Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

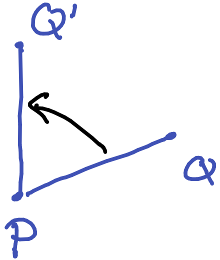
Grundlagen

Stefan Witzel

Drehungen

Eine Bewegung ist eine *Rotation* (Drehung) sie genau einen Fixpunkt hat. Wieder gilt auch die Identität als Rotation.

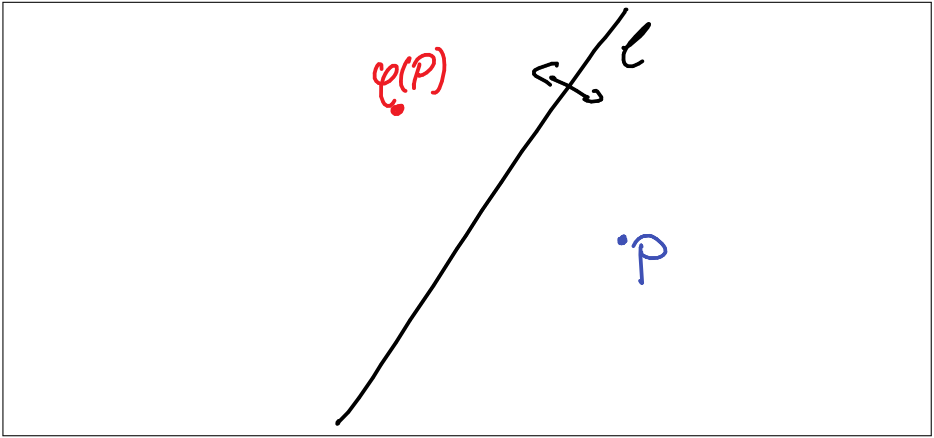
Axiom. Gegeben drei Punkte P, Q und Q' mit $|PQ| = |PQ'|$ existiert genau eine Rotation ρ mit $\rho(P) = P$ und $\rho(Q) = Q'$.



Spiegelungen

Eine Bewegung ist eine *Reflektion* (Spiegelung) es eine Gerade gibt, wenn ihre Fixpunktmenge eine Gerade ist.

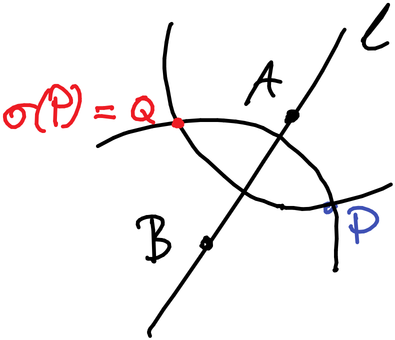
Axiom. Gegeben eine Gerade ℓ gibt es genau eine Spiegelung σ, deren Fixpunktmenge die Gerade ℓ ist.



Konstruktion von Spiegelungen

Problem. Gegeben eine Gerade ℓ und einen Punkt P. Konstruiere $Q := \sigma(P)$ wobei σ die Spiegelung an ℓ ist.

Konstruktion. Seien A und B auf ℓ beliebig aber verschieden. Sei Q der von P verschiedene (oder der einzige) Schnittpunkt von A_P und B_P. $\Diamond$



Konstruktion von Spiegelungen

Problem. Gegeben eine Gerade ℓ und einen Punkt P. Konstruiere $Q := \sigma(P)$ wobei σ die Spiegelung an ℓ ist.

Konstruktion. Seien A und B auf ℓ beliebig aber verschieden. Sei Q der von P verschiedene (oder der einzige) Schnittpunkt von A_P und B_P. $\Diamond$

Beweis. Da σ eine Isometrie ist und A und B Fixpunkte, muss $|\sigma(P)\sigma(A)| = |\sigma(P)A| = |PA|$ sein und analog für Q. Also ist $\sigma(P)$ ein Schnittpunkt von A_P und B_P. Wenn $P \in AB$ ist P ein Fixpunkt von σ und der einzige Schnittpunkt von A_P und B_P. Andernfalls ist P kein Fixpunkt von σ, also muss $\sigma(P) \neq P$ sein und der zweite Schnittpunkt der beiden Kreise. $\square$