Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

Geraden am Kreis

Stefan Witzel

Segmente und Geraden am Kreis

Sei k ein Kreis.

Eine *Sekante* ist eine Gerade, die k in zwei Punkten schneidet.

Eine *Tangente* ist eine Gerade, die k in einem Punkt schneidet.

Eine *Sehne* ist ein Segment $\overline{PQ}$ mit $P, Q \in k$.

Ein *Durchmesser* ist eine Sehne, die den Mittelpunkt von k enthält.

Kreis durch drei Punkte

Proposition. Durch drei nicht kollineare Punkte P, Q und R geht genau ein Kreis.

Kreis durch drei Punkte

Proposition. Durch drei nicht kollineare Punkte P, Q und R geht genau ein Kreis.

Beweis. Die Menge der Punkte L, die gleichen Abstand von P und Q haben die Mittelsenkrechte ℓ.
Die die Menge der Punkte N, die gleichen Abstand von Q und R haben die Mittelsenkrechte n.
Die Menge der Punkte, die gleichen Abstand von P, Q und R haben, ist also der Schnittpunkt von ℓ und n.
Er existiert weil PQ und QR nicht parallel sind und somit auch ℓ und n nicht parallel sind. $\square$

Kreis durch drei Punkte

Proposition. Durch drei nicht kollineare Punkte P, Q und R geht genau ein Kreis.

Der *Umkreis* eines Dreiecks PQR ist ein Kreis, der jeden der Punkte P, Q und R enthält.

Folgerung. Jedes Dreieck hat einen (eindeutigen) Umkreis. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.

Beweis. Der Kreis in der Proposition ist offensichtlich der Umkreis. Der Mittelpunkt wurde konstruiert als der Schnittpunkt zweier beliebiger Mittelsenkrechter. Da der Kreis eindeutig ist, geht die dritte Mittelsenkrechte ebenso durch den Punkt. $\square$

Abstand von Geraden

Wenn P ein Punkt ist und g eine Gerade, ist der *Abstand* zwischen P und g den kleinsten Abstand zwischen P und einem Punkt Q auf g.

Dieser Punkt Q ist eindeutig: der Fußpunkt des Lots von P auf g.

Insbesondere ist P_Q der eindeutige Kreis, der die Gerade g nur in einem Punkt trifft.

Gleicher Abstand von Geraden

Proposition. Sei $\angle PQR$ ein Winkel und ℓ die Winkelhalbierende. Ein Punkt N liegt auf ℓ genau dann, wenn er gleichen Abstand zu PQ wie zu QR hat.

Gleicher Abstand von Geraden

Proposition. Sei $\angle PQR$ ein Winkel und ℓ die Winkelhalbierende. Ein Punkt N liegt auf ℓ genau dann, wenn er gleichen Abstand zu PQ wie zu QR hat.

Beweis. Sei σ die Spiegelung an ℓ.
Sie vertauscht die Strahlen $\overrightarrow{QP}$ und $\overrightarrow{QR}$.
Wenn N auf ℓ liegt, ist $\sigma(N) = N$ also vertauscht σ die Lotfußpunkte von N auf QP und auf QR.
Damit hat N den gleichen Abstand zu QP und QR.
[...]

Gleicher Abstand von Geraden

Proposition. Sei $\angle PQR$ ein Winkel und ℓ die Winkelhalbierende. Ein Punkt N liegt auf ℓ genau dann, wenn er gleichen Abstand zu PQ wie zu QR hat.

Beweis. [...]
Umgekehrt, angenommen N hat gleichen Abstand zu QP wie zu QR.
Seien P' und R' die entsprechenden Lotfußpunkte.
Dann sind $P'NQ$ und $R'NQ$ rechtwinklige Dreiecke mit zwei gleich langen Seiten.
Aus dem Satz des Pythagoras folgt, dass auch die dritten Seiten gleich lang sein müssen: $|P'Q| = |R'Q|$.
Der Punkt N hat also gleichen Abstand von zwei Punkten auf QP und QR die gleichen Abstand von Q haben.
Damit liegt N auf ℓ. □

Inkreis

Der *Inkreis* eines Dreiecks PQR ist der Kreis, der jede Seite in genau einem Punkt trifft.

Proposition. Ein Dreieck PQR hat einen eindeutigen Inkreis. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.

Inkreis

Der *Inkreis* eines Dreiecks PQR ist der Kreis, der jede Seite in genau einem Punkt trifft.

Proposition. Ein Dreieck PQR hat einen eindeutigen Inkreis. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.

Beweis. Sei ℓ die Winkelhalbierende von $\angle PQR$ und m die Winkelhalbierende von $\angle RPQ$.
Sei M der Schnittpunkt von ℓ und m.
Sei A der Lotfußpunkt von M auf PQ, B der Lotfußpunkt auf QR und C der Lotfußpunkt auf RP.
Nach der letzten Proposition ist $M_A = M_B$ und trifft PQ und QR jeweils nur in einem Punkt.
Außerdem ist $M_B = M_C$ und trifft RP nur in einem Punkt.
[. . .]

Inkreis

Der *Inkreis* eines Dreiecks PQR ist der Kreis, der jede Seite in genau einem Punkt trifft.

Proposition. Ein Dreieck PQR hat einen eindeutigen Inkreis. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.

Beweis. [...]
Da der gesamte Kreis $M_A = M_B = M_C$ im Halbraum von PQ liegt, der R enthält, liegt insbesondere B auf dem Strahl $\overrightarrow{QR}$.
Aus ähnlichen Gründen liegt B auf dem Strahl $\overrightarrow{RQ}$ und damit in $\overline{QR}$.
Analoge Argumente zeigen, dass $A \in \overline{PQ}$ und $C \in \overline{RP}$. $\square$

Zentriwinkelsatz

In den Übungsaufgaben haben Sie bewiesen:

Proposition (Zentriwinkelsatz). Wenn P und Q Punkte auf einem Kreis k sind und $R \in k$ im gleichen Halbraum von PQ liegt wie der Mittelpunkt M von k, dann ist der (Zentri-)Mittelpunktswinkel $\angle PMQ$ doppelt so groß wie der Peripheriewinkel $\angle PRQ$.

Zentriwinkelsatz

In den Übungsaufgaben haben Sie bewiesen:

Proposition (Zentriwinkelsatz). Wenn P und Q Punkte auf einem Kreis k sind und $R \in k$ im gleichen Halbraum von PQ liegt wie der Mittelpunkt M von k, dann ist der (Zentri-)Mittelpunktswinkel $\angle PMQ$ doppelt so groß wie der Peripheriewinkel $\angle PRQ$.

Folgerung (Satz des Thales). Wenn zwei Punkte P und R auf einem Kreis k gegenüberliegen, ist für jeden Punkt $Q \in k$ der Winkel $\angle PQR$ ein rechter.

Sehnenviereck

Proposition. Ist k ein Kreis und $PQRS$ ein Viereck dessen Punkte auf k liegen (ein Sehnenviereck), dann ist $\angle SPQ + \angle QRS = 180^\circ$.

Sehnenviereck

Proposition. Ist k ein Kreis und $PQRS$ ein Viereck dessen Punkte auf k liegen (ein Sehnenviereck), dann ist $\angle SPQ + \angle QRS = 180°$.

Beweis. Nach eventueller Umbenennung können wir annehmen, dass R auf der gleichen Seite von SQ liegt wie der Mittelpunkt M des Kreises. Insbesondere sind nach dem Zentriwinkelsatz die Peripheriewinkel $\angle PQS$ und $\angle PRS$ gleich groß, ebenso wie die Winkel $\angle QSP$ und $\angle QRP$. Nun ist aber $\angle QRP + \angle PRS = \angle QRS$ und $\angle PQS + \angle QSP = 180° - \angle SPQ$ da die Winkelsumme im Dreieck PQS $180°$ ist. □

Peripheriewinkelsatz

Proposition (Peripheriewinkelsatz, Euklid III.27). Wenn P und Q Punkte auf einem Kreis k sind, dann ist der Peripheriewinkel $\angle PRQ$ für alle Punkte $R \in k$ im gleichen Halbraum von PQ gleich.

Peripheriewinkelsatz

Proposition (Peripheriewinkelsatz, Euklid III.27). Wenn P und Q Punkte auf einem Kreis k sind, dann ist der Peripheriewinkel $\angle PRQ$ für alle Punkte $R \in k$ im gleichen Halbraum von PQ gleich.

Beweis. Für die Punkte im gleichen Halbraum wie der Mittelpunkt von k folgt die Behauptung unmittelbar aus dem Zentriwinkelsatz.
Für die Punkte im anderen Halbraum folgt sie durch anwenden der Proposition über Sehnenvierecke. □

Sehnen-Tangentenwinkelsatz

Proposition (Sehnen-Tangentenwinkelsatz, Euklid III.32). Seien A, B, D Punkte auf einem Kreis k und F ein Punkt, der auf der Tangente an k in B liegt, und zwar im Halbraum von BD, der A nicht enthält. Dann ist der Tangentenwinkel $\angle FBD$ gleich groß wie der Peripheriewinkel $\angle BAD$.

Sehnen-Tangentenwinkelsatz

Proposition (Sehnen-Tangentenwinkelsatz, Euklid III.32). Seien A, B, D Punkte auf einem Kreis k und F ein Punkt, der auf der Tangente an k in B liegt, und zwar im Halbraum von BD, der A nicht enthält. Dann ist der Tangentenwinkel $\angle FBD$ gleich groß wie der Peripheriewinkel $\angle BAD$.

Beweis. Sei M der Mittelpunkt von k.
Dann ist $\angle FBM = 90^\circ$, also $\angle FBD = 90^\circ - \angle DBM$.
Da die Winkelsumme im gleichschenkligen Dreieck BDM gleich 180° ist, ist $\angle DBM = 1/2(180^\circ - \angle BMD$.
Nach dem Zentriwinkelsatz ist aber $\angle DMB = 2\angle BAD$.
Zusammensetzen ergibt

$$\angle FBD = 90^\circ - \angle DBM = 90^\circ - (90^\circ - \angle BAD) = \angle BAD.$$

$\square$

Sekanten-Tangenten-Satz

Proposition (Sekanten-Tangenten-Satz, Euklid III.36). Sei k ein Kreis und P ein Punkt außerhalb von k. Sei g eine Gerade durch P, die k in Q berührt und sei h eine Gerade durch P, die k in R und S schneidet. Dann ist $|PQ|/|PS| = |PR|/|PQ|$.

Sekanten-Tangenten-Satz

Proposition (Sekanten-Tangenten-Satz, Euklid III.36). Sei k ein Kreis und P ein Punkt außerhalb von k. Sei g eine Gerade durch P, die k in Q berührt und sei h eine Gerade durch P, die k in R und S schneidet. Dann ist $|PQ|/|PS| = |PR|/|PQ|$.

Beweis. Nach Umbenennung können wir annehmen, dass R zwischen P und Q liegt.
Nach dem Sehnentangentenwinkelsatz ist dann $\angle PQR \equiv \angle QSR$.
Es folgt, dass die Dreiecke PQR und PSQ ähnlich sind. Also ist $|PQ|/|PS| = |PR|/|PQ|$. □

Sekanten-Satz

Proposition (Sekanten-Satz). Sei k ein Kreis und P ein Punkt außerhalb des Kreises. Seien h und h' Geraden durch P, die k in Punkten R, S und R', S' schneiden. Dann ist $|PR| \cdot |PS| = |PR'| \cdot |PS'|$

Sekanten-Satz

Proposition (Sekanten-Satz). Sei k ein Kreis und P ein Punkt außerhalb des Kreises. Seien h und h' Geraden durch P, die k in Punkten R, S und R', S' schneiden. Dann ist $|PR| \cdot |PS| = |PR'| \cdot |PS'|$

Beweis. Sei $Q \in k$ so, dass PQ eine Tangente an k ist.
Nach dem Sekanten-Tangengen-Satz ist $|PR| \cdot |PS| = |PQ|^2 = |PR'| \cdot |PS'|$. $\square$

Umkehrung des des Sekanten-Tangenten-Satzes

Proposition (Umkehrung des Sekanten-Tangenten-Satzes, Euklid III.37). Sei k ein Kreis und P ein Punkt außerhalb von k. Seien g eine Gerade durch P, die k in Q schneidet und sei h eine Gerade, die k in R und S schneidet. Wenn $|PQ|/|PS| = |PR|/|PQ|$ ist, dann ist g eine Tangente und Q ein Berührpunkt.

Umkehrung des des Sekanten-Tangenten-Satzes

Proposition (Umkehrung des Sekanten-Tangenten-Satzes, Euklid III.37). Sei k ein Kreis und P ein Punkt außerhalb von k. Seien g eine Gerade durch P, die k in Q schneidet und sei h eine Gerade, die k in R und S schneidet. Wenn $|PQ|/|PS| = |PR|/|PQ|$ ist, dann ist g eine Tangente und Q ein Berührpunkt.

Beweis. Angenommen g hätte einen zweiten Schnittpunkt $Q' \neq Q$, dann wäre nach dem Sekanten-Satz $|PQ|^2 \neq |PQ| \cdot |PQ'| = |PR'| \cdot |PS'|$ im Widerspruch zur Annahme. $\square$

Zerlegung goldener Dreiecke

Proposition (Euklid IV.10). Jedes spitzwinklige goldene Dreieck lässt sich zerlegen in ein spitzwinkliges und ein stumpfwinkliges goldenes Dreieck.

Zerlegung goldener Dreiecke

Proposition (Euklid IV.10). Jedes spitzwinklige goldene Dreieck lässt sich zerlegen in ein spitzwinkliges und ein stumpfwinkliges goldenes Dreieck.

Beweis. Sei ABC ein spitzwinkliges goldenes Dreieck mit $|AB| = |AC| = \varphi \cdot |BC|$.
Sei D der Schnittpunkt von A_{BC} mit $\overline{AB}$.
Sei k der Kreis durch A, C und D.
Es ist $|AB| \cdot |BD| = \varphi \cdot |BC| \cdot (\varphi - 1) \cdot |BC| = \varphi \cdot (\varphi - 1) \cdot |BC|^2$.
Nach der definierenden Gleichung für den goldenen Schnitt ist aber $\varphi \cdot (\varphi - 1) = 1$, also

$$|AB| \cdot |BD| = |BC|^2.$$

[. . .]

Zerlegung goldener Dreiecke

Proposition (Euklid IV.10). Jedes spitzwinklige goldene Dreieck lässt sich zerlegen in ein spitzwinkliges und ein stumpfwinkliges goldenes Dreieck.

Beweis. [...] Nach der Umkehrung des Sekanten-Tangenten-Satzes folgt, dass BC eine Tangente an k ist.
Nach dem Sehnen-Tangentenwinkelsatz, ist also $\angle BCD \cong \angle CAB$.
Folglich ist nach dem Ähnlichkeitssatz ABC ähnlich zu CBD.
Insbesondere ist CBD gleichschenklig und damit $|BC| = |CD|$, also auch ACD gleichschenklig.
Nach Konstruktion ist damit ACD ein stumpfwinkliges und BCD ein spitzwinkliges goldenes Dreieck. $\square$