P und Q, konstruiere $A \in \overrightarrow{OI}$ mit $|OA| = |PQ|$.

Konstruktion. Es ist $\{A\} = O_{PQ} \cap \overrightarrow{OI}$. $\Diamond$

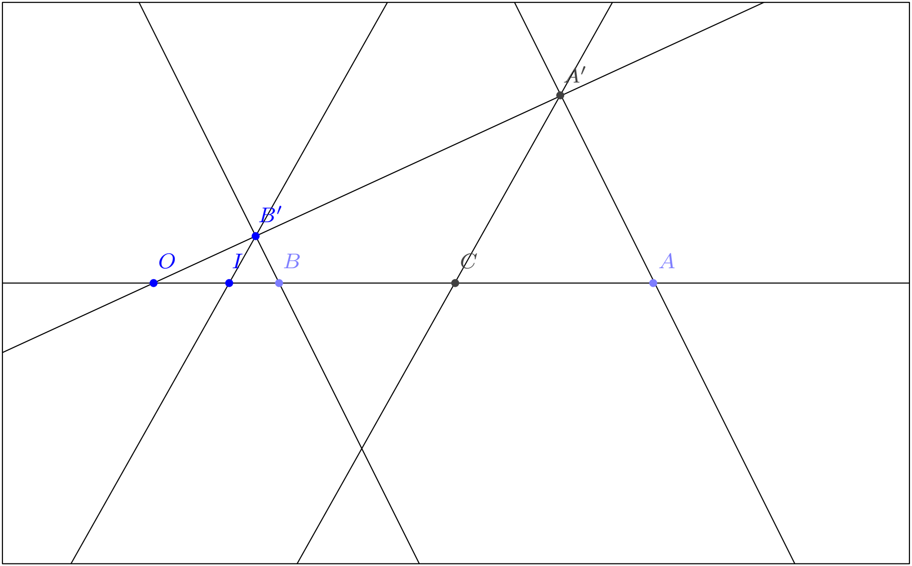
2. Reduktion: Verhältnis auf $|OI|$ beziehen

Problem. Gegeben Punkte $A, B \in \overrightarrow{OI}$ mit $B \neq O$ konstruiere $C \in \overrightarrow{OI}$ mit $|OC|/|OI| = |OA|/|OB|$.



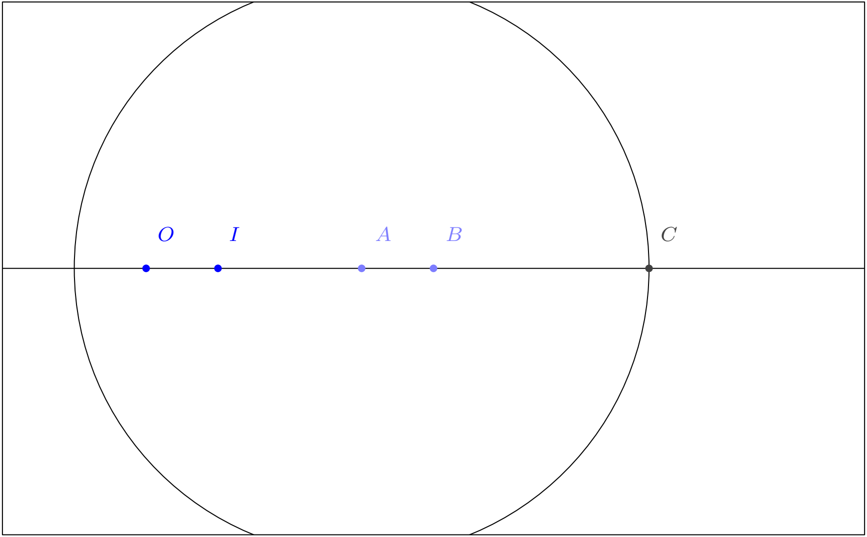
2. Reduktion: Verhältnis auf $|OI|$ beziehen

Problem. Gegeben Punkte $A, B \in \overrightarrow{OI}$ mit $B \neq O$ konstruiere $C \in \overrightarrow{OI}$ mit $|OC|/|OI| = |OA|/|OB|$.



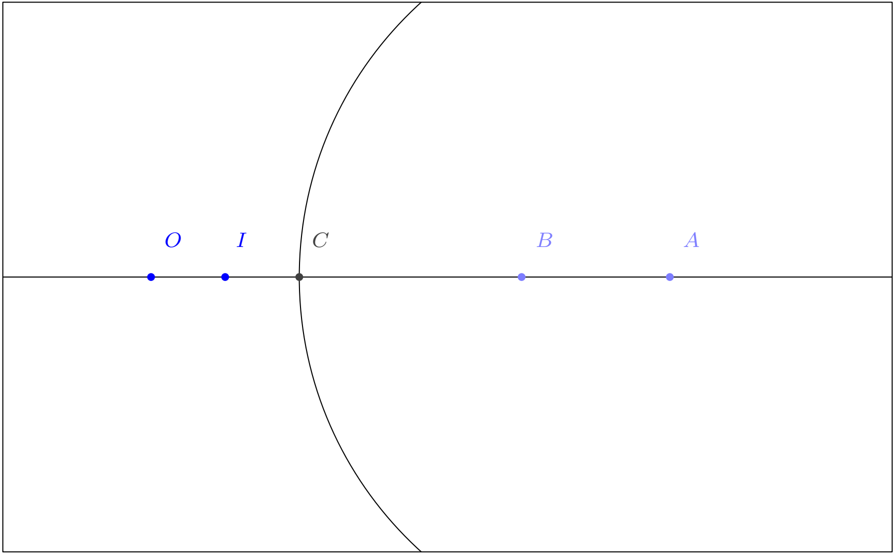
Addition

Problem. Gegeben Punkte $A, B \in \overrightarrow{OI}$ konstruiere $C \in \overrightarrow{OI}$ mit
$\frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OA|}{|OI|} + \frac{|OB|}{|OI|}$.



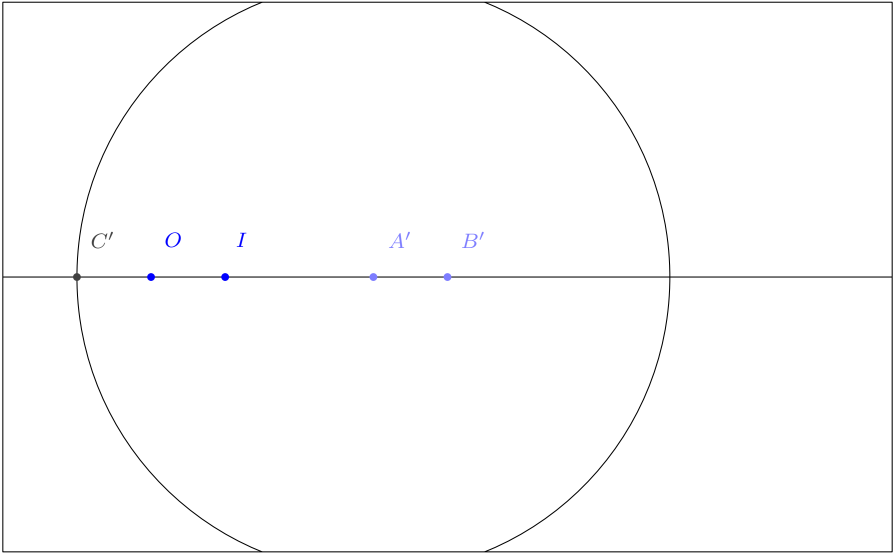
Subtraktion

Problem. Gegeben Punkte $A, B \in \overrightarrow{OI}$ mit $B \in \overline{OA}$ konstruiere $C \in \overrightarrow{OI}$ mit $\frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OA|}{|OI|} - \frac{|OB|}{|OI|}$.



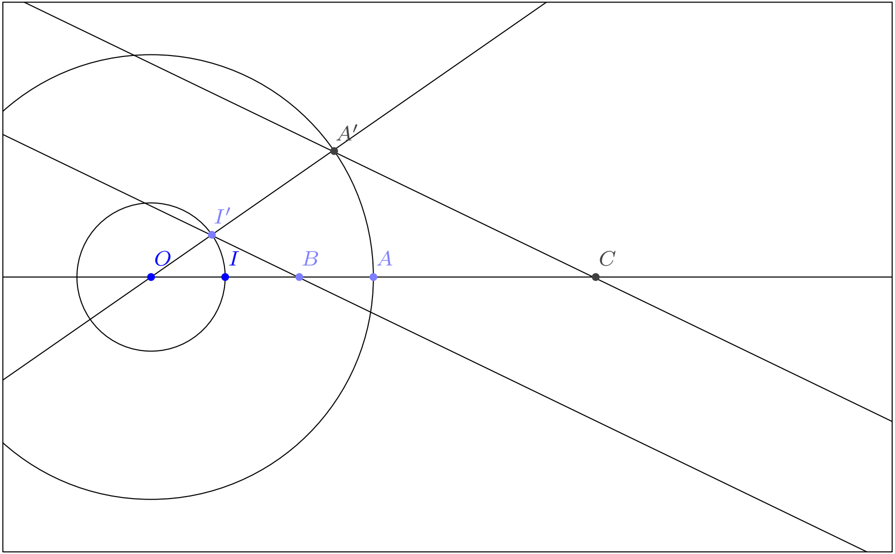
Subtraktion

Problem. Gegeben Punkte $A, B \in \overrightarrow{OI}$ mit $B \in \overline{OA}$ konstruiere $C \in \overrightarrow{OI}$ mit $\frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OA|}{|OI|} - \frac{|OB|}{|OI|}$.



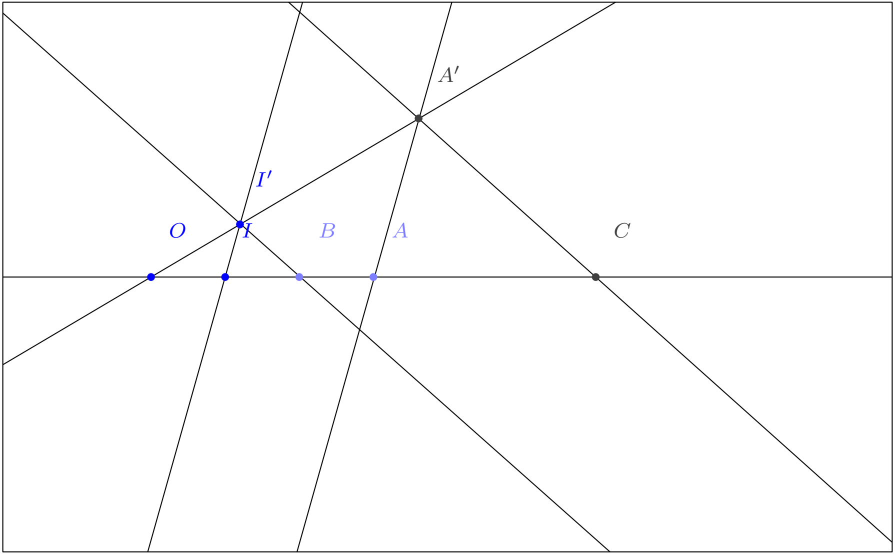
Multiplikation

Problem. Gegeben Punkte $A, B \in \overrightarrow{OI}$ konstruiere $C \in \overrightarrow{OI}$ mit $\frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OA|}{|OI|} \cdot \frac{|OB|}{|OI|}$.



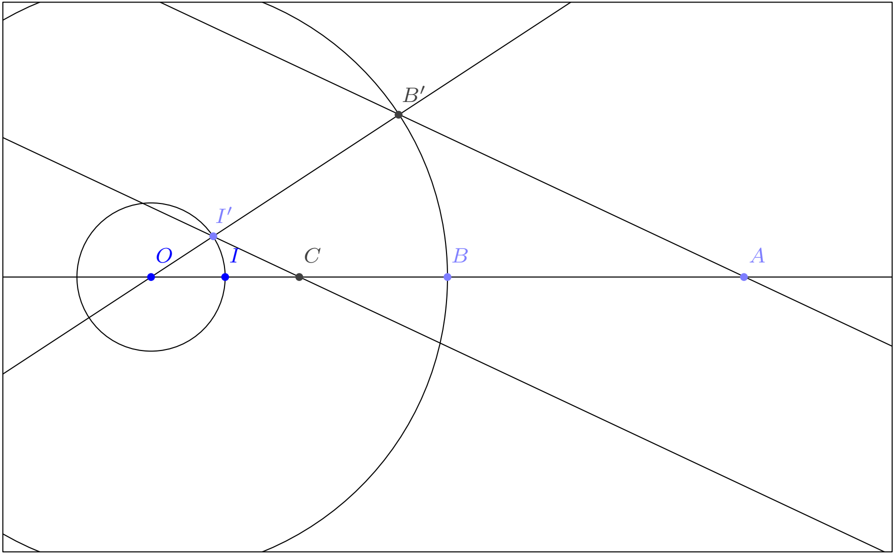
Multiplikation

Problem. Gegeben Punkte $A, B \in \overrightarrow{OI}$ konstruiere $C \in \overrightarrow{OI}$ mit $\frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OA|}{|OI|} \cdot \frac{|OB|}{|OI|}$.



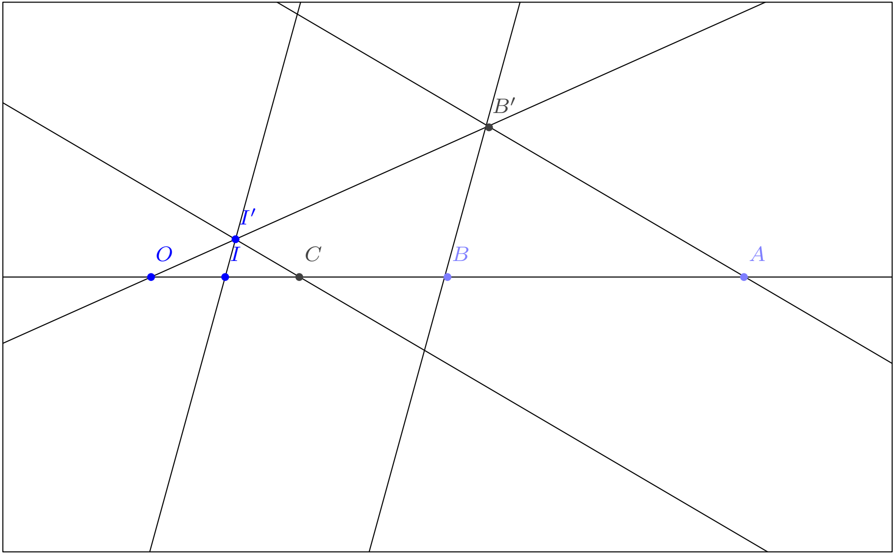
Division

Problem. Gegeben Punkte $A, B \in \overrightarrow{OI}$ mit $B \neq O$ konstruiere C mit $\frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OA|}{|OI|} \cdot \frac{|OI|}{|OB|}$.



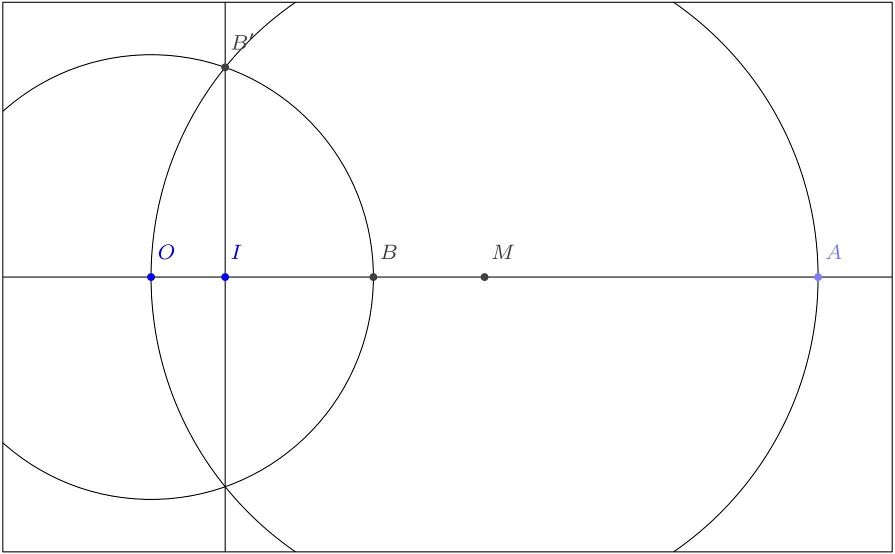
Division

Problem. Gegeben Punkte $A, B \in \overrightarrow{OI}$ mit $B \neq O$ konstruiere C mit $\frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OA|}{|OI|} \cdot \frac{|OI|}{|OB|}$.



Wurzel

Problem (Wurzeln). Gegeben Punkte $A \in \overrightarrow{OI}$, konstruiere $B \in \overrightarrow{OI}$ mit $\frac{|OB|}{|OI|} = \sqrt{\frac{|OA|}{|OI|}}$.



Wurzel

Problem (Wurzeln). Gegeben Punkte $A \in \overrightarrow{OI}$, konstruiere $B \in \overrightarrow{OI}$ mit $\frac{|OB|}{|OI|} = \sqrt{\frac{|OA|}{|OI|}}$.

Konstruktion. Sei M der Mittelpunkt von $\overline{OA}$. Sei $k = M_A$. Sei g das die Senkrechte zu OI durch I. Sei B' der Schnittpunkt von k und g. Der Schnittpunkt B von $O_{B'}$ und $\overrightarrow{OI}$ ist der gesuchte Punkt. $\Diamond$

Beweis. Da M der Mittelpunkt von $\overline{OA}$ ist, geht k durch O. Das Dreieck $OB'A$ ist also nach dem Satz des Thales rechtwinklig. Aus dem Kathetensatz folgt $|OB'|^2 = |OA| \cdot |OI|$. Teilen durch $|OI|^2$ ergibt $(|OB|/|OI|)^2 = |OA|/|OI|$. $\square$

Konstruierbare Zahlen

Satz. Jede Zahl, die man (aus 0 und 1) durch die Grundrechenarten und Wurzelziehen erhalten kann lässt sich mit Zirkel und Lineal konstruieren.

Umgekehrt lässt sich jede Zahl, die man mit Zirkel und Lineal konstruieren kann durch die Grundrechenarten und Wurzelziehen erhalten.

Die erste Aussage folgt aus dem gesagten.
Die zweite Aussage wird mit sogenannter „Galois-Theorie“ bewiesen.

Konstruierbare Zahlen

Satz. Jede Zahl, die man (aus 0 und 1) durch die Grundrechenarten und Wurzelziehen erhalten kann lässt sich mit Zirkel und Lineal konstruieren.

Umgekehrt lässt sich jede Zahl, die man mit Zirkel und Lineal konstruieren kann durch die Grundrechenarten und Wurzelziehen erhalten.

Folgerung. Ein regelmäßiges n-Eck kann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden genau dann, wenn man $\sin(180^\circ/n)$ durch die Grundrechenarten und Wurzelziehen erhalten kann.

Beweis. Ein regelmäßiges n-Eck ist konstruierbar genau dann, wenn ein Winkel von $360^\circ/n$ konstruierbar ist genau dann, wenn das Verhältnis $\sin(180^\circ/n)$ konstruierbar ist. $\square$

Konstruierbare Zahlen

Satz. Jede Zahl, die man (aus 0 und 1) durch die Grundrechenarten und Wurzelziehen erhalten kann lässt sich mit Zirkel und Lineal konstruieren.

Umgekehrt lässt sich jede Zahl, die man mit Zirkel und Lineal konstruieren kann durch die Grundrechenarten und Wurzelziehen erhalten.

Folgerung. Ein regelmäßiges n-Eck kann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden genau dann, wenn man $\sin(180^\circ/n)$ durch die Grundrechenarten und Wurzelziehen erhalten kann.

Beispiel. Ein regelmäßiges 17-Eck ist konstruierbar weil

$$\sin\left(\frac{180^\circ}{17}\right) = \frac{1}{8}\sqrt{2}\sqrt{\bar{\varepsilon}^2 - \sqrt{2}(\alpha + \bar{\varepsilon})}$$

mit

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{17 + \sqrt{17}} \\ \bar{\varepsilon} &= \sqrt{17 - \sqrt{17}} \\ \alpha &= \sqrt{34 + 6\sqrt{17} + 2\sqrt{2}(\sqrt{17} - 1)\bar{\varepsilon} - 8\sqrt{2}\varepsilon}. \end{aligned}$$

Konstruierbare n-Ecke und Fermat-Primzahlen

Eine Fermat-Primzahl ist eine Primzahl der Form $2^{2^n}+1$. Zum Beispiel

n	0	1	2	3	4
2^n	1	2	4	8	16
$2^{2^n}+1$	3	5	17	257	65537

Satz (Gauß). Ein regelmäßiges n-Eck ist konstruierbar genau dann, wenn $n = 2^k \cdot p_1 \cdots p_\ell$ ist, wobei die p_i Fermat-Primzahlen sind.

Also ist ein regelmäßiges n-Eck konstruierbar wenn

$$n = 2^k \cdot 3^{\varepsilon_3} \cdot 5^{\epsilon_5} \cdot 17^{\epsilon_{17}} \cdot 257^{\epsilon_{257}} \cdot 65537^{\epsilon_{65537}}$$

mit $k \geq 0$ und $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$.

Es ist nicht bekannt, ob es außer den obigen Beispielen noch weitere Fermat-Primzahlen gibt.