Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

Grundlagen

Stefan Witzel

Punkte, Abstand

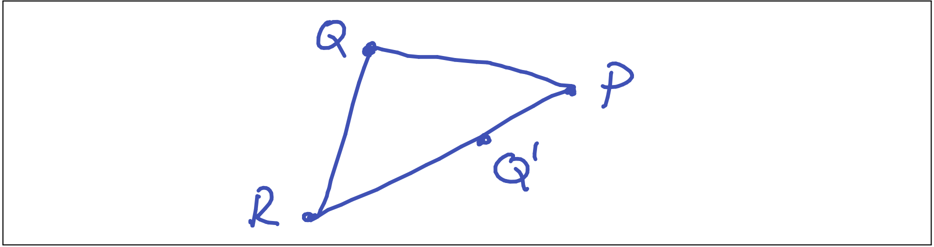
Die Euklidische Ebene $\mathbb{E}^2$ besteht aus Punkten.

Zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{E}^2$ haben einen Abstand $|PQ| \geq 0$.

Axiome (Abstand). Für Punkte $P, Q, R \in \mathbb{E}^2$ gilt:

1. $|PQ| = 0$ genau dann, wenn $P = Q$,
2. $|PQ| = |QP|$,
3. $|PQ| + |QR| \geq |PR|$ (Dreiecksungleichung).

Der Punkt Q liegt zwischen P und R wenn $|PQ| + |QR| = |PR|$.



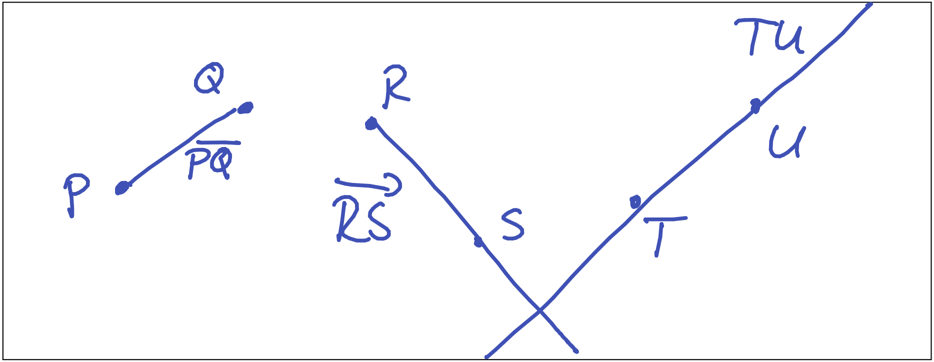
Segmente, Strahlen, Geraden

Seien P und Q verschiedene Punkte.

Das Segment $\overline{PQ}$ besteht aus Punkten zwischen P und Q.

Der Strahl $\overrightarrow{PQ}$ besteht aus Punkten R mit $R \in \overline{PQ}$ oder $Q \in \overline{PR}$.

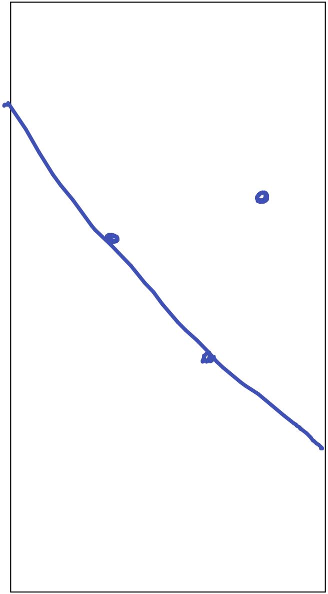
Die Gerade PQ besteht aus Punkten R, so dass einer von P, Q, R zwischen den anderen beiden liegt.



Axiome zu Punkten und Geraden

Axiome (Punkte und Geraden).

1. Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.



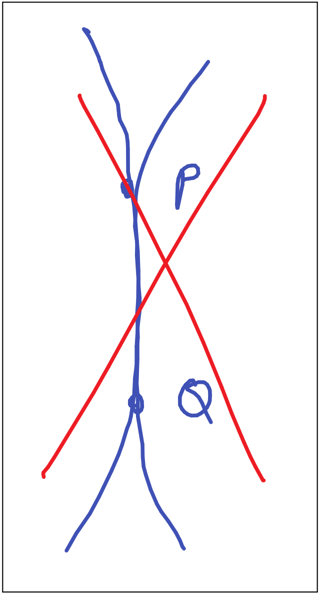
Axiome zu Punkten und Geraden

Axiome (Punkte und Geraden).

1. Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Für zwei verschiedene Punkte P und Q gilt:

2. Es gibt nur eine einzige Gerade, die durch P und Q geht.



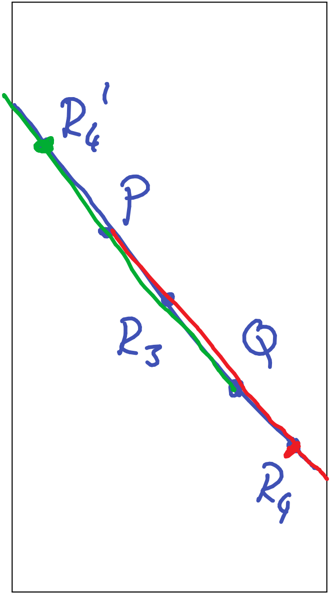
Axiome zu Punkten und Geraden

Axiome (Punkte und Geraden).

1. Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Für zwei verschiedene Punkte P und Q gilt:

2. Es gibt nur eine einzige Gerade, die durch P und Q geht.
3. Es gibt in $\overline{PQ}$ einen Punkt außer P und Q.
4. Es gibt auf dem Strahl $\overrightarrow{PQ}$ einen Punkt außerhalb von $\overline{PQ}$.



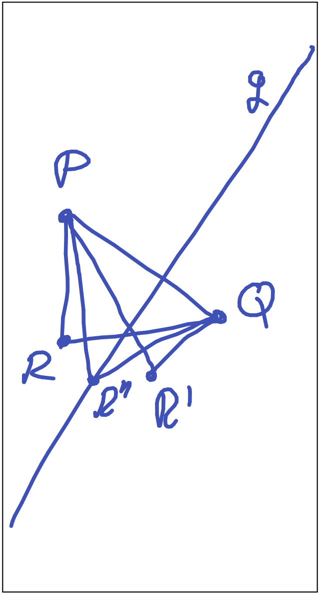
Axiome zu Punkten und Geraden

Axiome (Punkte und Geraden).

1. Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Für zwei verschiedene Punkte P und Q gilt:

2. Es gibt nur eine einzige Gerade, die durch P und Q geht.
3. Es gibt in $\overline{PQ}$ einen Punkt außer P und Q.
4. Es gibt auf dem Strahl $\overrightarrow{PQ}$ einen Punkt außerhalb von $\overline{PQ}$.
5. Wenn eine Gerade g das Segment $\overline{PQ}$ trifft und R ein weiterer Punkt ist, dann trifft g auch $\overline{PR}$ oder $\overline{QR}$.



Axiome zu Punkten und Geraden

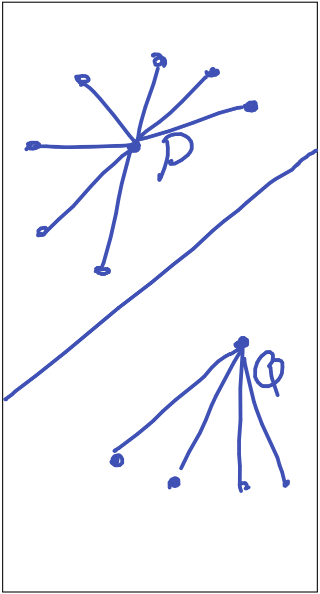
Axiome (Punkte und Geraden).

1. Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Für zwei verschiedene Punkte P und Q gilt:

2. Es gibt nur eine einzige Gerade, die durch P und Q geht.
3. Es gibt in $\overline{PQ}$ einen Punkt außer P und Q.
4. Es gibt auf dem Strahl $\overrightarrow{PQ}$ einen Punkt außerhalb von $\overline{PQ}$.
5. Wenn eine Gerade g das Segment $\overline{PQ}$ trifft und R ein weiterer Punkt ist, dann trifft g auch $\overline{PR}$ oder $\overline{QR}$.

Proposition.
Jede Gerade teilt die Ebene in zwei Hälften.

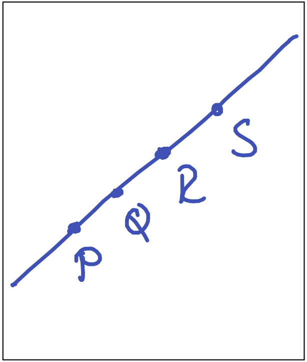


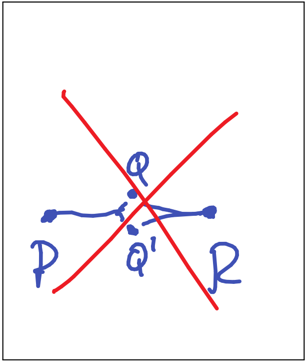
Folgerungen zu Punkten und Geraden

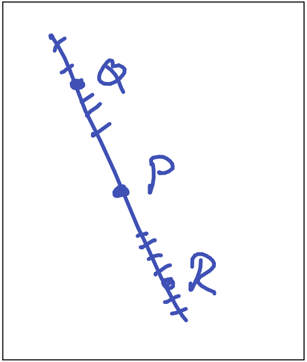
Proposition. Vier Punkte auf einer Geraden können so mit P, Q, R, S benannt werden, dass $Q, R \in \overline{PS}$, $Q \in \overline{PR}$ und $R \in \overline{QS}$.

Folgerung. Wenn $Q, Q' \in \overline{PR}$, dann liegt $Q \in \overline{PQ'}$ und $Q' \in \overline{QR}$ oder es liegt $Q' \in \overline{PQ}$ und $Q \in \overline{Q'R}$.

Folgerung. Jeder Punkt auf einer Geraden teilt die Gerade in zwei Hälften.





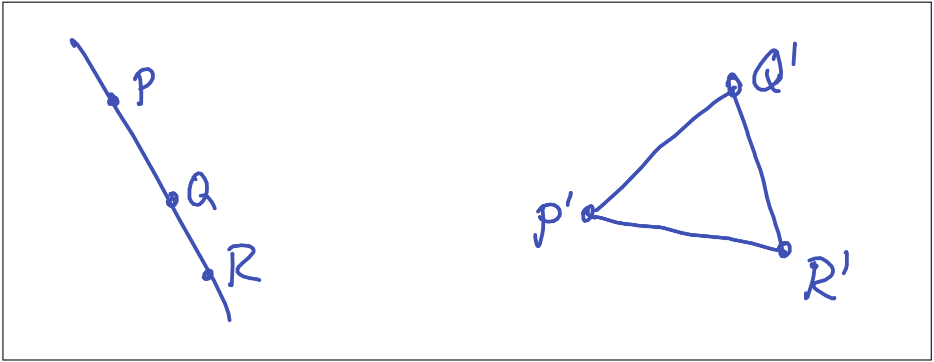


Dreiecke

Seien P, Q, R Punkte.

Wenn alle drei Punkte auf einer Geraden liegen, d.h. wenn $PQ = QR = PR$, dann heißen sie kollinear.

Wenn sie nicht kollinear sind, bilden sie ein Dreieck, dessen Ecken sie sind und dessen Kanten die Segmente $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{PR}$ sind.

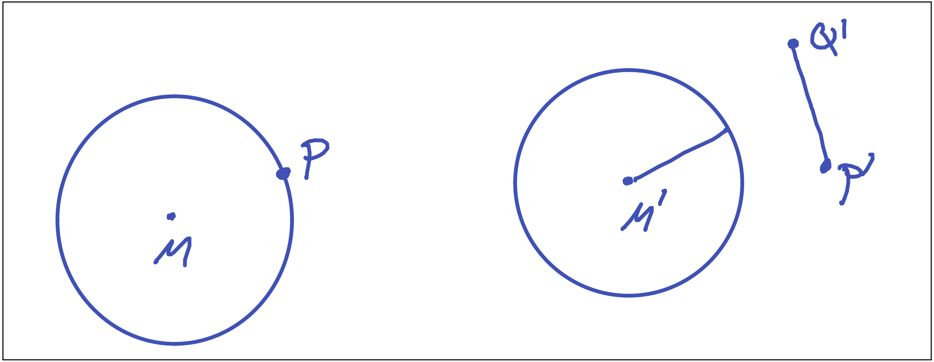


Kreise

Seien M, P, Q Punkte.

Der Kreis M_P besteht aus Punkten die den gleichen Abstand zu M haben, wie P.

Der Kreis M_{PQ} besteht aus Punkten die den gleichen Abstand zu M haben, wie P zu Q.



Konstruktionen: gleichseitiges Dreieck, Kreis

Problem. Gegeben Punkte P, Q, konstruiere ein Dreieck PQR mit $|PQ| = |QR| = |PR|$.

Konstruktion. Wähle R als einen Schnittpunkt von P_Q und Q_P. ◊

Beweis. Weil $R \in P_Q$, ist $|PR| = |PQ|$. Weil $R \in Q_P$, ist $|QR| = |PQ|$. □

Problem. Gegeben Punkte M, P, Q, konstruiere den Kreis M_{PQ} und verwende dazu nur Kreise der Form X_Y, nicht der Form X_{YZ}.

Konstruktion. Konstruiere A, so dass AMP ein gleichseitiges Dreieck ist. Wähle B als Schnittpunkt von $\overrightarrow{AP}$ und P_Q. Wähle C als Schnittpunkt von A_B und $\overrightarrow{AM}$. Dann ist $M_C = M_{PQ}$. ◊

Beweis. Es ist $|AM| = |AP|$ weil AMP ein gleichseitiges Dreieck ist. Weil C auf A_B liegt, ist $|AC| = |AB|$. Weil $B \in P_Q$, ist $|PB| = |PQ|$. Man sieht, dass $|AB| = |AP| + PB$ und $|AC| = |AM| + |MC|$. Also ist $|MC| = |AC| - |AM| = |AB| - |AP| = |PB| = |PQ|$. □

Übungsaufgaben

Aufgabe. Gegeben Punkte P, Q, konstruiere ein Dreieck PQR mit $|PQ| = |QR| = |PR|$.

Konstruktionsbeschreibung.

Wähle R als einen Schnittpunkt von P_Q und Q_P. $\Diamond$

Begründung. Weil $R \in P_Q$, ist $|PR| = |PQ|$. Weil $R \in Q_P$, ist $|QR| = |PQ|$. $\square$

Aufgabe. Gegeben Punkte M, P, Q, konstruiere den Kreis M_{PQ} und verwende dazu nur Kreise der Form X_Y.

Konstruktionsbeschreibung. Konstruiere A, so dass AMP ein gleichseitiges Dreieck ist. Wähle B als Schnittpunkt von $\overrightarrow{AP}$ und P_Q. Wähle C als Schnittpunkt von A_B und $\overrightarrow{AM}$. Dann ist $M_C = M_{PQ}$. $\Diamond$

Begründung. Es ist $|AM| = |AP|$ weil AMP ein gleichseitiges Dreieck ist. Weil C auf A_B liegt, ist $|AC| = |AB|$. Weil $B \in P_Q$, ist $|PB| = |PQ|$. Man sieht, dass $|AB| = |AP| + PB$ und $|AC| = |AM| + |MC|$. Also ist $|MC| = |AC| - |AM| = |AB| - |AP| = |PB| = |PQ|$. $\square$

Schnittpunkte

Wähle R als einen Schnittpunkt von P_Q und Q_P.

Warum sollten sich die beiden Kreise schneiden?

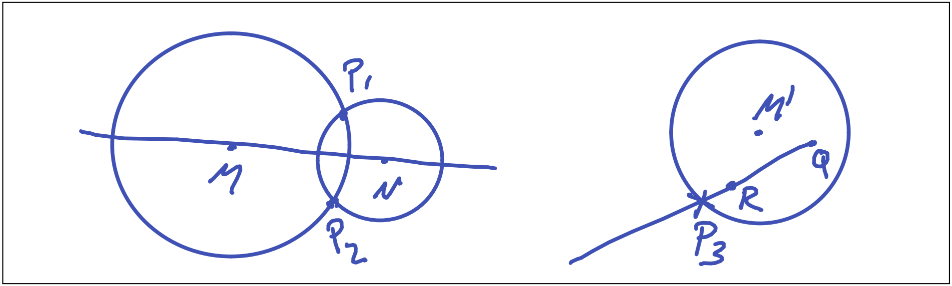
„ … “

— Euklid

Axiome (Kreis-Schnittpunkte).

1. Seien M_P und N_Q Kreise. Wenn M_P mindestens einen Punkt innerhalb von N_Q und einen Punkt außerhalb davon, dann haben M_P und N_Q in jedem Halbraum von MN einen eindeutigen Schnittpunkt.
2. Sei M_P ein Kreis und $\overrightarrow{QR}$ ein Strahl. Wenn Q im Innern von M_P liegt, dann haben M_P und $\overrightarrow{QR}$ einen eindeutigen Schnittpunkt.

Schnittpunkte

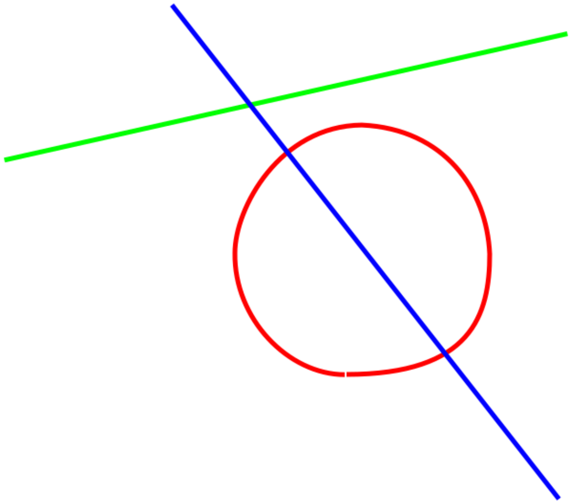


Axiome (Kreis-Schnittpunkte).

1. Seien M_P und N_Q Kreise. Wenn M_P mindestens einen Punkt innerhalb von N_Q und einen Punkt außerhalb davon, dann haben M_P und N_Q in jedem Halbraum von MN einen eindeutigen Schnittpunkt.
2. Sei M_P ein Kreis und $\overrightarrow{QR}$ ein Strahl. Wenn Q im Innern von M_P liegt, dann haben M_P und $\overrightarrow{QR}$ einen eindeutigen Schnittpunkt.

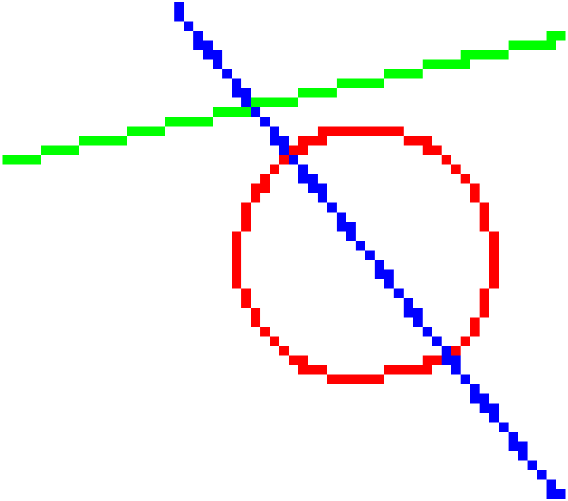
Exkurs: diskontinuierliche Geometrie

Warum muss man so etwas explizit fordern? Ist das nicht klar?



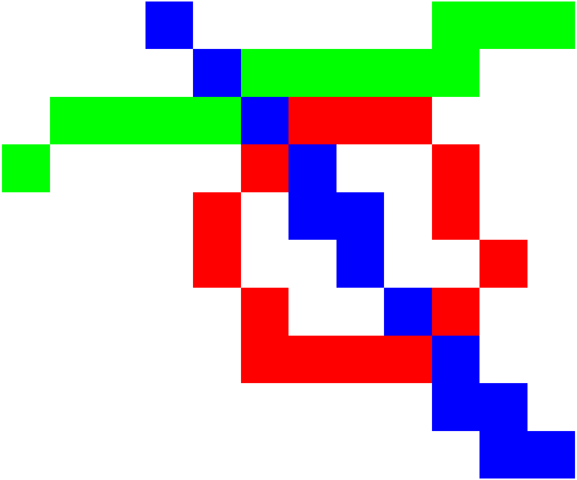
Exkurs: diskontinuierliche Geometrie

Warum muss man so etwas explizit fordern? Ist das nicht klar?



Exkurs: diskontinuierliche Geometrie

Warum muss man so etwas explizit fordern? Ist das nicht klar?



Exkurs: diskontinuierliche Geometrie

Warum muss man so etwas explizit fordern? Ist das nicht klar – wenn es unendlich viele Punkte gibt?