Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

Grundlagen

Stefan Witzel

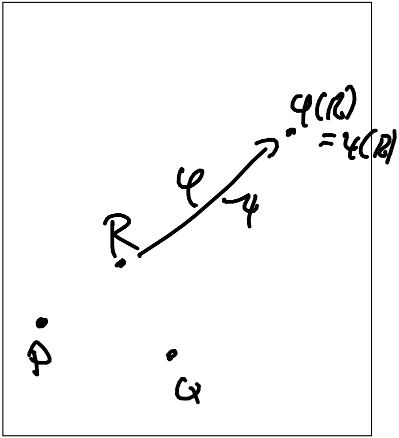
Eindeutigkeit von Bewegungen

Proposition. Die Fixpunktmenge einer Bewegung φ ist entweder leer, ein einziger Punkt, eine Gerade, oder die ganze Ebene.

Bewegungen und Dreiecke I

Folgerung. Wenn *PQR* ein Dreieck ist und φ und ψ Bewegungen mit $\varphi(P) = \psi(P)$, $\varphi(Q) = \psi(Q)$, $\varphi(R) = \psi(R)$, dann ist $\varphi = \psi$.

$$\varphi(P) = \psi(P)$$
$$\psi^{-1}(\varphi(P)) = \psi^{-1}(\psi(P)) = P$$
$$(\psi^{-1} \circ \varphi)(P)$$



Beweis. Die Bewegung $\psi^{-1} \circ \varphi$ hat drei nicht kollineare Fixpunkte *P*, *Q*, *R*.
Nach der Proposition ist jeder Punkt ein Fixpunkt.
Also $\psi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}$, das heißt $\psi = \varphi$. □

$$\psi^{-1} \circ \varphi = id$$

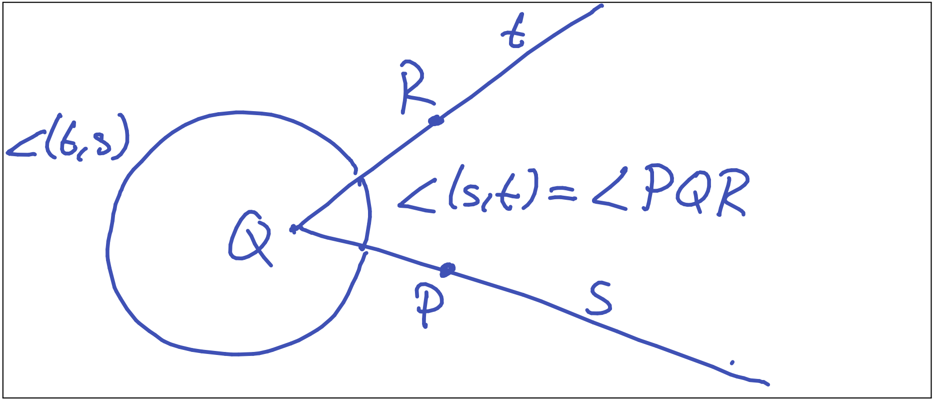
$$\varphi = \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi = \psi \circ id = \psi$$

Winkel

Ein *Winkel* $\angle(s, t)$ besteht aus zwei Strahlen s und t, die denselben Ausgangspunkt Q haben.

Die Strahlen s und t heißen *Schenkel*, der Punkt Q *Scheitel* des Winkels.

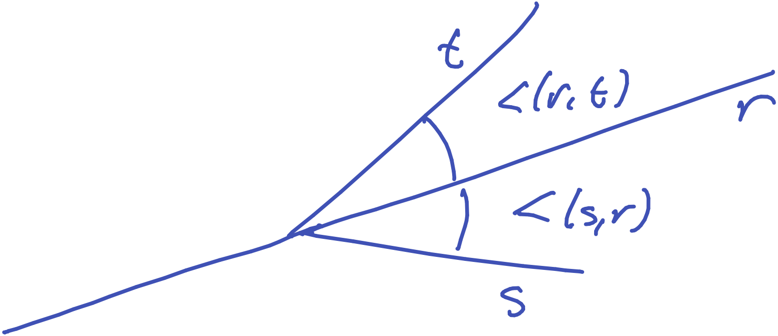
Wenn $s = \overrightarrow{QP}$ und $t = \overrightarrow{QR}$ schreiben wir auch $\angle PQR = \angle(s, t)$.



Winkelhalbierende

Problem. Gegeben einen Winkel $\angle(s, t)$, konstruiere einen Strahl r, so dass $\angle(s, r)$ ~~$\cong \angle(r, t)$.~~ und $\angle(r, t)$ kongruent sind.

Die Gerade, die r enthält, ist die *Winkelhalbierende* von $\angle(s, t)$.



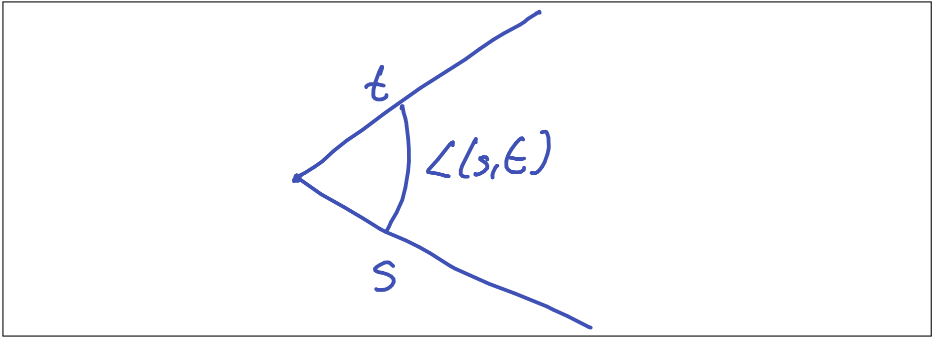
Winkelhalbierende

Problem. Gegeben einen Winkel $\angle(s, t)$, konstruiere einen Strahl r, so dass $\angle(s, r)$ $\cancel{\cong \angle(r, t)}$ und $\angle(r, t)$ kongruent sind.

Die Gerade, die r enthält, ist die *Winkelhalbierende* von $\angle(s, t)$.

Folgerung. Die Winkel $\angle(s, t)$ und $\angle(t, s)$ sind kongruent zueinander.

Beweis. Die Spiegelung an der Winkelhalbierenden bildet $\angle(s, t)$ auf $\angle(t, s)$ ab. □



Nebenwinkel, Gegenwinkel

Seien g und h Geraden, die sich in einem Punkt Q schneiden. Seien s und s' die Strahlen ab Q in g. Seien t und t' die Strahlen ab Q in h.

Die Winkel $\overset{\alpha}{\angle}(s, t)$ und $\overset{\beta}{\angle}(t, s')$ sind *Nebenwinkel*.

Die Winkel $\angle(s, t)$ und $\underbrace{\angle(s', t')}_{\gamma}$ sind *Gegenwinkel*.