Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

Grundlagen

Fixpunkte und Kreisschnittpunkte

Stefan Witzel

Wie schreib ich's auf? (Version 1)

Aufgabe. Gegeben ein Segment $\overline{PQ}$, konstruiere die Mittelsenkrechte.

Konstruktionsbeschreibung. Seien A und A' die Schnittpunkte von P_Q und Q_P. Die Gerade $\ell = AA'$ ist die Mittelsenkrechte. $\Diamond$

Wie schreib ich's auf? (Version 1)

Aufgabe. Gegeben ein Segment $\overline{PQ}$, konstruiere die Mittelsenkrechte.

Konstruktionsbeschreibung. Seien A und A' die Schnittpunkte von P_Q und Q_P. Die Gerade $\ell = AA'$ ist die Mittelsenkrechte. $\Diamond$

Was muss begründet werden?

- Wenn sich zwei Geraden schneiden sollen, dass sie nicht parallel sind.
- Wenn sich eine Gerade und ein Kreis schneiden sollen, dass das Kreisschnitt-Axiom 1 anwendbar ist.
- Wenn sich zwei Kreise schneiden sollen, dass das Kreisschnitt-Axiom 2 anwendbar ist.
- Wenn eine Gerade CD oder ein Kreis C_D konstruiert werden soll, dass C und D verschieden sind.
- Dass die Konstruktion leistet, was sie soll.

Axiom: M_P und N_Q schneiden sich falls M_P einen Punkt innerhalb und einen Punkt außerhalb von N_Q enthält, und zwar in jedem Halbraum von MN genau einmal.

Wie schreib ich's auf? (Version 1)

Aufgabe. Gegeben ein Segment $\overline{PQ}$, konstruiere die Mittelsenkrechte.

Konstruktionsbeschreibung. Seien A und A' die Schnittpunkte von P_Q und Q_P. Die Gerade $\ell = AA'$ ist die Mittelsenkrechte. $\diamond$

Begründung. Sei Q' der von Q verschiedene Schnittpunkt von PQ und P_Q. Dann gilt

$$|QQ| < |QP| < |QQ'|$$

denn es ist $\underline{|QQ| = 0}$ und $\underline{|QQ'| = 2|QP|}$.
Da Q und Q' auf dem Kreis P_Q liegen, zeigt das, dass P_Q einen Punkt innerhalb von Q_P und einen Punkt außerhalb von Q_P enthält.
Nach dem Kreisschnitt-Axiom schneiden sich P_Q und Q_P in jedem Halbraum von PQ in einem Punkt A bzw. A'. Da

$$|PA| + |AQ| = 2|PQ| > |PQ| \quad \left(\text{und} \quad \begin{array}{l} |AP|+|PQ|=\overset{2}{\cancel{3}}|PQ|>|AQ| \\ |PQ|+|QA|=\underset{2}{\cancel{3}}|PQ|>|PA| \end{array}\right)$$

ist, liegt A nicht auf PQ und die Punkte A und A' sind verschieden.
[. . .] $\square$

Wie schreib ich's auf? (Version 1)

Aufgabe. Gegeben ein Segment $\overline{PQ}$, konstruiere die Mittelsenkrechte.

Konstruktionsbeschreibung. Seien A und A' die Schnittpunkte von P_Q und Q_P. Die Gerade $\ell = AA'$ ist die Mittelsenkrechte. $\Diamond$

Begründung. [...]
Weil A und A' verschieden sind, existiert die Gerade AA'. Weil A und A' auf $P_Q \cap Q_P$ liegen, ist

$$|PA| = |PA'| = |QA| = |QA'|.$$

Das heißt P und Q sind die beiden Schnittpunkte von A_P und A'_P.
Insbesondere liegen P und Q nicht auf ℓ.
Da σ_ℓ Spiegelung and ℓ ist, hat der Punkt $\sigma_\ell(P)$ hat den gleichen Abstand von A und A', wie P.
Da P nicht auf ℓ liegt, ist $\sigma_\ell(P) \neq P$. Der einzige Punkt außer P, der den gleichen Abstand von A und A' hat, wie P ist Q. Also ist $\sigma_\ell(P) = Q$. Durch Vertauschen der Rollen von P und Q sieht man, dass auch $\sigma_\ell(Q) = P$. $\square$

Wie schreib ich's auf? (Version 1)

Aufgabe. Gegeben ein Segment $\overline{PQ}$, konstruiere die Mittelsenkrechte.

Konstruktionsbeschreibung. Seien A und A' die Schnittpunkte von P_Q und Q_P. Die Gerade $\ell = AA'$ ist die Mittelsenkrechte. $\Diamond$

Folgerung. Es gibt einen Punkt $M \in \overline{PQ}$ mit $|PM| = |MQ| = \frac{1}{2}|PQ|$.

Beweis. Da A und A' in unterschiedlichen Halbräumen von PQ liegen, haben $\overline{AA'}$ und PQ einen Schnittpunkt M.
Da $M \in \ell$, ist $\sigma_\ell(M) = M$. Also ist $|PM| = |\sigma_\ell(P)\sigma_\ell(M)| = |QM|$.
Da $M \in PQ$ muss eine der Dreiecksungleichungen zwischen P, Q und M mit Gleichheit gelten.
Die einzige Möglichkeit dafür ist $|PQ| = |PM| + |MQ|$. $\square$

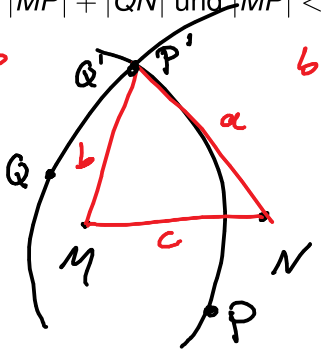
Kreisschnittpunkte

Satz. Die Kreise M_P und N_Q haben

1. keinen Schnittpunkt wenn $|QN| > |PM| + |MN|$ oder $|MN| > |MP| + |QN|$ oder $|MP| > |MN| + |NQ|$,
2. genau einen Schnittpunkt (Berührpunkt) wenn $|QN| = |PM| + |MN|$ oder $|MN| = |MP| + |QN|$ oder $|MP| = |MN| + |NQ|$,
3. genau zwei Schnittpunkte wenn $|QN| < |PM| + |MN|$ und $|MN| < |MP| + |QN|$ und $|MP| < |MN| + |NQ|$.

$a < b + c$

$c < a + b$ $\quad$ $b < a + c$



Kreisschnittpunkte

Satz. Die Kreise M_P und N_Q haben

1. keinen Schnittpunkt wenn $|QN| > |PM| + |MN|$ oder $|MN| > |MP| + |QN|$ oder $|MP| > |MN| + |NQ|$,
2. genau einen Schnittpunkt (Berührpunkt) wenn $|QN| = |PM| + |MN|$ oder $|MN| = |MP| + |QN|$ oder $|MP| = |MN| + |NQ|$,
3. genau zwei Schnittpunkte wenn $|QN| < |PM| + |MN|$ und $|MN| < |MP| + |QN|$ und $|MP| < |MN| + |NQ|$.

Folgerung. Die Kreise M_{PR} und N_{QS} haben

1. keinen Schnittpunkt wenn $|QS| > |PR| + |MN|$ oder $|MN| > |RP| + |QS|$ oder $|RP| > |MN| + |SQ|$,
2. genau einen Schnittpunkt (Berührpunkt) wenn $|QS| = |PR| + |MN|$ oder $|MN| = |RP| + |QS|$ oder $|RP| = |MN| + |SQ|$,
3. genau zwei Schnittpunkte wenn $|QS| < |PR| + |MN|$ und $|MN| < |RP| + |QS|$ und $|RP| < |MN| + |SQ|$.

Kreisschnittpunkte

Satz. Die Kreise M_P und N_Q haben

1. keinen Schnittpunkt wenn $|QN| > |PM| + |MN|$ oder $|MN| > |MP| + |QN|$ oder $|MP| > |MN| + |NQ|$.

Beweis. Für einen Schnittpunkt S ist $|SM| = |PM|$ und $|SN| = |QN|$. Die Behauptung folgt also aus der Dreiecksungleichung. $\square$

Kreisschnittpunkte

Satz. Die Kreise M_P und N_Q haben

2.,3. zwei Schnittpunkte wenn $|QN| \leq |PM| + |MN|$ und $|MN| \leq |MP| + |QN|$ und $|MP| \leq |MN| + |NQ|$,

die gleich sind wenn in einer der Ungleichungen Gleichheit gilt.

Beweis. Wir können P durch den Schnittpunkt von M_P mit $\overrightarrow{MN}$ und Q durch den Schnittpunkt von N_Q mit $\cancel{\overrightarrow{QP}}$ ersetzen. $\overrightarrow{NM}$
Nennen wir P' bzw. Q' jeweils den zweiten Schnittpunkt von M_P bzw. N_Q mit MN.
Wir lesen die Punkte entlang MN so, dass M links von N ist. Nach Konstruktion ist P' links von P und Q links von Q'.
Wir wollen zeigen, dass die Punkte P', Q, P, Q' in dieser Reihenfolge angeordnet sind (wobei eventuell $P' = Q$ bzw. $Q = P$ bzw. $P = Q'$ ist).
Dann enthält M_P einen Punkt innerhalb von N_Q (nämlich P) und einen Punkt außerhalb von N_Q (nämlich P') dund die Kreise schneiden sich nach dem Kreisschnittaxiom.
[...] $\square$

Kreisschnittpunkte

$Q \quad P' \quad P \quad Q'$

MN

Satz. Die Kreise M_P und N_Q haben

2.,3. zwei Schnittpunkte wenn $|QN| \leq |PM| + |MN|$ und $|MN| \leq |MP| + |QN|$ und $|MP| \leq |MN| + |NQ|$,

die gleich sind wenn in einer der Ungleichungen Gleichheit gilt.

Beweis. [...]

Die Anordnungen die wir ausschließen wollen sind Q, P', P, Q', P', Q, Q', P und P', P, Q, Q'.

In der ersten Anordnung ist entweder $\underline{|QN|} = |QP'| + \underline{|P'M| + |MN|} \geq |P'M| + |MN|$ oder $|NQ'| = |NM| + |MP| + |PQ'| \geq |NM| + |MP|$. Nach der Voraussetzung gilt jeweils Gleichheit und damit $Q = P'$ bzw. $P = Q'$.

In der ersten Anordnung ist entweder $|P'M| = |P'Q| + |QN| + |NM| \geq |QN| + |NM|$ oder $|MP| = |MN| + |NQ'| + |Q'P| \geq |MN| + |NQ'|$. Nach der Voraussetzung gilt jeweils Gleichheit und damit $P' = Q$ bzw. $Q' = P$.

In der dritten Anordnung ist $|MN| = |MP| + |PQ| + |QN| \geq |MP| + |QN|$. Nach der Voraussetzung gilt Gleichheit, also $P = Q$. $\square$

Wie schreib ich’s auf? (Version 2)

Aufgabe. Gegeben ein Segment $\overline{PQ}$, konstruiere die Mittelsenkrechte.

Konstruktionsbeschreibung. Sei R so, dass $|PR| > \frac{1}{2}|PQ|$. Seien A und A' die Schnittpunkte von P_R und Q_{PR}. Die Gerade $\ell = AA'$ ist die Mittelsenkrechte. $\Diamond$

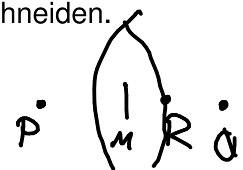
Begründung. (Den Punkt R kann man zum Beispiel nach dem Axiom „Punkte und Geraden“ aus $\overrightarrow{PQ} \setminus \overline{PQ}$ wählen.)

Es ist

$$|PR| + |PR| = 2|PR| > |PQ| \quad \text{und} \quad |PR| + |PQ| > |PR|,$$

also folgt aus dem Satz, dass sich die Kreise $P_R (= P_{PR})$ und Q_{PR} in zwei verschiedenen Punkten A und A' schneiden.

[ab hier wie gehabt ...] $\square$

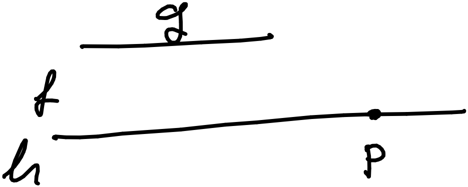


Parallelität

Proposition. Wenn $f \parallel \overset{h}{\overset{\|}{g}}$ und $\overset{f}{\overset{\|}{g}} \parallel h$, dann ist $f \parallel h$.

Beweis. Wenn $\underline{f = g}$ oder $\underline{g = h}$ ist die Aussage trivial, also nehmen wir an, dass $f \neq g \neq h$.

Angenommen f und h schneiden sich in einem Punkt P. Dann ist f die eindeutige Parallele zu g durch P. Dasselbe gilt für h. Also ist $f = h$. □



Punkte konstruieren

Wir spielen folgendes Spiel:

- Wir beginnen mit einer Menge von Punkten.
- In jedem Schritt dürfen wir zwei der Punkte P und Q der Menge auswählen und die Gerade PQ der Menge hinzufügen.
- Ziel ist es, einen gegebenen Punkt Z zur Menge hinzuzufügen.

Proposition. Wenn unsere Ausgangsmenge aus drei nicht kollinearen Punkten besteht, können wir jeden beliebigen Punkt Z nach höchstens drei Schritten zu unserer Menge hinzufügen.

Beweis. Sei g irgendeine Gerade durch Z, die nicht P, Q oder R enthält. Sie ist parallel zu höchstens einer der drei Geraden PQ, QR und PR: Wäre $g \parallel PQ$ und $g \parallel QR$, dann wäre $PQ \parallel QR$, das ist aber nicht der Fall. Sagen wir, g ist weder parallel zu PQ noch zu PR.

Schritt 1: füge PQ der Menge hinzu, Schritt 2: füge PR der Menge hinzu. Füge $ST = g$ der Menge hinzu, wobei $\{S\} = g \cap PQ$ und $\{T\} = g \cap PR$. (Merke: $S \neq T$ weil sich PQ und PR in P schneiden und $P \notin g$.) □

Unterräume, Fixpunkte

Eine Teilmenge von $\mathbb{E}^2$ ist ein Unterraum, wenn gilt: liegen P und Q in der Menge und liegt R auf PQ liegt, dann liegt auch R in der Menge.

Folgerung. Wenn ein Unterraum drei nicht kollineare Punkte enthält, ist er bereits die ganze Ebene.

Beweis. Jeder Punkt Z den wir mit unserem Spiel erreichen können, ist in einem Unterraum bereits enthalten. Wir haben gesehen, dass das für jeden Punkt gilt. □

Folgerung. Ein Unterraum ist entweder leer, ein einziger Punkt, eine Gerade, oder die ganze Ebene.

Proposition. Die Fixpunktmenge einer Bewegung φ ist entweder leer, ein einziger Punkt, eine Gerade, oder die ganze Ebene.

Beweis. Schritt 1: die Fixpunktmenge von φ ist ein Unterraum.

Schritt 2: Wende die letzte Folgerung an. □