Geraden-Schnittpunkte

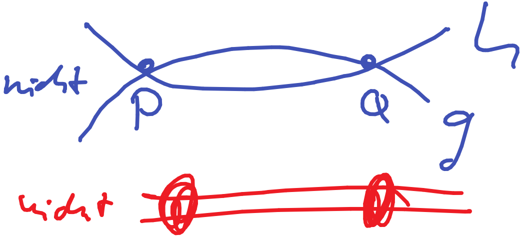
Erinnerung:

Axiom. Durch zwei verschiedene Punkte geht höchstens eine Gerade.

Anders ausgedrückt: Seien P und Q Punkte und g und h Geraden. Wenn g und h durch P und Q gehen. . .

- und P und Q verschieden sind, dann sind g und h gleich.
- dann ist g und h gleich oder P und Q gleich.

$P = Q$: PQ sinnlos, aber wir reden über irgendwelche Geraden durch P und Q



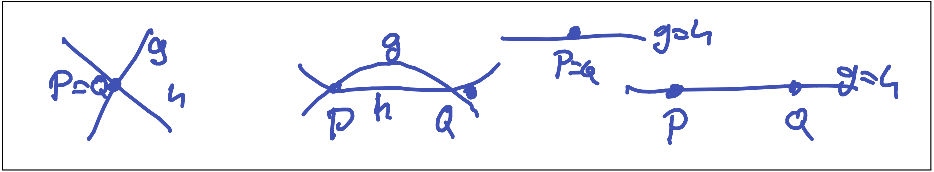
Geraden-Schnittpunkte

Erinnerung:

Axiom. Durch zwei verschiedene Punkte geht höchstens eine Gerade.

Anders ausgedrückt: Seien P und Q Punkte und g und h Geraden. Wenn g und h durch P und Q gehen...

- und P und Q verschieden sind, dann sind g und h gleich.
- dann ist g und h gleich oder P und Q gleich.
  nicht
- und g und h sind verschieden, dann sind P und Q gleich.



Geraden-Schnittpunkte

Erinnerung:

Axiom. Durch zwei verschiedene Punkte geht höchstens eine Gerade.

Anders ausgedrückt: Seien P und Q Punkte und g und h Geraden. Wenn g und h durch P und Q gehen...

- und P und Q verschieden sind, dann sind g und h gleich.
- dann ist g und h gleich oder P und Q gleich.
- und g und h sind verschieden, dann sind P und Q gleich.

Folgerung. Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in höchstens einem Punkt.

Meta: Umkehrschluss (Kontraposition)

Aussage: Wenn A, dann B
Umkehrschluss: Wenn nicht B, dann nicht A!

Beispiel. A = der Wecker klingelt, B = ich wache auf

Wenn $\boxed{\text{der Wecker klingelt}}$, dann $\boxed{\text{wache ich auf}}$

Wenn ich nicht $\boxed{\text{aufwache}}$, dann $\boxed{\text{klingelt der Wecker}}$ nicht

...denn wenn der Wecker klingeln würde, würde ich ja aufwachen.

Meta: Umkehrschluss (Kontraposition)

Aussage: Wenn A, dann B
Umkehrschluss: Wenn nicht B, dann nicht A!

Beispiel. A = der Wecker klingelt, B = ich wache auf

Wenn $\boxed{\text{der Wecker klingelt}}$, dann $\boxed{\text{wache ich auf}}$

Wenn ich $\boxed{\text{weiter schlafe}}$, dann $\boxed{\text{klingelt der Wecker}}$ nicht

. . . denn wenn der Wecker klingeln würde, würde ich ja aufwachen.

Beispiel. A = g und h schneiden sich in mindestens zwei Punkten
B = g und h sind gleich

Wenn $\boxed{g \text{ und } h \text{ sich in mindestens zwei Punkten schneiden}}$, dann $\boxed{\text{sind } g \text{ und } h \text{ gleich}}$.

Meta: Umkehrschluss (Kontraposition)

Aussage: Wenn A, dann B
Umkehrschluss: Wenn nicht B, dann nicht A!

Beispiel. A = der Wecker klingelt, B = ich wache auf

Wenn $\boxed{\text{der Wecker klingelt}}$, dann $\boxed{\text{wache ich auf}}$

Wenn ich $\boxed{\text{weiter schlafe}}$, dann $\boxed{\text{klingelt der Wecker}}$ nicht

…denn wenn der Wecker klingeln würde, würde ich ja aufwachen.

Beispiel. A = g und h schneiden sich in mindestens zwei Punkten
B = g und h sind gleich

Wenn $\boxed{g \text{ und } h \text{ sich in mindestens zwei Punkten schneiden}}$, dann $\boxed{\text{sind } g \text{ und } h \text{ gleich}}$.

Wenn $\boxed{g \text{ und } h \text{ nicht gleich}}$ sind,
dann $\boxed{\text{schneiden sich } g \text{ und } h \text{ nicht in mindestens zwei Punkten}}$.

Meta: Umkehrschluss (Kontraposition)

Aussage: Wenn A, dann B
Umkehrschluss: Wenn nicht B, dann nicht A!

Beispiel. A = der Wecker klingelt, B = ich wache auf

Wenn $\boxed{\text{der Wecker klingelt}}$, dann $\boxed{\text{wache ich auf}}$

Wenn ich $\boxed{\text{weiter schlafe}}$, dann $\boxed{\text{klingelt der Wecker}}$ nicht

... denn wenn der Wecker klingeln würde, würde ich ja aufwachen.

Beispiel. A = g und h schneiden sich in mindestens zwei Punkten
B = g und h sind gleich

Wenn $\boxed{g \text{ und } h \text{ sich in mindestens zwei Punkten schneiden}}$, dann $\boxed{\text{sind } g \text{ und } h \text{ gleich}}$.

Wenn $\boxed{g \text{ und } h \text{ verschieden}}$ sind,
dann $\boxed{\text{schneiden sich } g \text{ und } h \text{ in höchstens einem Punkten}}$.

Geraden-Schnittpunkte

Erinnerung:

Axiom. Durch zwei verschiedene Punkte geht höchstens eine Gerade.

Anders ausgedrückt: Seien P und Q Punkte und g und h Geraden. Wenn g und h durch P und Q gehen...

- und P und Q verschieden sind, dann sind g und h gleich.
- dann ist g und h gleich oder P und Q gleich.
- und g und h sind verschieden, dann sind P und Q gleich.

Folgerung. Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in höchstens einem Punkt. 1

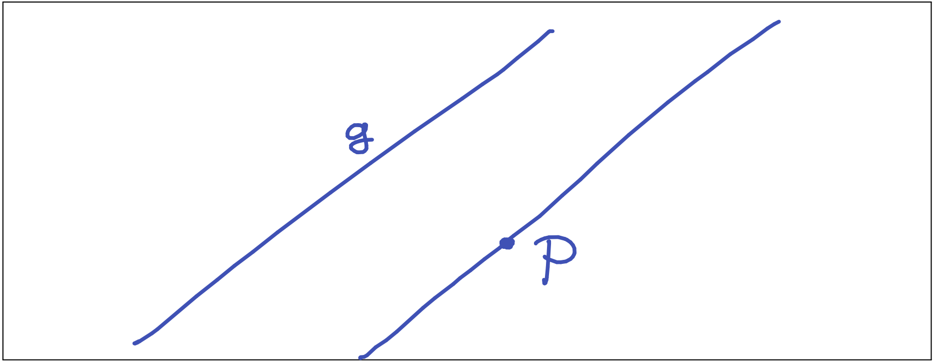
Zwei Geraden sind parallel wenn sie gleich sind oder keinen Schnittpunkt haben.

Parallelen-Axiom

Axiom (Parallelen-Axiom). Wenn g eine Gerade ist und P ein Punkt, dann existiert genau eine Gerade, die parallel zu g ist und durch P geht.

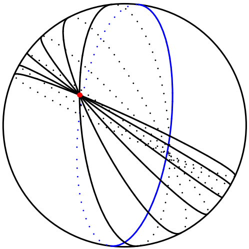
Mit anderen Worten:

Wenn P nicht auf g liegt, gibt es genau eine Gerade, die P enthält und g nicht schneidet.



Exkurs: nicht-euklidische Geometrie

- Euklid versuchte zu zeigen, dass das Parallelen-Axiom aus den anderen Axiomen folgt, was ihm nicht gelang.
- Heute wissen wir, dass es Geometrien gibt, die verschiedenen Varianten des Parallelen-Axioms genügen:
  - Jede Gerade durch P schneidet $g \rightsquigarrow$ projektive Geometrie.
  - Unendlich viele Geraden durch P schneiden g nicht $\rightsquigarrow$ hyperbolische Geometrie.
- Es ist also unmöglich, dass Parallelen-Axiom aus den anderen Axiomen abzuleiten, und zeugt von Euklids logischer Strenge.



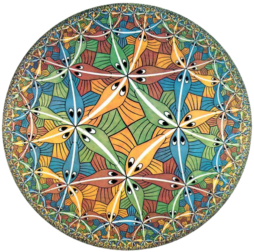
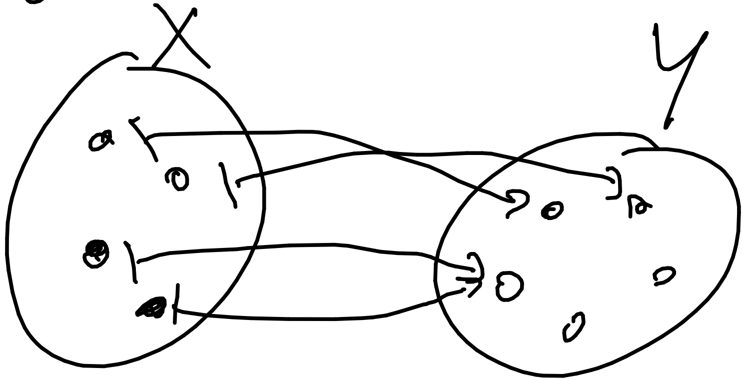
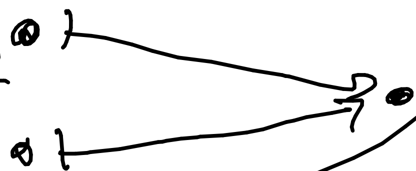


Abbildung: $\varphi : X \to Y$



injektiv: nicht



nicht $\varphi(x) = \varphi(x')$ für $x \neq x'$

wenn $x \neq x'$, dann $\varphi(x) \neq \varphi(x')$

surjektiv:

für jedes $y \in Y$ existiert ein $x \in X$ mit $\varphi(x) = y$

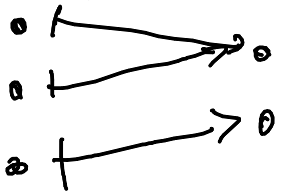
bijektiv $\Longleftrightarrow$ injektiv u. surjektiv

$\Longleftrightarrow$ für jedes $y \in Y$ existiert genau ein $x \in X$ mit $\varphi(x) = y$

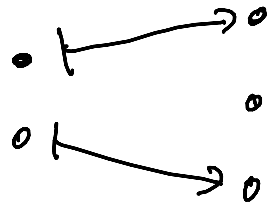
[Dann existiert $\varphi^{-1}: Y \to X$ mit

$$\varphi^{-1}(y) = x \iff y = \varphi(x) \quad !$$
]

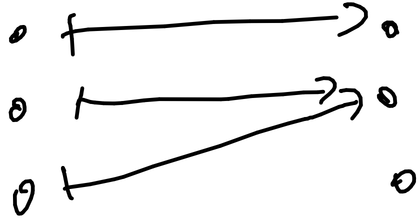
Bsp. surj., aber nicht bij.



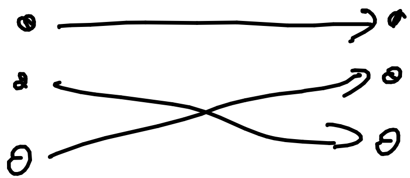
Bsp. inj., aber nicht bij.



Bsp. weder injektiv, noch surjektiv:



Bsp. bijektiv



Definiere $\varphi^{-1}(y)$:

Surjektivität: es existiert ein $x \in X$ mit

$$\varphi(x)=y.$$

Setze $\varphi^{-1}(y)=x$.

Injektivität: garantiert, dass x eindeutig bestimmt ist.

$\varphi(x)=y$ genau dann, wenn $\varphi^{-1}(y)=x$.

Bewegungen

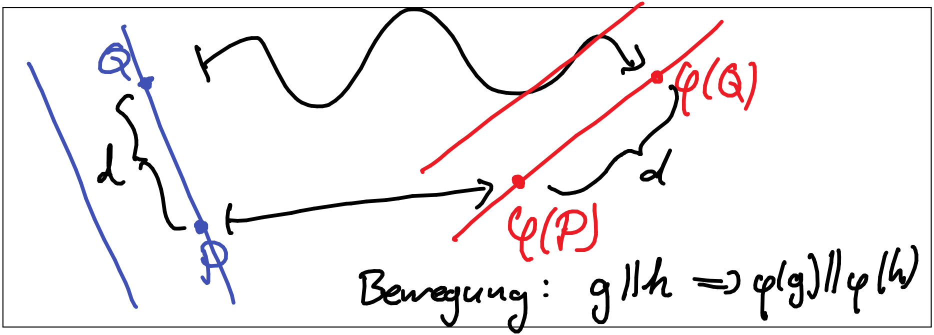
Eine *Bewegung* ist eine bijektive Abbildung $\varphi\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ die den Abstand erhält: $|\varphi(P)\varphi(Q)| = |PQ|$.

Bewegungen bilden (parallele) Geraden auf (parallele) Geraden und Kreise auf Kreise ab.

Ein Punkt P heißt *Fixpunkt* von φ wenn er invariant ist: $\varphi(P) = P$.

Die Menge aller Fixpunkte einer Bewegung φ ist seine *Fixpunktmenge*.

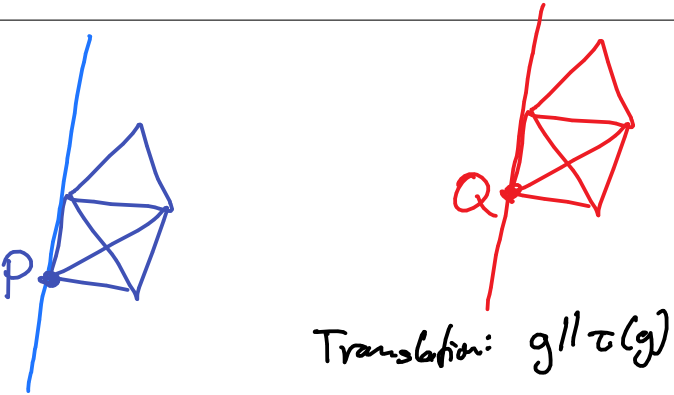
Die *Identität* id lässt jeden Punkt wo er ist: alle Punkte sind Fixpunkte.



Verschiebungen

Eine *Translation* (Verschiebung) ist eine Bewegung, die keinen Fixpunkt hat und jede Gerade auf eine parallele Gerade abbildet. Per Definition ist auch die Identität eine Translation.

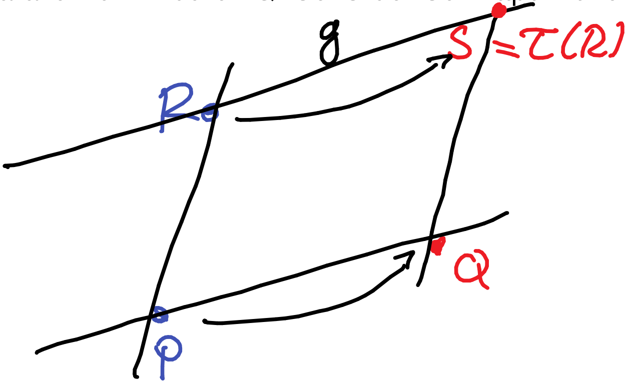
Axiom. Gegeben zwei Punkte P und Q existiert genau eine Translation τ mit $\tau(P) = Q$.



Konstruktion von Verschiebungen

Problem. Gegeben Punkte P, Q und R, die nicht kollinear sind.
Konstruiere $S := \tau(R)$ wobei τ die Translation ist, die P auf Q abbildet.

Konstruktion. Sei g die Gerade parallel zu PQ durch R und h die Gerade parallel zu PR durch Q. Sei S der Schnittpunkt von g und h. $\Diamond$



Konstruktion von Verschiebungen

Problem. Gegeben Punkte P, Q und R, die nicht kollinear sind. Konstruiere $S := \tau(R)$ wobei τ die Translation ist, die P auf Q abbildet.

Konstruktion. Sei g die Gerade parallel zu PQ durch R und h die Gerade parallel zu PR durch Q. Sei S der Schnittpunkt von g und h. $\Diamond$

Beweis. Da τ eine Verschiebung ist, ist $\tau(PQ) \parallel PQ$. Diese beiden parallelen Geraden schneiden sich aber in $\tau(P) = Q$, sind also gleich. Es folgt, dass auch g auf eine parallele Gerade abgeblidet wird: weil τ eine Bewegung ist und $g \parallel PQ$, ist $\tau(g) \parallel \tau(PQ)$, also $g \parallel PQ = \tau(PQ) \parallel \tau(g)$. Tatsächlich wird g auf sich selbst abgebildet, $g = \tau(g)$ weil τ sonst einen Fixpunkt hätte [Abkürzung]. Weil τ eine Bewegung ist, wird außerdem PR auf die dazu parallele Gerade durch $\tau(P) = Q$ abgebildet, also auf h. Damit der Schnittpunkt R von g und PR auf den Schnittpunkt S von g und h abgebildet. $\square$