Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

Gruppen, Bewegungen

Stefan Witzel

Gruppen

Eine Menge G von Bijektionen $X \to X$ ist eine *Gruppe*, wenn

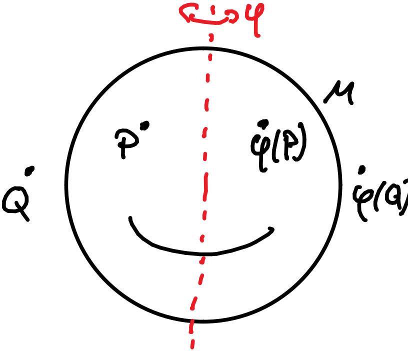
1. die Identität $\mathrm{id}\colon X \to X$ in G liegt,
2. für jedes Element $\alpha \in G$ die Inverse α^{-1} ebenfalls in G liegt und
3. für zwei Elemente $\alpha, \beta \in G$ die Komposition $\alpha \circ \beta$ auch in G liegt.

Beispiel. Die Menge der Bewegungen $\mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ ist eine Gruppe.

Symmetrien

Sei $M \subseteq \mathbb{E}^2$. Eine *Symmetrie* von M ist eine Bewegung φ, so dass $\varphi(M) = M$.

Das heißt, für jeden Punkt P ist $P \in M$ genau dann, wenn $\varphi(P) \in M$.



Symmetrien

Sei $M \subseteq \mathbb{E}^2$. Eine *Symmetrie* von M ist eine Bewegung φ, so dass $\varphi(M) = M$.

Das heißt, für jeden Punkt P ist $P \in M$ genau dann, wenn $\varphi(P) \in M$.

Bei einem Bild ist jeder Punkt der Ebene in einer Farbe eingefärbt.

Eine Symmetrie eines Bildes ist eine Abbildung, die jeden Punkt auf einen Punkt derselben Farbe abbildet.

Das heißt, sie ist Symmetrie der Mengen M_F von Punkten, die die Farbe F haben.

Symmetriegruppe

Proposition. Die Menge der Symmetrien einer Menge ist eine Gruppe.

Man nennt diese Gruppe die *Symmetriegruppe* der Menge.

Beweis. Sei $M \subseteq \mathbb{E}^2$ eine Menge.

Die Identität ist eine Symmetrie von M, weil sie jeden Punkt auf sich abbildet.

[. . .] $\square$

Symmetriegruppe

Proposition. Die Menge der Symmetrien einer Menge ist eine Gruppe.

Man nennt diese Gruppe die *Symmetriegruppe* der Menge.
Beweis. [. . .]
Wenn φ eine Symmetrie ist, dann auch φ^{-1}: Sei $P \in \mathbb{E}^2$ beliebig. Sei $Q := \varphi^{-1}(P)$.
Nach Definition ist $Q \in M$ genau dann, wenn $\varphi(Q) = P \in M$.
Also ist $P \in M$ genau dann, wenn $\varphi^{-1}(P) = Q \in M$.
Also ist φ^{-1} eine Symmetrie von M.
[. . .] $\square$

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, mapsto, "\varphi"] \arrow[d, equal] & \varphi(Q) \arrow[d, equal] \\ \varphi^{-1}(P) & P \arrow[l, mapsto, "\varphi^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Symmetriegruppe

Proposition. Die Menge der Symmetrien einer Menge ist eine Gruppe.

Man nennt diese Gruppe die *Symmetriegruppe* der Menge.
Beweis. [...] Wenn φ und ψ Symmetrien sind, dann auch $\varphi \circ \psi$:
Sei wieder $P \in \mathbb{E}^2$ beliebig, $Q = \psi(P)$ und $R = \varphi(Q) = (\varphi \circ \psi)(P)$.
Da ψ eine Symmetrie von M ist sind P und Q entweder beide in M oder beide nicht in M.
Da φ eine Symmetrie von M ist, sind Q und R entweder beide in M oder beide nicht in M.
Also sind P und R entweder beide in M oder beide nicht in M. $\square$

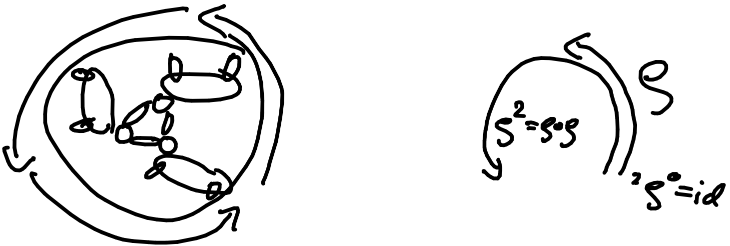
$$P \xmapsto{\psi} Q \xmapsto{\varphi} R$$

Endliche Symmetriegruppen in der Ebene

Satz. Wenn die Symmetriegruppe einer Menge $M \subseteq \mathbb{E}^2$ endlich ist, gilt einer der folgenden Fälle:

1. Es gibt eine Rotation ρ mit $\rho^n = \mathrm{id}$, so dass M die folgenden n Symmetrien hat: $\mathrm{id} = \rho^0, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}$.

Hier schreiben wir $\rho^m = \underbrace{\rho \circ \ldots \circ \rho}_{m \text{ mal}}$.

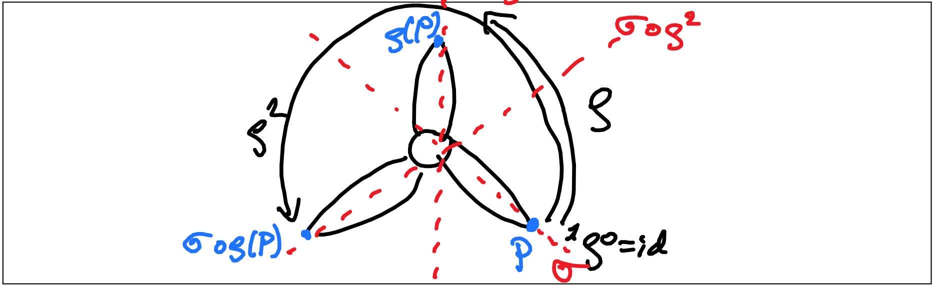


Endliche Symmetriegruppen in der Ebene

Satz. Wenn die Symmetriegruppe einer Menge $M \subseteq \mathbb{E}^2$ endlich ist, gilt einer der folgenden Fälle:

1. Es gibt eine Rotation ρ mit $\rho^n = \mathrm{id}$, so dass M die folgenden n Symmetrien hat: $\mathrm{id} = \rho^0, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}$.
2. Es gibt eine Spiegelung σ und eine Rotation ρ mit $\rho^n = \mathrm{id}$, so dass der Fixpunkt von ρ auf der Achse von σ liegt und M die folgenden $2n$ Symmetrien hat: $\mathrm{id} = \rho^0, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}, \sigma, \sigma \circ \rho, \sigma \circ \rho^2, \ldots, \sigma \circ \rho^{n-1}$.

Hier schreiben wir $\rho^m = \underbrace{\rho \circ \ldots \circ \rho}_{m \text{ mal}}$.



Endliche Symmetriegruppen in der Ebene

Satz. Wenn die Symmetriegruppe einer Menge $M \subseteq \mathbb{E}^2$ endlich ist, gilt einer der folgenden Fälle:

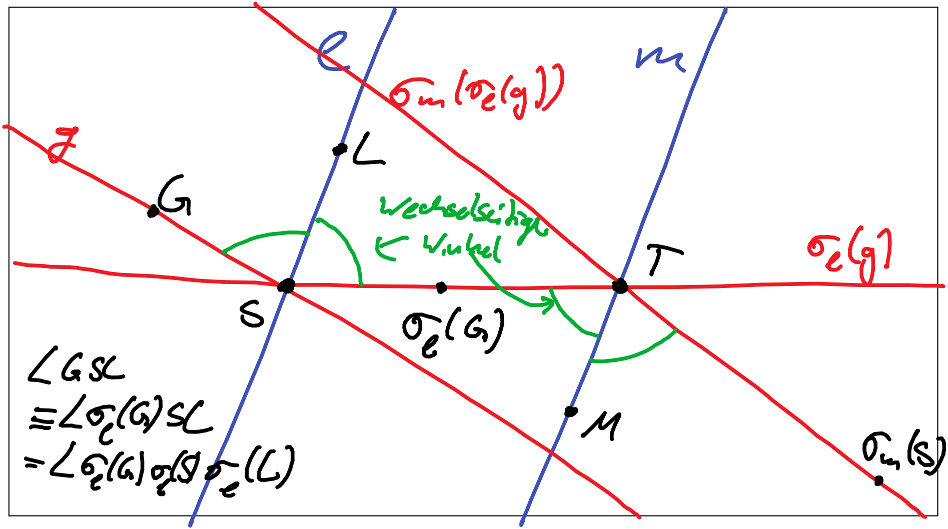
1. Es gibt eine Rotation ρ mit $\rho^n = \mathrm{id}$, so dass M die folgenden n Symmetrien hat: $\mathrm{id} = \rho^0, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}$.
2. Es gibt eine Spiegelung σ und eine Rotation ρ mit $\rho^n = \mathrm{id}$, so dass der Fixpunkt von ρ auf der Achse von σ liegt und M die folgenden $2n$ Symmetrien hat: $\mathrm{id} = \rho^0, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}, \sigma, \sigma \circ \rho, \sigma \circ \rho^2, \ldots, \sigma \circ \rho^{n-1}$.

Hier schreiben wir $\rho^m = \underbrace{\rho \circ \ldots \circ \rho}_{m \text{ mal}}$.

Die ersten Symmetriegruppen sind endliche zyklische Gruppen C_n.
Die zweiten Symmetriegruppen nennt man endliche Dieder-Gruppen D_n.

Komposition von Spiegelungen I

Proposition. Seien σ_ℓ und σ_m Spiegelungen an Geraden ℓ und m. Wenn ℓ und m parallel sind, dann ist $\sigma_m \circ \sigma_\ell$ eine Verschiebung.



Komposition von Spiegelungen I

Proposition. Seien σ_ℓ und σ_m Spiegelungen an Geraden ℓ und m. Wenn ℓ und m parallel sind, dann ist $\sigma_m \circ \sigma_\ell$ eine Verschiebung.

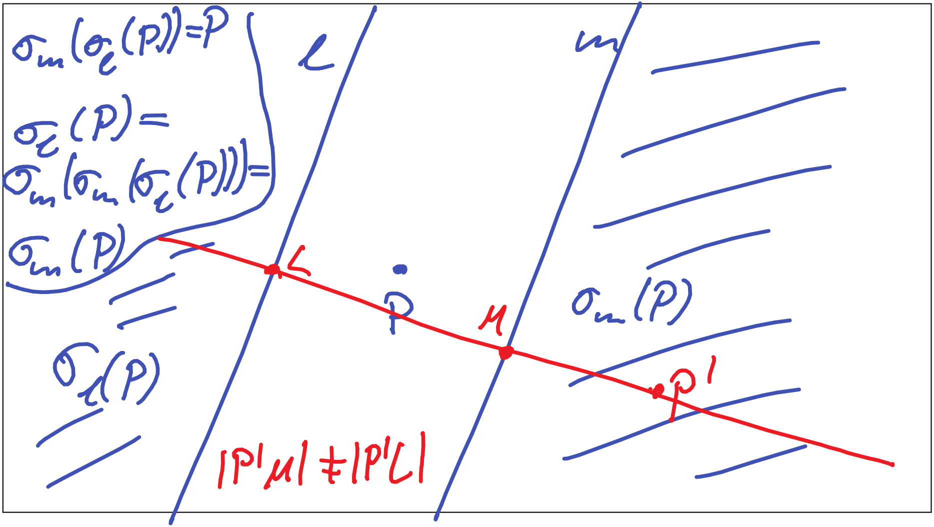
Beweis. Sei $\varphi = \sigma_\ell \circ \sigma_m$. Fall $\ell = m$ trivial, also $\ell \neq m$.
Sei g eine Gerade. Wollen zeigen, $\varphi(g) \parallel g$.

Wenn $g \parallel \ell \parallel m$ klar, also $g \nparallel \ell$.
Sei $\{S\} = g \cap \ell$, $\{T\} = \sigma_\ell(g) \cap m$.
Seien $L \in \ell$ und $M \in m$ auf unterschiedlichen Seiten von $\sigma_\ell(g)$.
Sei $G \in g$ ein Punkt im von T abgewandten Halbraum von m.

Jetzt ist $\angle GSL \equiv \angle TSL = \angle \sigma_\ell(G)SL$, weil σ_ℓ eine Spiegelung ist.
Die wechselseitigen Winkel $\angle TSL$ und $\angle STM$ sind kongruent.
Es ist $\angle STM \equiv \angle \sigma_m(S)TM$ kongruent weil σ_m eine Spiegelung ist.
Folglich ist $g = GS \parallel T\sigma_m(S) = \sigma_\ell \circ \sigma_m(g)$.
[...] $\square$

Komposition von Spiegelungen I

Proposition. Seien σ_ℓ und σ_m Spiegelungen an Geraden ℓ und m. Wenn ℓ und m parallel sind, dann ist $\sigma_m \circ \sigma_\ell$ eine Verschiebung.



Komposition von Spiegelungen I

Proposition. Seien σ_ℓ und σ_m Spiegelungen an Geraden ℓ und m. Wenn ℓ und m parallel sind, dann ist $\sigma_m \circ \sigma_\ell$ eine Verschiebung.

Beweis. [. . .]
Sei jetzt P ein Punkt. Wollen zeigen, dass P kein Fixpunkt von φ ist.

Es ist $\varphi(P) = \sigma_m(\sigma_\ell(P)) = P$ genau dann, wenn $\sigma_\ell(P) = \sigma_m(P)$.

Sei h das Lot auf ℓ durch P.
Sei $\{A\} = h \cap \ell$ und $\{B\} = h \cap m$.
Es ist $|P\sigma_\ell(P)| = 2|PA|$ und $|P\sigma_m(P)| = 2|PB|$.

Fall 1: wenn P zwischen ℓ und m liegt $\sigma_\ell(P)$ in einem anderen Halbraum als $\sigma_m(P)$.
Fall 2: wenn P im Halbraum von ℓ ohne m liegt, ist $|P\sigma_\ell(P)| < |P\sigma_m(P)|$.
Fall 3: wenn P im Halbraum von m ohne ℓ liegt, ist $|P\sigma_\ell(P)| > |P\sigma_m(P)|$.
In jedem Fall ist $\sigma_\ell(P) \neq \sigma_m(P)$. $\square$