Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

Grundlagen

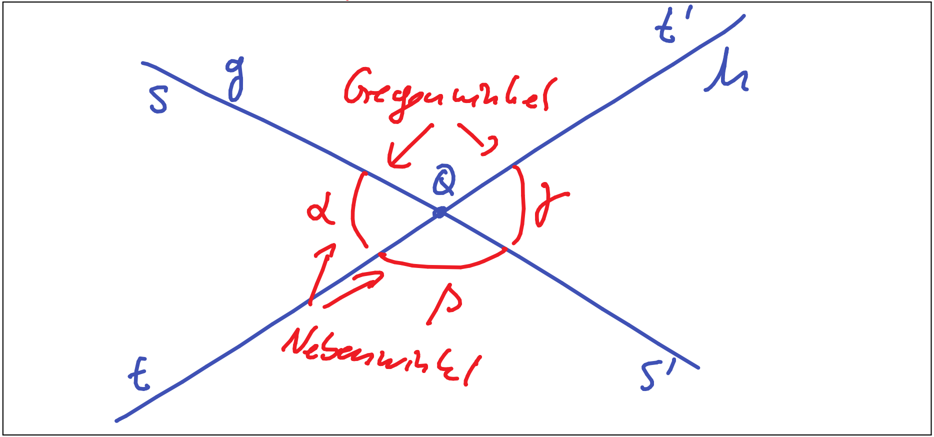
Stefan Witzel

Nebenwinkel, Gegenwinkel

Seien g und h Geraden, die sich in einem Punkt Q schneiden. Seien s und s' die Strahlen ab Q in g. Seien t und t' die Strahlen ab Q in h.

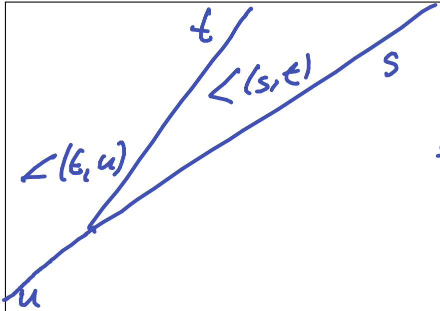
Die Winkel $\overset{\alpha}{\angle}(s,t)$ und $\overset{\beta}{\angle}(t,s')$ sind *Nebenwinkel*.

Die Winkel $\angle(s,t)$ und $\underset{\gamma}{\underline{\angle(s',t')}}$ sind *Gegenwinkel*.



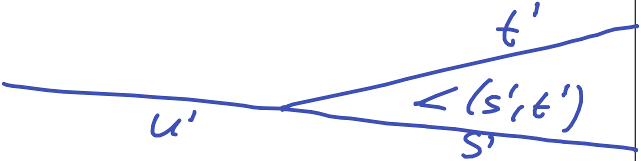
Nebenwinkel

Proposition. Nebenwinkel von kongruenten Winkeln sind kongruent.



$$\angle(s,t) \equiv \angle(s',t')$$

$$\Rightarrow \angle(t,u) \equiv \angle(t',u')$$



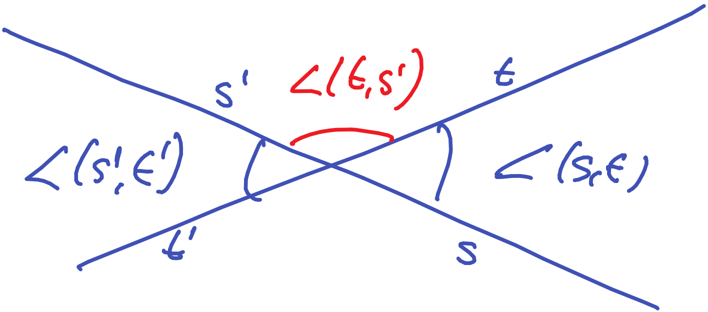
Nebenwinkel

Proposition. Nebenwinkel von kongruenten Winkeln sind kongruent.

Beweis. Seien $\angle(s,t)$ und $\angle(s',t')$ kongruente Winkel.
Sei φ eine Bewegung, die $\angle(s,t)$ auf $\angle(s',t')$ abbildet.
Sei u der zu s komplementäre Strahl und u' der zu s' komplementäre.
Dann bildet φ den eindeutigen zu s komplementären Strahl u auf den eindeutigen zu s' komplementären Strahl u' ab: $\varphi(u) = u'$.
Also bildet φ den Winkel $\angle(t,u)$ auf $\angle(t',u')$ ab. $\square$

Gegenwinkel

Folgerung. Gegenwinkel sind zueinander kongruent.



$$\angle(s,t) \equiv \angle(s',t')$$

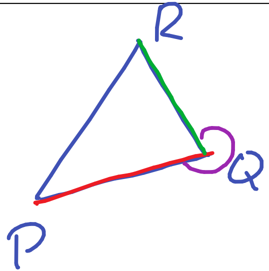
Gegenwinkel

Folgerung. Gegenwinkel sind zueinander kongruent.

Beweis. Seien $\angle(s,t)$ und $\angle(s',t')$ Gegenwinkel.
Die Winkel $\angle(t,s')$ und $\angle(t,s')$ sind Nebenwinkel dieser Winkel.
Sie sind zueinander kongruent, also sind auch ihre Gegenwinkel kongruent. $\square$

Zweiter Kongurenzsatz

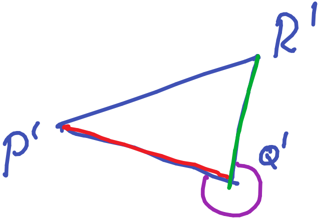
Satz (Kongruenzsatz „SWS“). Wenn PQR und $P'Q'R'$ Dreiecke sind mit $|PQ| = |P'Q'|$ und $|QR| = |Q'R'|$ und wenn $\angle PQR$ kongruent ist zu $\angle P'Q'R'$, dann ist PQR kongruent zu $P'Q'R'$.



es ex. Bewegung

$\overrightarrow{QP} \to \overrightarrow{Q'P'}$

$\overrightarrow{QR} \to \overrightarrow{Q'R'}$



Zweiter Kongurenzsatz

Satz (Kongruenzsatz „SWS“). Wenn PQR und $P'Q'R'$ Dreiecke sind mit $|PQ| = |P'Q'|$ und $|QR| = |Q'R'|$ und wenn $\angle PQR$ kongruent ist zu $\angle P'Q'R'$, dann ist PQR kongruent zu $P'Q'R'$.

Beweis. Sei φ eine Bewegung, die $\angle PQR$ auf $\angle P'Q'R'$ abbildet.
Dann bildet φ den Punkt P auf P' ab:
P ist der eindeutigen Punkt auf $\overrightarrow{QP}$ mit Abstand $|QP|$ von Q;
P' ist der eindeutige Punkt auf $\overrightarrow{Q'P'}$ mit Abstand $|Q'P'| = |QP|$ von Q'.
Ein analoges Argument zeigt, dass $\varphi(R) = R'$. $\square$

Weitere Kongruenzsätze

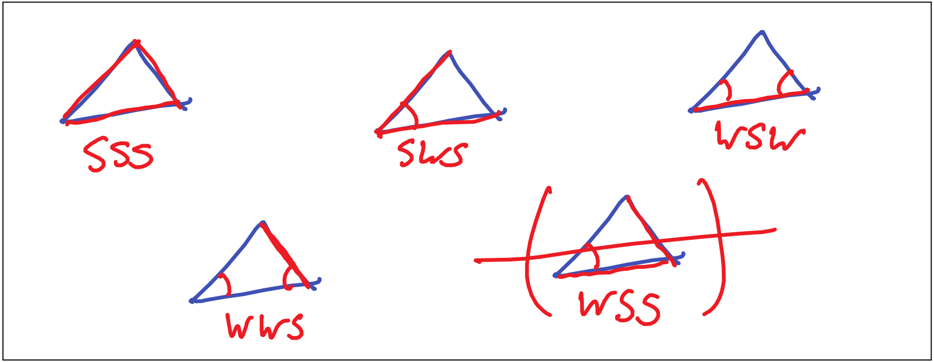
Satz (Kongruenzsätze). Wenn PQR und $P'Q'R'$ Dreiecke sind mit

(WSW) $|PQ| = |P'Q'|$, $\angle QPR \equiv \angle Q'P'R'$ und $\angle PQR \equiv P'Q'R'$ oder

(WWS) $|PQ| = |P'Q'|$, $\angle QPR \equiv \angle Q'P'R'$ und $\angle QRP \equiv Q'R'P'$ oder

(~~(WSS) $|PQ| = |P'Q'|$, $|QR| = |Q'R|$ und $\angle QPR \equiv \angle Q'P'R'$~~)

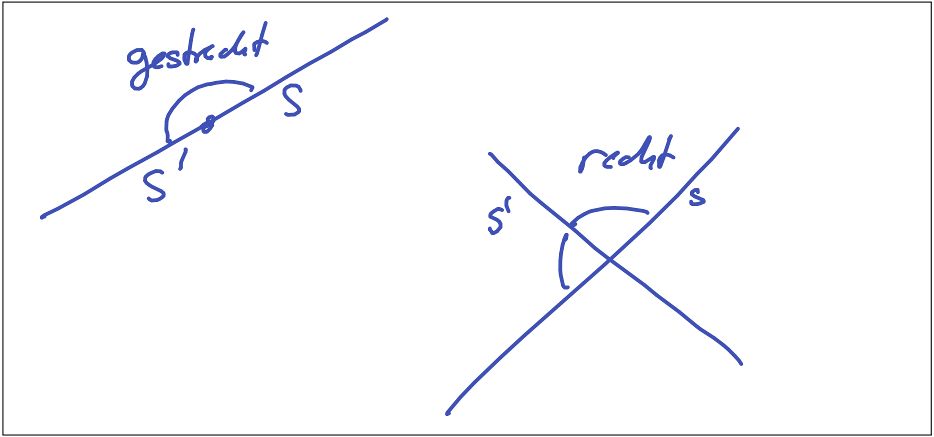
dann ist PQR kongruent zu $P'Q'R'$.



Gestreckte und rechte Winkel

Der Winkel $\angle(s, s')$ zwischen zwei Strahlen s uns s' die eine Gerade bilden ist ein *gestreckter Winkel*.

Ein Winkel der kongruent zu einem Nebenwinkel ist, ist ein *rechter Winkel*.



Gestreckte und rechte Winkel

Der Winkel $\angle(s, s')$ zwischen zwei Strahlen s uns s' die eine Gerade bilden ist ein *gestreckter Winkel*.

Ein Winkel der kongruent zu einem Nebenwinkel ist, ist ein *rechter Winkel*.
Aus der Eindeutigkeit von Spiegelungen folgt:

Proposition. Rechte Winkel sind kongruent zueinander.

Winkel messen

Wir ordnen Winkeln eine Gradzahl zwischen 0° und 180° zu:

Ein trivialer Winkel $\angle(s, s)$ misst 0°.

Ein rechter Winkel misst 90°.

Ein gestreckter Winkel misst 180°.

Winkel messen

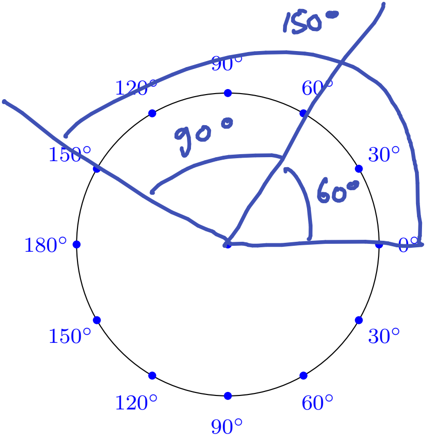
Wir ordnen Winkeln eine Gradzahl zwischen 0° und 180° zu:

Ein trivialer Winkel $\angle(s, s)$ misst 0°.

Ein rechter Winkel misst 90°.

Ein gestreckter Winkel misst 180°.

Die Summe von zwei Winkeln,
die x° und y° messen, misst $(x + y)$°,
vorausgesetzt $x + y \leq 180$.



Winkel messen

Wir ordnen Winkeln eine Gradzahl zwischen 0° und 180° zu:

Ein trivialer Winkel $\angle(s, s)$ misst 0°.

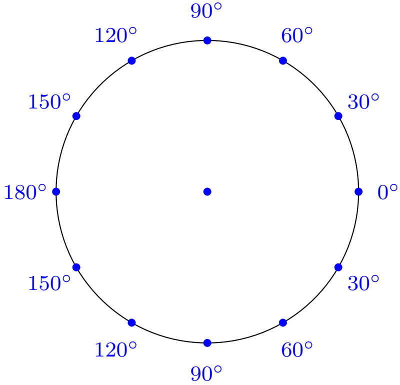
Ein rechter Winkel misst 90°.

Ein gestreckter Winkel misst 180°.

Die Summe von zwei Winkeln,
die x° und y° messen, misst $(x + y)^\circ$,
vorausgesetzt $x + y \leq 180$.

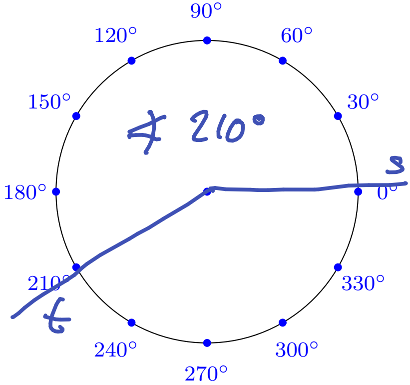
Kleinere Winkel messen
kleinere Gradzahlen.

Wir schreiben einfach $\angle(s, t) = x^\circ$.



Winkel messen (algebraisch)

Wenn wir den Winkel zwischen zwei Strahlen s und t im Gegenurzeigersinn messen, können wir ihm eine Zahl zwischen 0° und 360° zuordnen.



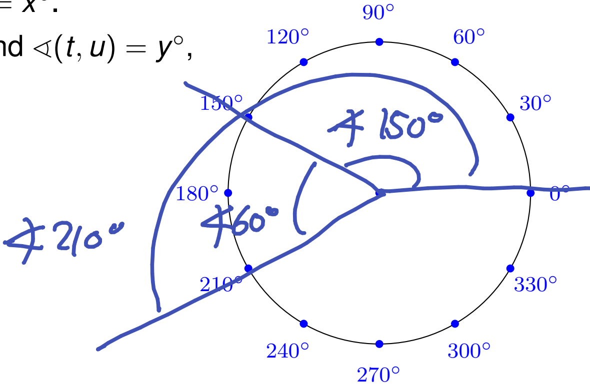
Winkel messen (algebraisch)

Wenn wir den Winkel zwischen zwei Strahlen *s* und *t* im Gegenurzeigersinn messen, können wir ihm eine Zahl zwischen 0° und 360° zuordnen.

$\ldots -720^\circ = -360^\circ = 0^\circ = 360^\circ = 720^\circ \ldots$

Wir schreiben dann $\sphericalangle(s, t) = x^\circ$.

Vorteil: wenn $\sphericalangle(s, t) = x^\circ$ und $\sphericalangle(t, u) = y^\circ$, dann $\sphericalangle(s, u) = (x + y)^\circ$.



Winkel messen (algebraisch)

Wenn wir den Winkel zwischen zwei Strahlen s und t im Gegenurzeigersinn messen, können wir ihm eine Zahl zwischen 0° und 360° zuordnen.

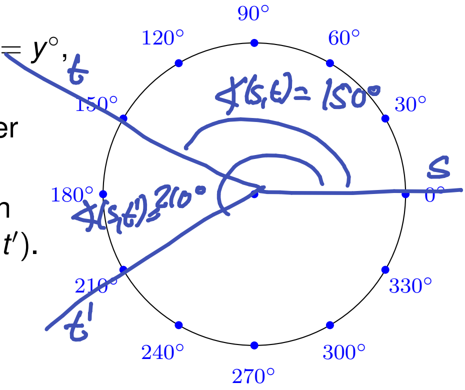
$\ldots -720^\circ = -360^\circ = 0^\circ = 360^\circ = 720^\circ \ldots$

Wir schreiben dann $\sphericalangle(s,t) = x^\circ$.

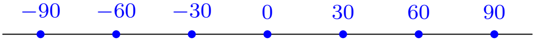
Vorteil: wenn $\sphericalangle(s,t) = x^\circ$ und $\sphericalangle(t,u) = y^\circ$, dann $\sphericalangle(s,u) = (x+y)^\circ$.

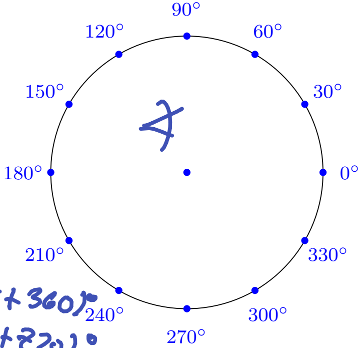
Nachteil: $\sphericalangle(s,t)$ ist nicht invariant unter Kongruenz!

Die Winkel $\angle(s,t)$ und $\angle(s',t')$ können kongruent sein, aber $\sphericalangle(s,t) = -\sphericalangle(s',t')$.



Meta: Zahlen und Relationen

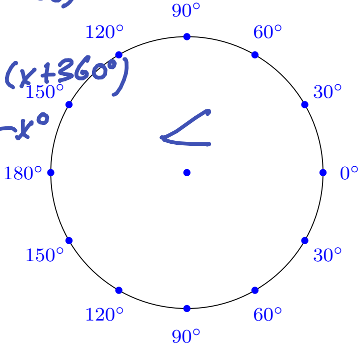


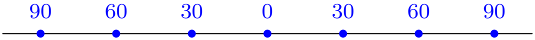


$x \longmapsto x^\circ$

$x^\circ = (x+360)^\circ = (x+720)^\circ = \dots$

$|x| = |0x| \longmapsto x^\circ = (x+360^\circ) = -x^\circ$

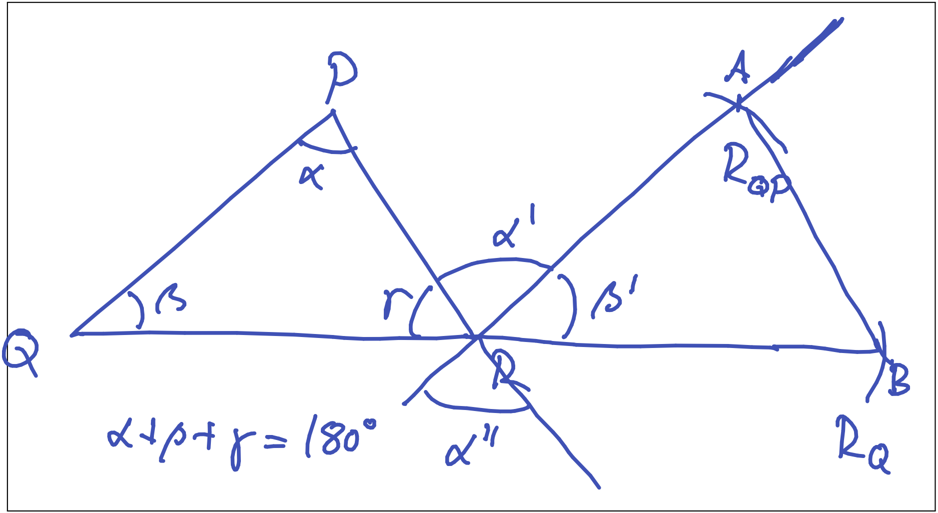




$|x| = |-x|$

Winkelsumme

Proposition. Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°. Das heißt, ist PQR ein beliebiges Dreieck, dann ist die Summe von $\angle PQR$, $\angle QRP$ und $\angle RPQ$ gerade 180°.



Winkelsumme

Proposition. Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°. Das heißt, ist PQR ein beliebiges Dreieck, dann ist die Summe von $\angle PQR$, $\angle QRP$ und $\angle RPQ$ gerade 180°.

Beweis. Sei g die zu PQ parallele Gerade durch R. Sei A der Schnittpunkt von R_{QP} mit g der im selben Halbraum von QR liegt, wie P. Sei B der von Q verschiedene Schnittpunkt von R_Q und QR.
Wir wollen zeigen, dass $\angle QPR \equiv \angle ARP$ und $\angle PQR \equiv \angle ARB$.
Sei τ_{QR} die Translation, die Q auf P abbildet. Es ist $\tau_{PQ}(\angle PQR) = \angle ARB$.
QR
Sei τ_{PR} die Translation, die P auf R abbildet. Der Winkel $\tau_{PR}(\angle QPR)$ ist ein Gegenwinkel von $\angle ARP$, also $\angle QPR \equiv \angle ARP$. □