Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

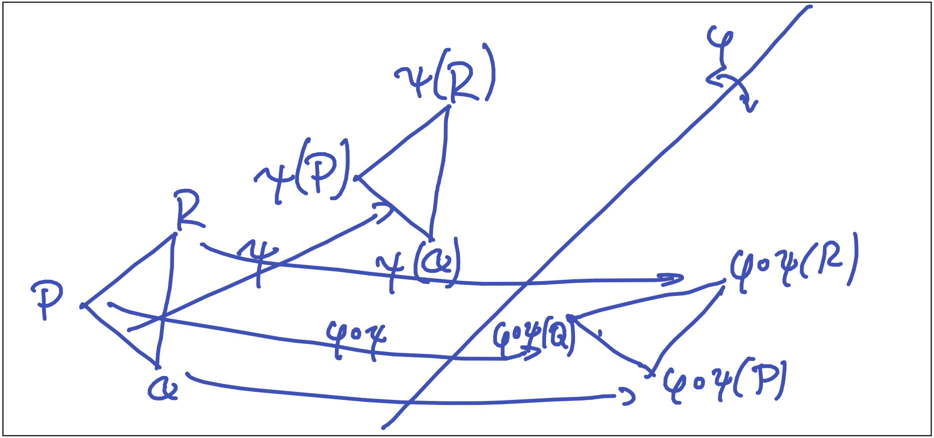
Grundlagen

Stefan Witzel

Verknüpfung von Bewegungen (Komposition)

Die *Verknüpfung* von zwei Bewegungen $\varphi \circ \psi$ führt erst die eine aus, dann die andere: $(\varphi \circ \psi)(P) = \varphi(\psi(P))$.

"φ nach ψ"

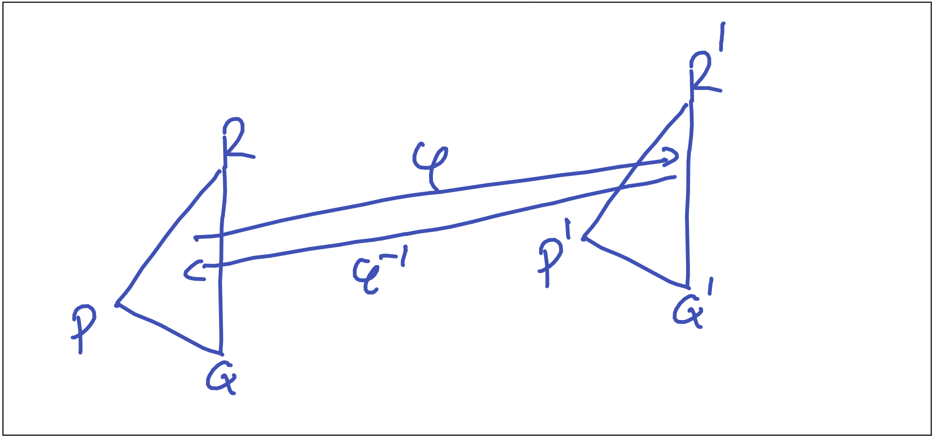


Verknüpfung von Bewegungen

Die *Verknüpfung* von zwei Bewegungen $\varphi \circ \psi$ führt erst die eine aus, dann die andere: $(\varphi \circ \psi)(P) = \varphi(\psi(P))$.

Jede Bewegung φ hat eine *Inverse* φ^{-1} die ihre Wirkung rückgängig macht: $\underbrace{\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}} = \varphi^{-1} \circ \varphi$.

$\varphi(\varphi^{-1}(P)) = P$



Proposition. $(\varphi\circ\psi)^{-1}=\psi^{-1}\circ\varphi^{-1}$

Bew. $(\psi^{-1}\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\psi)=\psi^{-1}\circ\underbrace{(\varphi^{-1}\circ\varphi)}_{=id}\circ\psi$

$$=\psi^{-1}\circ id\circ\psi$$

$$=\psi^{-1}\circ\psi$$

$$=id$$

$$(\varphi\circ\psi)\circ(\psi^{-1}\circ\varphi^{-1})=\varphi\circ(\psi\circ\psi^{-1})\circ\varphi^{-1}$$

$$=\varphi\circ\varphi^{-1}$$

$$=id$$

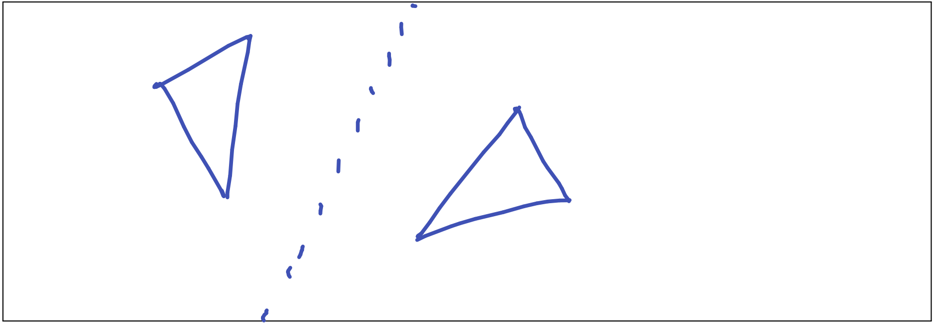
$\boxed{\varepsilon}$

Kongruenz

Zwei Figuren (Segmente, Dreiecke, Vierecke, Winkel, Kreise, ...) f und f' sind kongruent, geschrieben $f \equiv f'$, wenn es eine Bewegung φ gibt, die f auf f' abbildet: $\varphi(f) = f'$.

Dann gibt es auch eine Bewegung, die f' auf f abbildet, nämlich φ^{-1}.

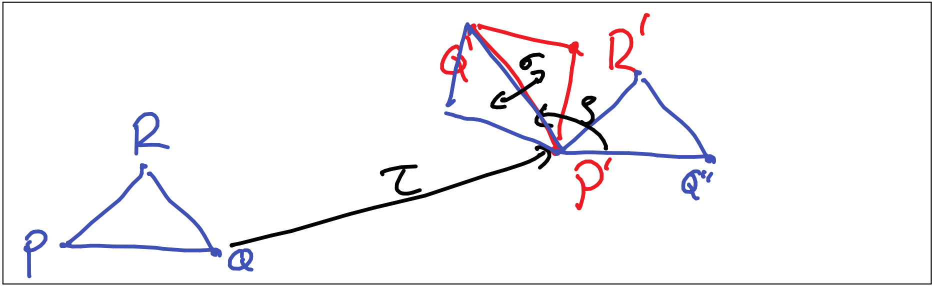
Wenn f und f' kongruent sind (durch die Abbildung φ) und f' und f'' kongruent sind (durch die Abbildung ψ), dann sind f und f'' kongruent (durch die Abbildung $\psi \circ \varphi$).



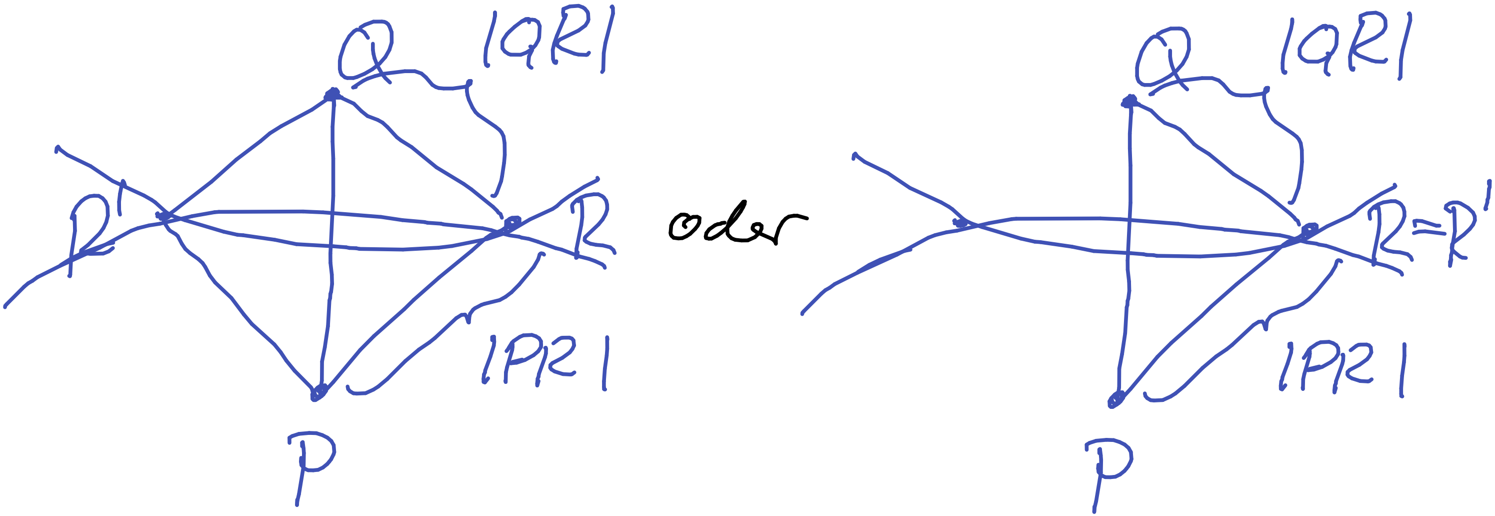
Bewegungen und Dreiecke II

Satz (Kongruenzsatz „SSS“). Wenn PQR und $P'Q'R'$ Dreiecke sind, so dass $|PQ| = |P'Q'|$, $|QR| = |Q'R'|$ und $|PR| = |P'R'|$, dann existiert eine Bewegung φ mit $\varphi(PQR) = P'Q'R'$. Das heißt, PQR und $P'Q'R'$ sind kongruent.

Beweis. Sei τ eine Translation, die P auf P' abbildet.
Sei ρ eine Rotation, die P' fest hält und $\tau(Q)$ auf Q' abbildet.
Sei σ die Spiegelung and $P'Q'$ falls $\rho(\tau(R)) \neq R$. Falls nicht, sei $\sigma = \mathrm{id}$.
Dann funktioniert $\varphi = \sigma \circ \rho \circ \tau$. □



Nach Verschiebung und Drehung



(P_R und Q_R schneiden sich in zwei Punkten).

Bewegungen und Dreiecke II

Satz (Kongruenzsatz „SSS“). Wenn PQR und $P'Q'R'$ Dreiecke sind, so dass $|PQ| = |P'Q'|$, $|QR| = |Q'R'|$ und $|PR| = |P'R'|$, dann existiert eine Bewegung φ mit $\varphi(PQR) = P'Q'R'$. Das heißt, PQR und $P'Q'R'$ sind kongruent.

Folgerung. Zwei Segmente $\overline{PQ}$ und $\overline{P'Q'}$ sind kongurent genau dann, wenn $|PQ| = |P'Q'|$.

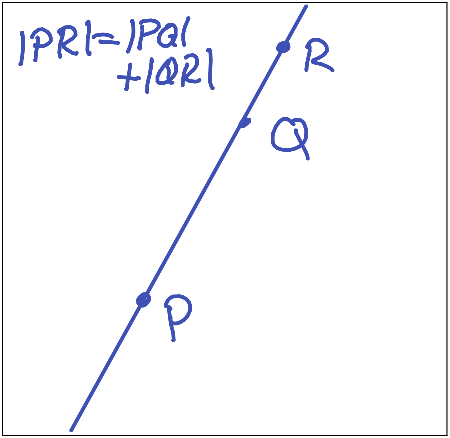
Beweis. Dass kongruente Segmente die gleiche Länge haben müssen, ist klar. Umgekehrt zeigt der Satz, dass gleich lange Segmente kongruent sind. $\square$

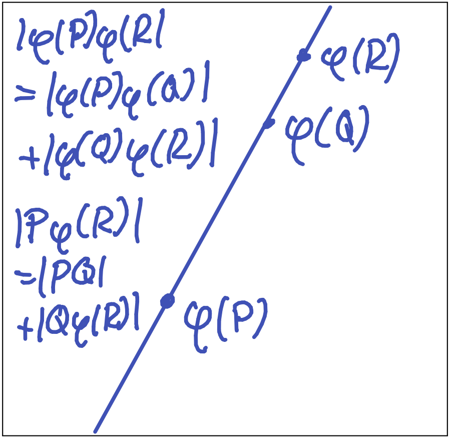
$\overline{PQ} \equiv \overline{P'Q'}$ sagt das gleiche $|PQ| = |P'Q'|$

Eindeutigkeit von Bewegungen

Proposition. Die Fixpunktmenge einer Bewegung φ ist entweder leer, ein einziger Punkt, eine Gerade, oder die ganze Ebene.

Beweis. Schritt 1: wenn P und Q Fixpunkte von φ sind, dann ist jeder Punkt auf PQ ein Fixpunkt.

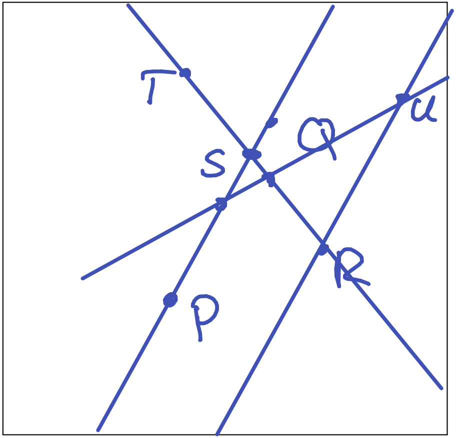


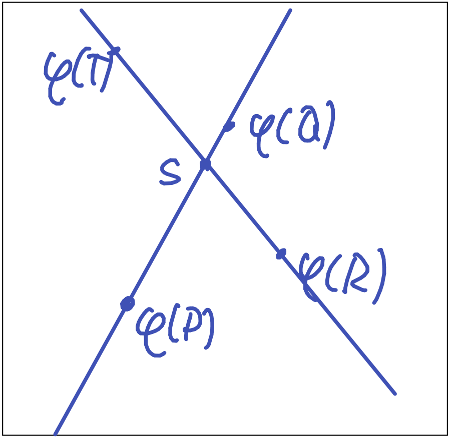


Eindeutigkeit von Bewegungen

Proposition. Die Fixpunktmenge einer Bewegung φ ist entweder leer, ein einziger Punkt, eine Gerade, oder die ganze Ebene.

Beweis. Schritt 2: wenn alle Punkte auf PQ und außerdem R Fixpunkte von φ sind, dann ist jeder Punkt ein Fixpunkt. □





Punkte von denen wir noch nicht wissen, dass sie Fixpunkt sind.