Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

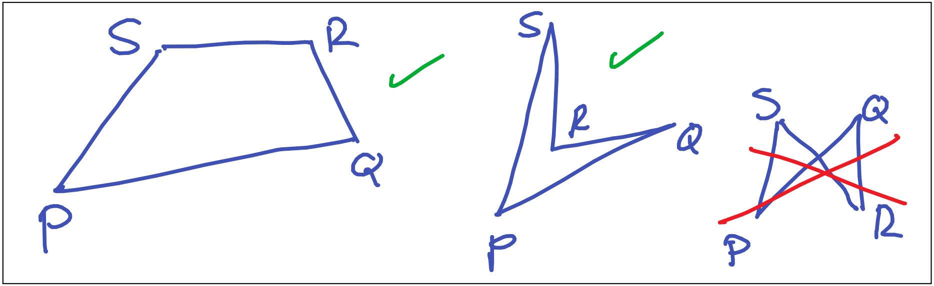
Sommersemester 2018

Elemente, Buch I

Stefan Witzel

Vierecke

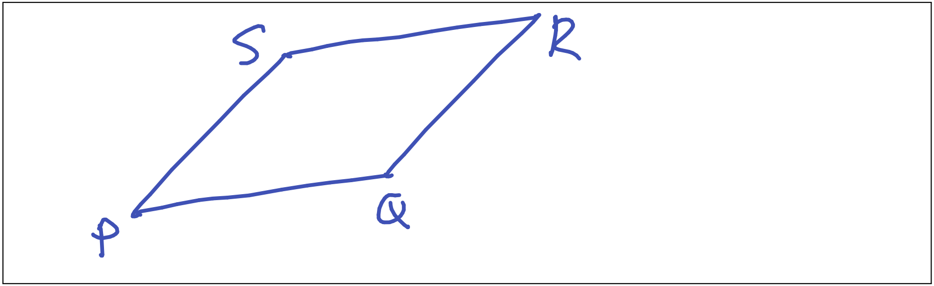
Vier Punkte P, Q, R, S bilden ein Viereck $PQRS$, wenn sich weder die Segmente $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ noch die Segmente $\overline{QR}$ und $\overline{PS}$ schneiden.



Vierecke

Vier Punkte P, Q, R, S bilden ein Viereck $PQRS$, wenn sich weder die Segmente $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ noch die Segmente $\overline{QR}$ und $\overline{PS}$ schneiden.

Das Viereck $PQRS$ ist ein Parallelogramm wenn $PQ \parallel RS$ und $QR \parallel PS$.

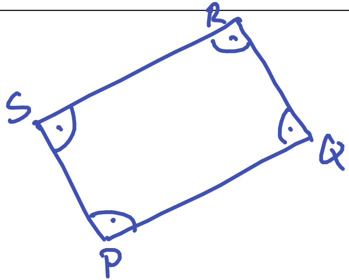


Vierecke

Vier Punkte P, Q, R, S bilden ein Viereck $PQRS$, wenn sich weder die Segmente $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ noch die Segmente $\overline{QR}$ und $\overline{PS}$ schneiden.

Das Viereck $PQRS$ ist ein Parallelogramm wenn $PQ \parallel RS$ und $QR \parallel PS$.

Ein Viereck ist ein Rechteck wenn es nur rechte Winkel hat.



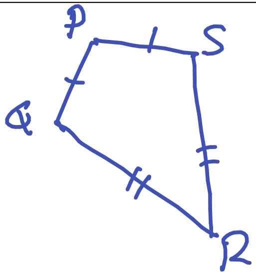
Vierecke

Vier Punkte P, Q, R, S bilden ein Viereck $PQRS$, wenn sich weder die Segmente $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ noch die Segmente $\overline{QR}$ und $\overline{PS}$ schneiden.

Das Viereck $PQRS$ ist ein Parallelogramm wenn $PQ \parallel RS$ und $QR \parallel PS$.

Ein Viereck ist ein Rechteck wenn es nur rechte Winkel hat.

Ein Drachenviereck $PQRS$ hat $|PQ| = |PS|$ und $|QR| = |RS|$.



Vierecke

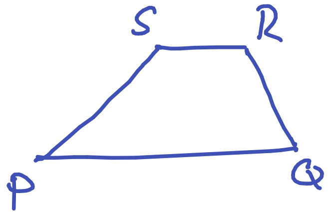
Vier Punkte P, Q, R, S bilden ein Viereck $PQRS$, wenn sich weder die Segmente $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ noch die Segmente $\overline{QR}$ und $\overline{PS}$ schneiden.

Das Viereck $PQRS$ ist ein Parallelogramm wenn $PQ \parallel RS$ und $QR \parallel PS$.

Ein Viereck ist ein Rechteck wenn es nur rechte Winkel hat.

Ein Drachenviereck $PQRS$ hat $|PQ| = |PS|$ und $|QR| = |RS|$.

Das Viereck $PQRS$ ist ein Trapez wenn $PQ \parallel RS$.



Vierecke

Vier Punkte P, Q, R, S bilden ein Viereck $PQRS$, wenn sich weder die Segmente $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ noch die Segmente $\overline{QR}$ und $\overline{PS}$ schneiden.

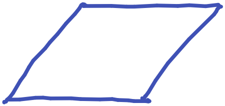
Das Viereck $PQRS$ ist ein Parallelogramm wenn $PQ \parallel RS$ und $QR \parallel PS$.

Ein Viereck ist ein Rechteck wenn es nur rechte Winkel hat.

Ein Drachenviereck $PQRS$ hat $|PQ| = |PS|$ und $|QR| = |RS|$.

Das Viereck $PQRS$ ist ein Trapez wenn $PQ \parallel RS$.

Das Viereck $PQRS$ ist eine Raute wenn alle Seiten gleich lang sind.



Vierecke

Vier Punkte P, Q, R, S bilden ein Viereck $PQRS$, wenn sich weder die Segmente $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ noch die Segmente $\overline{QR}$ und $\overline{PS}$ schneiden.

Das Viereck $PQRS$ ist ein Parallelogramm wenn $PQ \parallel RS$ und $QR \parallel PS$.

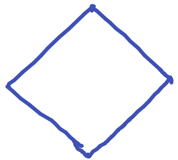
Ein Viereck ist ein Rechteck wenn es nur rechte Winkel hat.

Ein Drachenviereck $PQRS$ hat $|PQ| = |PS|$ und $|QR| = |RS|$.

Das Viereck $PQRS$ ist ein Trapez wenn $PQ \parallel RS$.

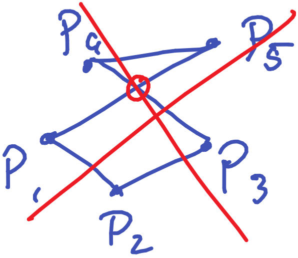
Das Viereck $PQRS$ ist eine Raute wenn alle Seiten gleich lang sind.

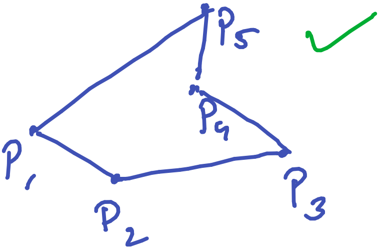
Das Viereck ist ein Quadrat wenn es ein Rechteck und eine Raute ist.



Polygone

Punkte $P_1, \ldots, P_n$ bilden ein n-Eck $P_1 \ldots P_n$, mit Ecken P_i und Kanten $\overline{P_i P_{i+1}}$ wenn sich nur benachbarte Kanten schneiden und das nur in den Ecken.



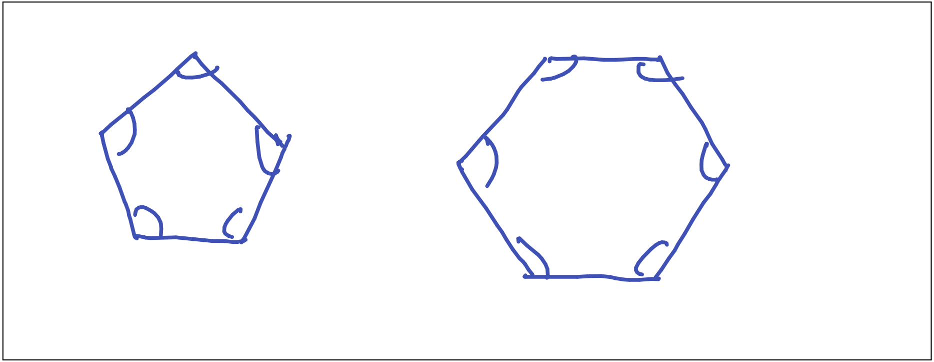


Polygone

Punkte $P_1, \ldots, P_n$ bilden ein n-Eck $P_1 \ldots P_n$, mit Ecken P_i und Kanten $\overline{P_i P_{i+1}}$ wenn sich nur benachbarte Kanten schneiden und das nur in den Ecken.

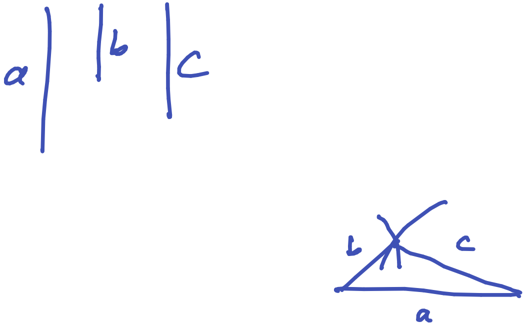
Ein n-Eck $P_1 \ldots P_n$ ist regelmäßig wenn

- alle Seiten $\overline{P_i P_{i+1}}$ zueinander kongruent sind (also gleich lang) und
- alle Winkel $\angle P_{i-1} P_i P_{i+1}$ zueinander kongruent sind (also gleiches Winkelmaß haben).



Dreieck mit gegebenen Kantenlängen

Problem. Seien $a = \overline{A_1 A_2}$, $b = \overline{B_1 B_2}$ und $c = \overline{C_1 C_2}$ Segmente, deren Längen die drei Dreiecksungleichungen erfüllen, also
$|A_1 A_2| \leq |B_1 B_2| + |C_1 C_2|$, $|B_1 B_2| \leq |A_1 A_2| + |C_1 C_2|$,
$|C_1 C_2| \leq |A_1 A_2| + |C_1 C_2|$. Konstruiere ein Dreieck PQR mit
$|PQ| = |A_1 A_2|$, $|QR| = |B_1 B_2|$ und $|PR| = |C_1 C_2|$.



Dreieck mit gegebenen Kantenlängen

Problem. Seien $a = \overline{A_1A_2}$, $b = \overline{B_1B_2}$ und $c = \overline{C_1C_2}$ Segmente, deren Längen die drei Dreiecksungleichungen erfüllen, also $|A_1A_2| \leq |B_1B_2| + |C_1C_2|$, $|B_1B_2| \leq |A_1A_2| + |C_1C_2|$, $|C_1C_2| \leq |A_1A_2| + |C_1C_2|$. Konstruiere ein Dreieck PQR mit $|PQ| = |A_1A_2|$, $|QR| = |B_1B_2|$ und $|PR| = |C_1C_2|$.

Konstruktion. Wähle $P = A_1$, $Q = A_2$ und R als den Schnittpunkt von $P_{C_1C_2}$ und $Q_{B_1B_2}$. $\Diamond$

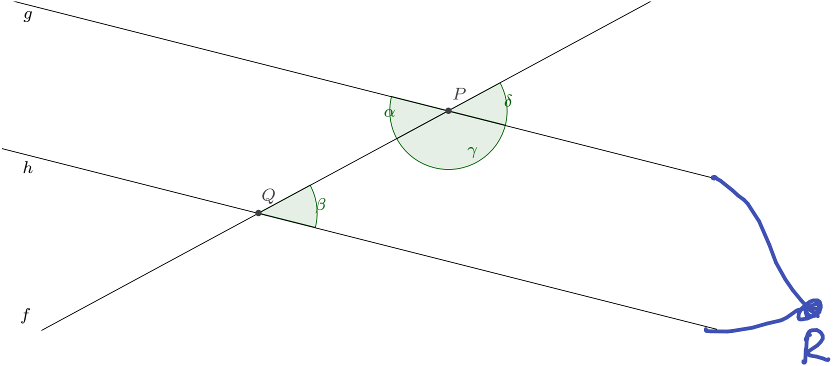
Folgerung. Drei Längen $|A_1A_2|$, $|B_1B_2|$ und $|C_1C_2|$ sind genau dann die Kantenlängen eines Dreiecks, wenn sie die drei Dreiecksungleichungen erfüllen.

Gerade und Parallelen, 1

Proposition. Wenn eine Gerade *f* von zwei Geraden *g* und *h* geschnitten wird und

1. die *wechselseitigen Winkel* α und β gleich sind oder
2. die *Stufenwinkel* δ und β gleich sind oder
3. die beiden *innen liegenden Winkel* β und γ zusammen 180° messen,

dann ist *g* parallel zu *h*.



Gerade und Parallelen, 1

Proposition. Wenn eine Gerade f von zwei Geraden g und h geschnitten wird und

1. die *wechselseitigen Winkel* α und β gleich sind oder
2. die *Stufenwinkel* δ und β gleich sind oder
3. die beiden *innen liegenden Winkel* β und γ zusammen 180° messen,

dann ist g parallel zu h.

Beweis. Nebenwinkelsatz, Gegenwinkelsatz: die drei Bedingungen sind äquivalent.

Angenommen es gäbe einen Schnittpunkt R, dann wäre PQR ein Dreieck mit Winkelsumme $\neq 180^\circ$. $\square$