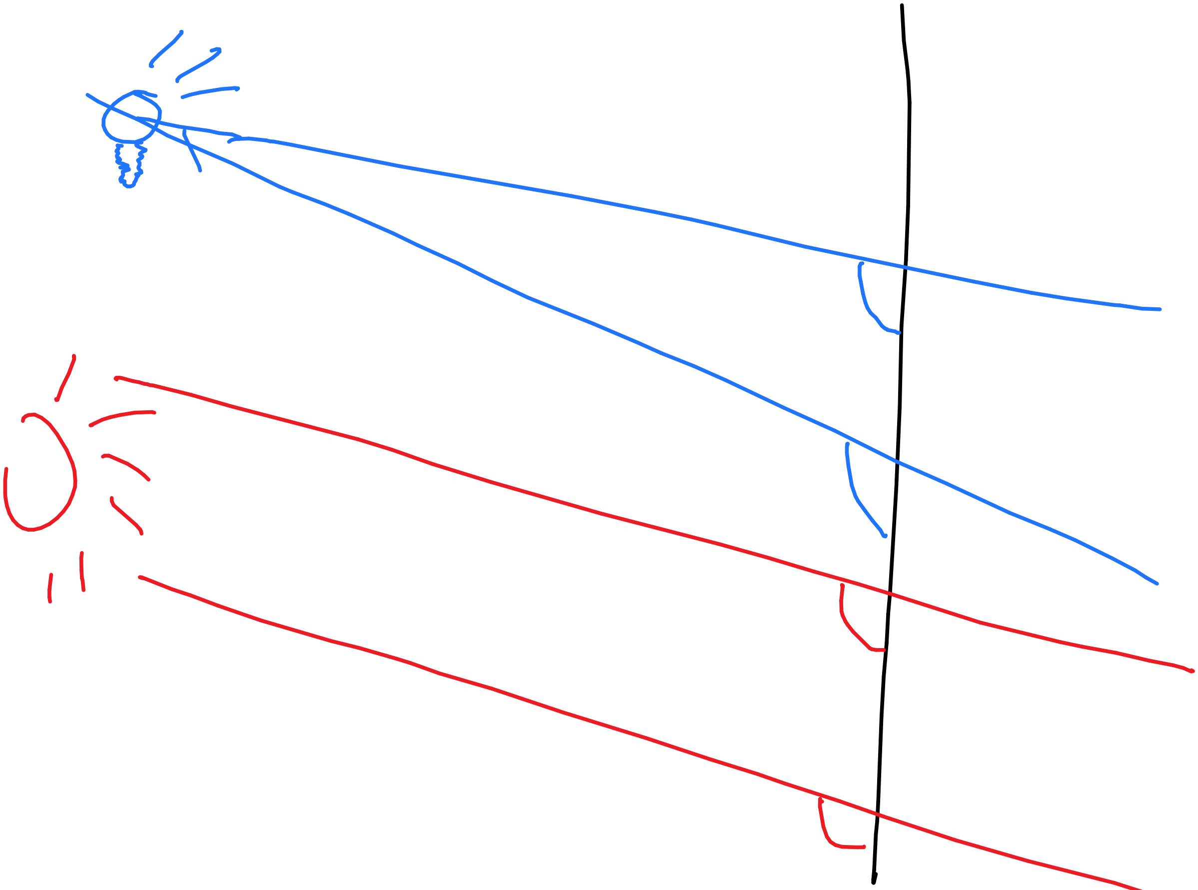
Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

Elemente, Buch I

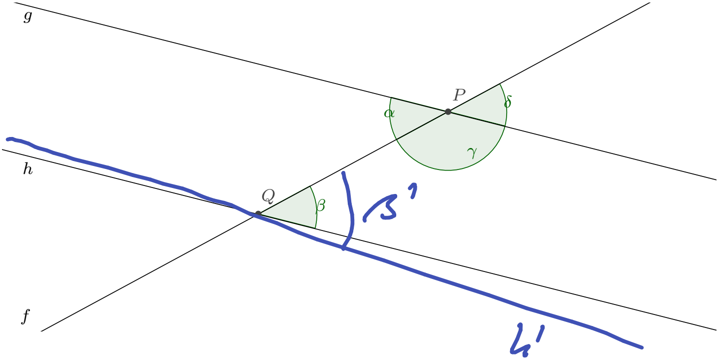
Stefan Witzel



Gerade und Parallelen, 2

Proposition. Wenn eine Gerade *f* von zwei parallelen Geraden *g* und *h* geschnitten wird, dann

1. sind die *wechselseitigen Winkel* α und β gleich und
2. sind die *Stufenwinkel* δ und β gleich und
3. messen die beiden *innen liegenden Winkel* β und γ zusammen 180°.



Gerade und Parallelen, 2

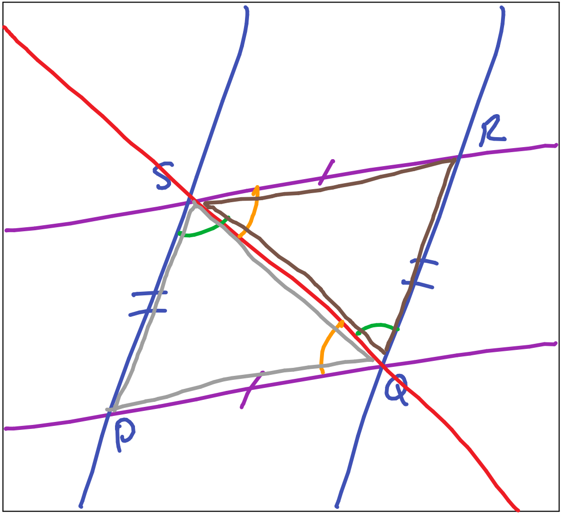
Proposition. Wenn eine Gerade f von zwei parallelen Geraden g und h geschnitten wird, dann

1. sind die *wechselseitigen Winkel* α und β gleich und
2. sind die *Stufenwinkel* δ und β gleich und
3. messen die beiden *innen liegenden Winkel* β und γ zusammen 180°.

Beweis. Wenn h' die Gerade ist, deren Winkel β' zusammen mit γ genau 180° misst, dann wissen wir, dass $g \parallel h'$.
Aus dem Parallelenaxiom folgt jetzt, dass $h = h'$, also $\beta = \beta'$. $\square$

Parallelogramme

Proposition. Wenn $PQRS$ ein Parallelogramm ist, dann ist $|PQ| = |RS|$ und $|QR| = |PS|$.



$PQ, RS, SQ \rightsquigarrow$

$\sphericalangle RSQ \equiv \sphericalangle PQS$

$PS, QR, SQ \rightsquigarrow$

$\sphericalangle PSQ \equiv \sphericalangle RQS$

WSW $\Rightarrow$

$PSQ \equiv RQS$

$|PS| = |RQ|$

$|PQ| = |RS|$

Parallelogramme

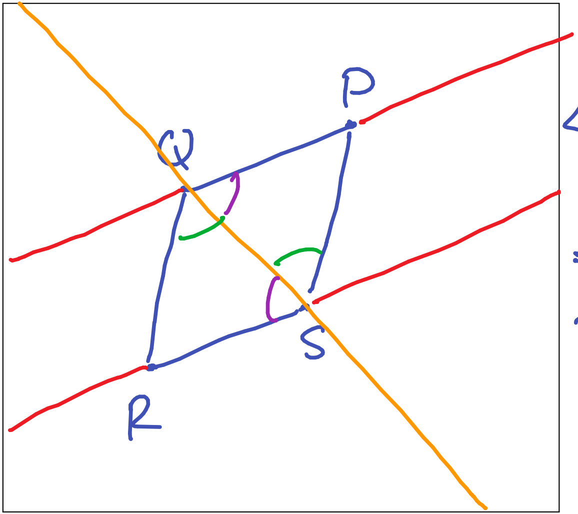
Proposition. Wenn $PQRS$ ein Parallelogramm ist, dann ist $|PQ| = |RS|$ und $|QR| = |PS|$.

Beweis. Da PS und QR parallel sind, sind $\angle PSQ$ und $\angle SQR$ wechselseitige Winkel und deshalb kongruent.
Genauso sind $\angle PQS$ und $\angle SQR$ wechselseitige Winkel und damit kongruent.
Die beiden Dreiecke PQS und RQS haben somit eine gleichlange Seite, die von zwei kongruenten Winkeln eingeschlossen wird.
Nach dem Kongruenzsatz „WSW“ sind sie also kongruent.
Es folgt $|PQ| = |RS|$ und $|PS| = |QR|$. □

Parallele Segmente

Segmente $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ sind parallel, wenn $PQ \parallel RS$ und $|PQ| = |RS|$.

Proposition. Wenn Segmente $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ parallel sind, dann ist $PQRS$ ein Parallelogramm.



$PQ, RS, QS \rightsquigarrow$

$\angle SQP \equiv \angle QSR$

$SWS \Rightarrow PQS \equiv RSQ$

$\Rightarrow \angle RQS \equiv \angle PSQ$

$PS, QR, QS \rightsquigarrow$

$PS \parallel RQ$

Parallele Segmente

Segmente $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ sind parallel, wenn $PQ \parallel RS$ und $|PQ| = |RS|$.

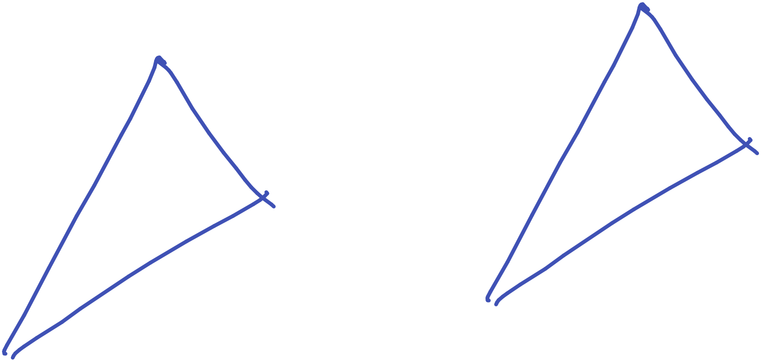
Proposition. Wenn Segmente $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ parallel sind, dann ist $PQRS$ ein Parallelogramm.

Beweis. Weil $PQ \parallel RS$ sind die wechselseitigen Winkel $\angle PSQ$ und $\angle RQS$ kongruent.
Außerdem sind die Seiten $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ gleich lang.
Nach dem Kongruenzsatz „SWS“ folgt, dass $PSQ \equiv RQS$.
Insbesondere ist $\angle PSQ \equiv \angle RQS$.
Das sind aber die wechselseitigen Winkel der Geraden PS und RQ, also sind diese parallel. □

Flächeninhalt

Wir definieren den Flächeninhalt von geradlinig umrandeten Figuren mit folgenden Regeln:

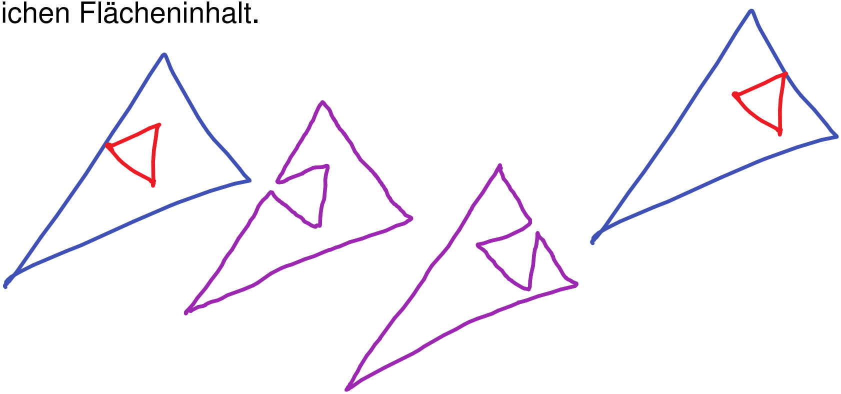
- Kongruente Figuren haben gleichen Flächeninhalt.



Flächeninhalt

Wir definieren den Flächeninhalt von geradlinig umrandeten Figuren mit folgenden Regeln:

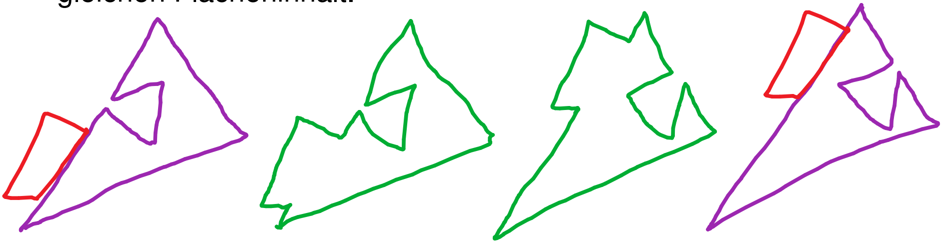
- Kongruente Figuren haben gleichen Flächeninhalt.
- Wenn man von Figuren mit gleichem Flächeninhalt Figuren mit gleichem Flächeninhalt entfernt, haben die resultierenden Figuren gleichen Flächeninhalt.



Flächeninhalt

Wir definieren den Flächeninhalt von geradlinig umrandeten Figuren mit folgenden Regeln:

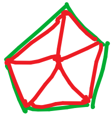
- Kongruente Figuren haben gleichen Flächeninhalt.
- Wenn man von Figuren mit gleichem Flächeninhalt Figuren mit gleichem Flächeninhalt entfernt, haben die resultierenden Figuren gleichen Flächeninhalt.
- Wenn man zu Figuren mit gleichem Flächeninhalt Figuren mit gleichem Flächeninhalt hinzufügt, haben die resultierenden Figuren gleichen Flächeninhalt.



Flächeninhalt

Wir definieren den Flächeninhalt von geradlinig umrandeten Figuren mit folgenden Regeln:

- Kongruente Figuren haben gleichen Flächeninhalt.
- Wenn man von Figuren mit gleichem Flächeninhalt Figuren mit gleichem Flächeninhalt entfernt, haben die resultierenden Figuren gleichen Flächeninhalt.
- Wenn man zu Figuren mit gleichem Flächeninhalt Figuren mit gleichem Flächeninhalt hinzufügt, haben die resultierenden Figuren gleichen Flächeninhalt.
- Wenn eine Figuren f aus m Figuren $g_1, \ldots, g_m$ mit gleichem Flächeninhalt besteht, dann ist der Flächeninhalt von f der m-fache Flächeninhalt der g_i.



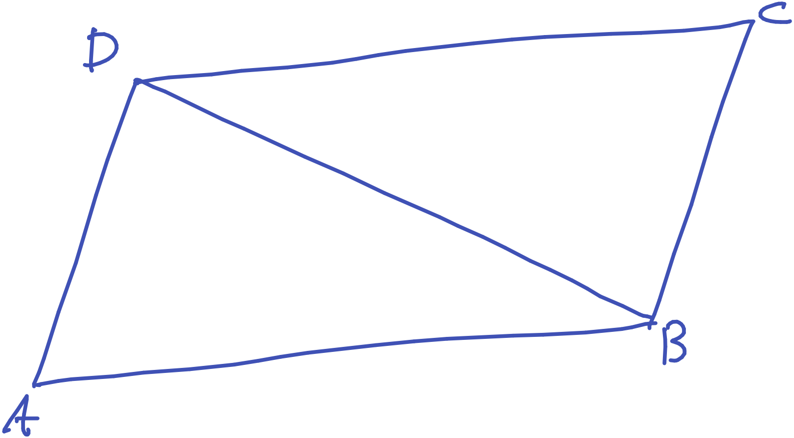
Flächeninhalt

Wir definieren den Flächeninhalt von geradlinig umrandeten Figuren mit folgenden Regeln:

- Kongruente Figuren haben gleichen Flächeninhalt.
- Wenn man von Figuren mit gleichem Flächeninhalt Figuren mit gleichem Flächeninhalt entfernt, haben die resultierenden Figuren gleichen Flächeninhalt.
- Wenn man zu Figuren mit gleichem Flächeninhalt Figuren mit gleichem Flächeninhalt hinzufügt, haben die resultierenden Figuren gleichen Flächeninhalt.
- Wenn eine Figuren f aus m Figuren $g_1, \ldots, g_m$ mit gleichem Flächeninhalt besteht, dann ist der Flächeninhalt von f der m-fache Flächeninhalt der g_i.
- Ein Rechteck mit Kantenlängen 1 und m hat Flächeninhalt m.

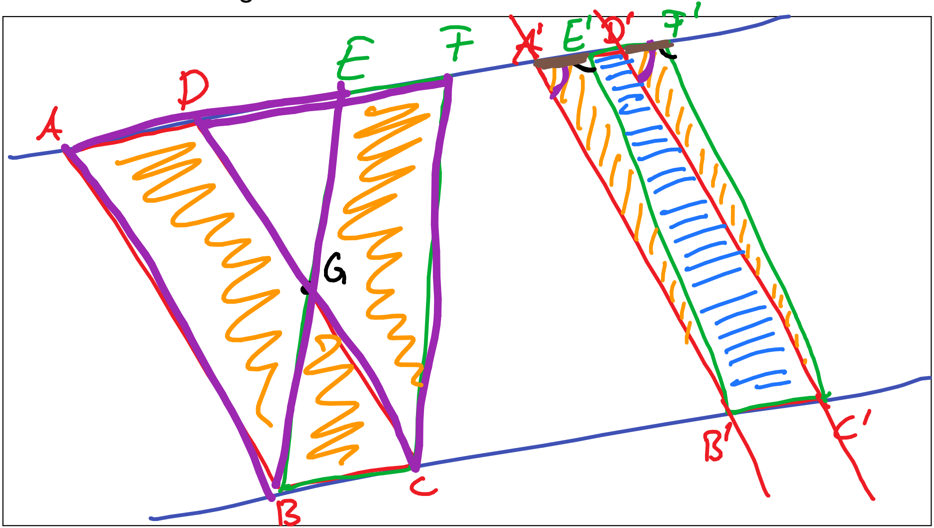
Flächeninhalt von Dreieck und Parallelogramm

Proposition. Wenn $ABCD$ eine Parallelogramm ist, dann sind die Dreiecke ABD und CDB kongruent und haben deshalb den halben Flächeninhalt des Parallelogramms.



Parallelen und Flächeninhalt

Proposition. Seien g und h parallele Geraden und seien $ABCD$ und $EBCF$ Parallelogramme mit $A, D, E, F \in g$ und $B, C \in h$. Dann haben $ABCD$ und $EBCF$ gleichen Flächeninhalt.



Parallelen und Flächeninhalt

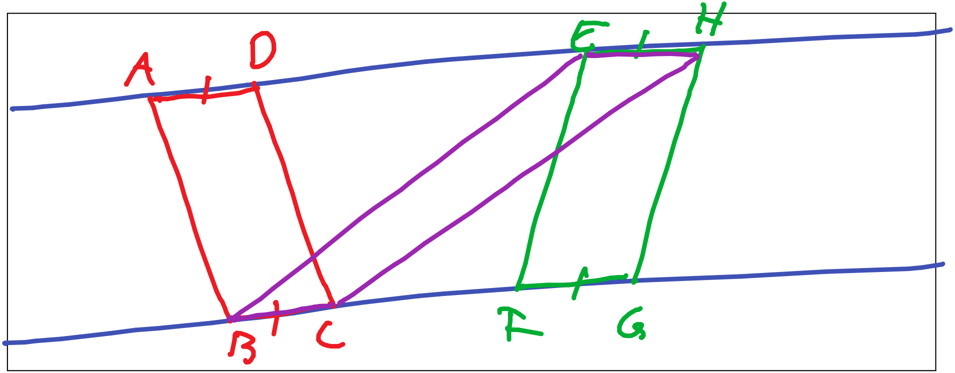
Proposition. Seien g und h parallele Geraden und seien $ABCD$ und $EBCF$ Parallelogramme mit $A, D, E, F \in g$ und $B, C \in h$. Dann haben $ABCD$ und $EBCF$ gleichen Flächeninhalt.

Beweis (Fall ADEF). Es ist $|AD| = |BC| = |EF|$ und $|AB| = |CD|$ und $|BE| = |CF|$.
Sei G der Schnittpunkt von $\overline{BE}$ und $\overline{CD}$. Nach dem Kongruenzsatz SSS ist $ABE \equiv DCF$.
Entfernen DGE ergibt, dass $ABGD$ und $EGCF$ flächengleich sind.
Durch Hinzufügen von BCG sehen wir, dass $ABCD$ und $EBCF$ flächengleich sind. $\square$

Parallelen und Flächeninhalt

Proposition. Seien g und h parallele Geraden und seien $ABCD$ und $EBCF$ Parallelogramme mit $A, D, E, F \in g$ und $B, C \in h$. Dann haben $ABCD$ und $EBCF$ gleichen Flächeninhalt.

Folgerung. Seien g und h parallele Geraden und seien $ABCD$ und $EFGH$ Parallelogramme mit $A, D, E, H \in g$, $B, C, F, G \in h$ und $|BC| = |FG|$. Dann haben $ABCD$ und $EFGH$ den gleichen Flächeninhalt.



Parallelen und Flächeninhalt

Proposition. Seien g und h parallele Geraden und seien $ABCD$ und $EBCF$ Parallelogramme mit $A, D, E, F \in g$ und $B, C \in h$. Dann haben $ABCD$ und $EBCF$ gleichen Flächeninhalt.

Folgerung. Seien g und h parallele Geraden und seien $ABCD$ und $EFGH$ Parallelogramme mit $A, D, E, H \in g$, $B, C, F, G \in h$ und $|BC| = |FG|$. Dann haben $ABCD$ und $EFGH$ den gleichen Flächeninhalt.

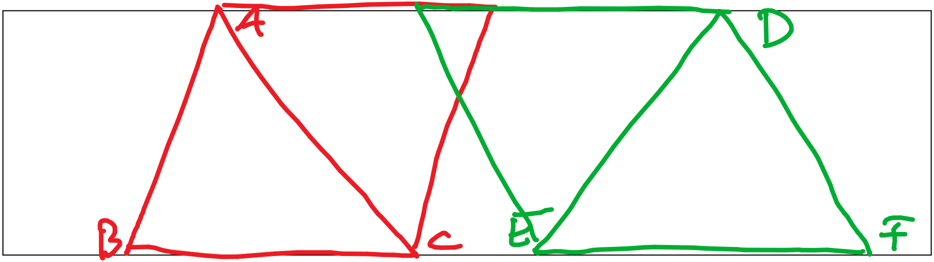
Beweis. Aus der Proposition folgt, dass $ABCD$ und $EBCH$ den gleichen Flächeninhalt haben und, dass $EBCH$ und $EFGH$ den gleichen Flächeninhalt haben. $\square$

Parallelen und Flächeninhalt

Proposition. Seien g und h parallele Geraden und seien $ABCD$ und $EBCF$ Parallelogramme mit $A, D, E, F \in g$ und $B, C \in h$. Dann haben $ABCD$ und $EBCF$ gleichen Flächeninhalt.

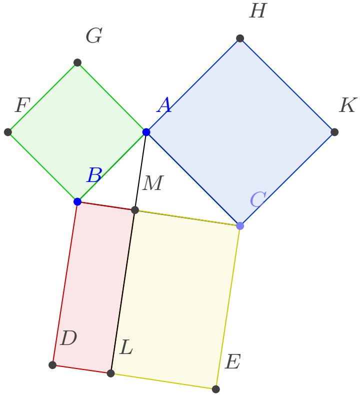
Folgerung. Seien g und h parallele Geraden und seien $ABCD$ und $EFGH$ Parallelogramme mit $A, D, E, H \in g$, $B, C, F, G \in h$ und $|BC| = |FG|$. Dann haben $ABCD$ und $EFGH$ den gleichen Flächeninhalt.

Folgerung. Wenn g und h parallele Geraden sind und ABC und DEF Dreiecke mit $A, D \in g$, $B, C, E, F \in h$ und $|BC| = |EF|$, dann haben ABC und DEF gleichen Flächeninhalt.



Kathetensatz

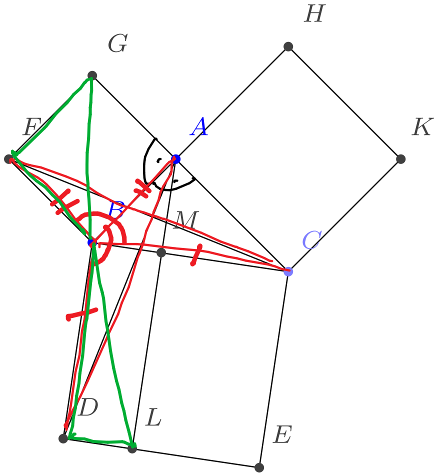
Satz (Kathetensatz). Sei ABC ein Dreieck und $\angle BAC$ ein rechter Winkel. Sei M der Fußpunkt des Lots von M auf BC. Der Flächeninhalt des Quadrats mit Kantenlänge $|AB|$ ist gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks mit Kantenlängen $|BM|$ und $|BC|$. Der Flächeninhalt des Quadrats mit Kantenlänge $|AC|$ ist gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks mit Kantenlängen $|MC|$ und $|BC|$.



Folgerung (Satz des Pythagoras). Wenn ABC ein Dreieck mit rechtem Winkel $\angle BAC$ ist, dann ist der Flächeninhalt des Quadrats mit Kantenlänge $|BC|$ gleich der Summe der Flächeninhalte der Quadrate mit Kantenlänge $|AB|$ und $|AC|$.

Kathetensatz

Satz (Kathetensatz). Sei ABC ein Dreieck und $\angle BAC$ ein rechter Winkel. Sei M der Fußpunkt des Lots von M auf BC. Der Flächeninhalt des Quadrats mit Kantenlänge $|AB|$ ist gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks mit Kantenlängen $|BM|$ und $|BC|$.



Kathetensatz

Satz (Kathetensatz). Sei ABC ein Dreieck und $\angle BAC$ ein rechter Winkel. Sei M der Fußpunkt des Lots von M auf BC. Der Flächeninhalt des Quadrats mit Kantenlänge $|AB|$ ist gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks mit Kantenlängen $|BM|$ und $|BC|$.

Beweisskizze. Es sind $BCF \equiv BDA$ sind nach dem Kongruenzsatz SWS. Die Dreiecke BAD und BLD sind flächengleich und BLD hat den halben Flächeninhalt von $BMLD$.
Die Dreiecke BCF und BGF sind flächengleich und BGF hat den halben Flächeninhalt von $BAGF$. $\square$