Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

Gruppen, Bewegungen

Stefan Witzel

Komposition von Spiegelungen I

Proposition. Seien σ_ℓ und σ_m Spiegelungen an Geraden ℓ und m. Wenn ℓ und m parallel sind, dann ist $\sigma_m \circ \sigma_\ell$ eine Verschiebung.

Beweis. [...]
Sei jetzt P ein Punkt. Wollen zeigen, dass P kein Fixpunkt von φ ist.

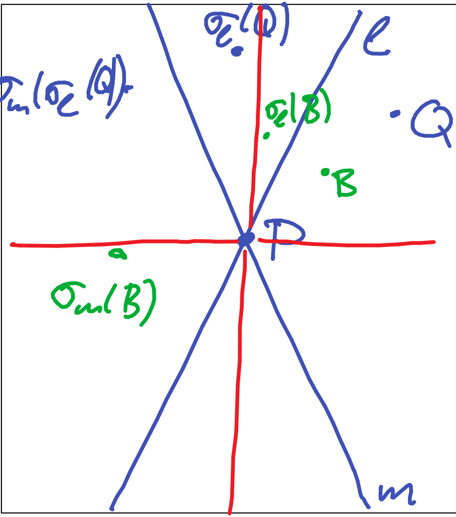
Es ist $\varphi(P) = \sigma_m(\sigma_\ell(P)) = P$ genau dann, wenn $\sigma_\ell(P) = \sigma_m(P)$.

Sei h das Lot auf ℓ durch P.
Sei $\{A\} = h \cap \ell$ und $\{B\} = h \cap m$.
Es ist $|P\sigma_\ell(P)| = 2|PA|$ und $|P\sigma_m(P)| = 2|PB|$.

Fall 1: wenn P zwischen ℓ und m liegt $\sigma_\ell(P)$ in einem anderen Halbraum als $\sigma_m(P)$.
Fall 2: wenn P im Halbraum von ℓ ohne m liegt, ist $|P\sigma_\ell(P)| < |P\sigma_m(P)|$.
Fall 3: wenn P im Halbraum von m ohne ℓ liegt, ist $|P\sigma_\ell(P)| > |P\sigma_m(P)|$.
In jedem Fall ist $\sigma_\ell(P) \neq \sigma_m(P)$. $\square$

Komposition von Spiegelungen II

Proposition. Seien σ_ℓ und σ_m Spiegelungen an Geraden ℓ und m. Wenn sich ℓ und m in einem Punkt P schneiden, ist $\sigma_m \circ \sigma_\ell$ eine Drehung um P.



$$\sigma_m(\sigma_\ell(P)) = \sigma_m(P) = P$$

F Fixpunkt von $\sigma_m \circ \sigma_\ell$

$\iff \sigma_m(F) = \sigma_\ell(F)$

Menge der A mit

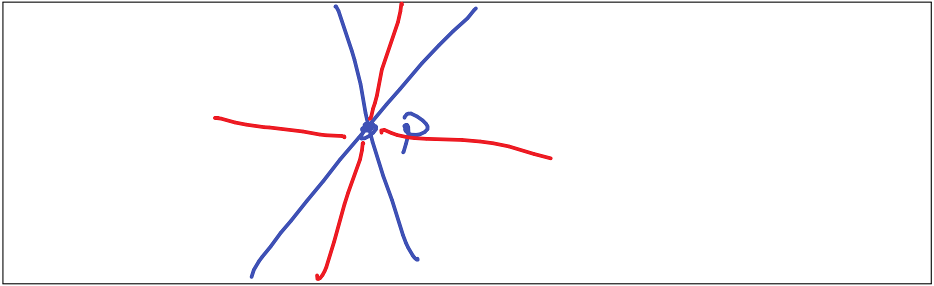
$$|A\sigma_\ell(A)| = |A\sigma_m(A)|$$

Komposition von Spiegelungen II

Proposition. Seien σ_ℓ und σ_m Spiegelungen an Geraden ℓ und m. Wenn sich ℓ und m in einem Punkt P schneiden, ist $\sigma_m \circ \sigma_\ell$ eine Drehung um P.

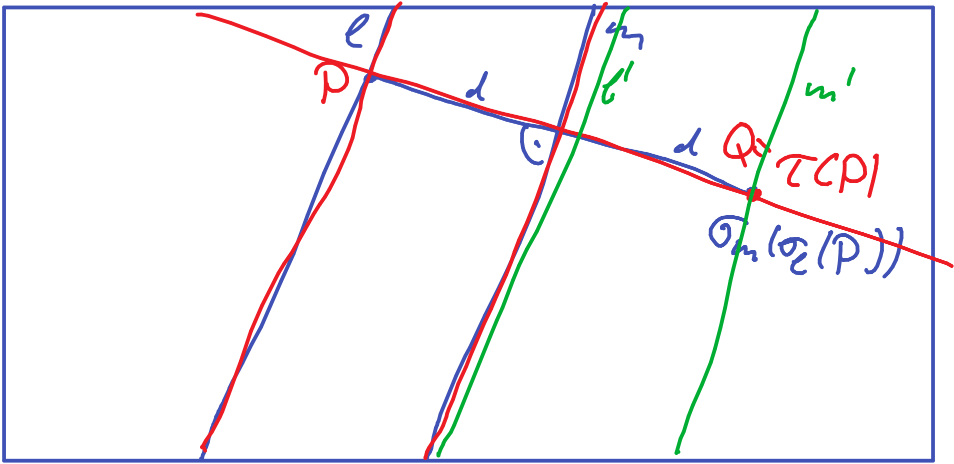
Beweis-Skizze.

Offensichtlich ist P ein Fixpunkt von φ.
Jeder Punkt Q mit $\sigma_\ell(Q) = \sigma_m(Q)$ erfüllt $|Q\sigma_\ell(Q)| = |Q\sigma_m(Q)|$.
Die Menge dieser Punkte ~~ist~~ sind die Winkelhalbierenden h zwischen ℓ und m.
Die Winkelhalbierenden wird von σ_ℓ und σ_m nur ~~auf sich selbst~~ gleich abgebildet, falls $\ell = m$. □



Verschiebungen als Komposition von Spiegelungen

Proposition. Jede Verschiebung ist die Komposition zweier Spiegelungen.



Verschiebungen als Komposition von Spiegelungen

Proposition. Jede Verschiebung ist die Komposition zweier Spiegelungen.

Beweis. Sei τ eine Verschiebung, P beliebig und $Q = \tau(P)$.

Sei M der Mittelpunkt von $\overline{PQ}$.

Sei m die Senkrechte zu PQ durch M und sei ℓ die Senkrechte zu PQ durch Q.

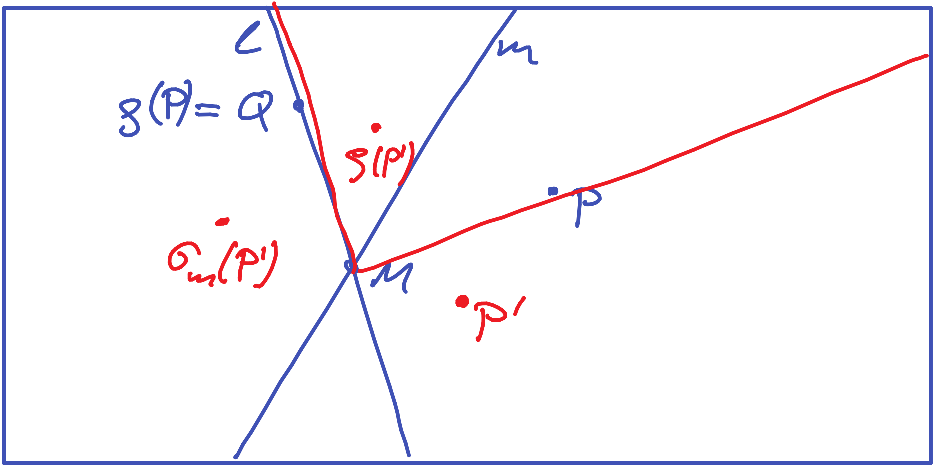
Da m und ℓ parallel zueinander sind, ist $\sigma_\ell \circ \sigma_m$ eine Verschiebung.

Außerdem ist $\sigma_\ell(\sigma_m(P)) = \sigma_\ell(Q) = Q$.

Wegen der Eindeutigkeit von Verschiebungen ist $\tau = \sigma_\ell \circ \sigma_m$. $\square$

Drehungen als Komposition von Spiegelungen

Proposition. Jede Drehung ist die Komposition zweier Spiegelungen.



Drehungen als Komposition von Spiegelungen

Proposition. Jede Drehung ist die Komposition zweier Spiegelungen.

Beweis. Sei ρ Drehung mit Fixpunkt M, sei $P \neq M$ und $Q = \rho(P)$.
Sei m die Winkelhalbierende von $\angle PMQ$ und sei $\ell = MQ$.
Da sich m und ℓ in M schneiden, ist $\sigma_\ell \circ \sigma_m$ eine Drehung.
Offensichtlich ist $\sigma_\ell(\sigma_m(M)) = M$.
Außerdem ist $\sigma_\ell(\sigma_m(P)) = \sigma_\ell(Q) = Q$.
Aus der Eindeutigkeit von Drehungen folgt, dass $\rho = \sigma_\ell \circ \sigma_m$. □

Bewegungen als Komposition von Spiegelungen

Satz. Jede Bewegung ist eine Komposition von Spiegelungen.

Beweis. Im Beweis des Kongruenzsatzes SSS haben wir gesehen, dass jede Bewegung eine Komposition $\varphi = \sigma \circ \rho \circ \tau$ ist (τ Verschiebung, ρ Drehung, σ Spiegelung oder Identität).

Nach den letzten beiden Propositionen sind $\rho = \sigma' \circ \sigma''$ und $\tau = \sigma''' \circ \sigma''''$ Kompositionen von Spiegelungen.

Also ist $\varphi = \sigma \circ \sigma' \circ \sigma'' \circ \sigma'' \circ \sigma''''$ eine Komposition von Spiegelungen. □

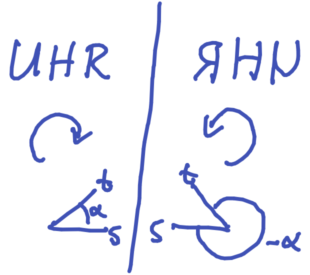
Gerade und ungerade Bewegungen

Eine Bewegung ist gerade, wenn sie die Komposition einer geraden Anzahl von Spiegelungen ist.

Sie ist ungerade, wenn sie die Komposition einer ungeraden Anzahl von Spiegelungen ist.

Beispiel. Drehungen und Verschiebungen sind gerade Bewegungen. Spiegelungen sind ungerade Bewegungen.

Ungerade Bewegungen tauschen Uhrzeigersinn und Gegenuhrzeigersinn, Schrift und Spiegelschrift, wechseln Vorzeichen des algebraischen Winkelmaßes.



Gerade und ungerade Bewegungen

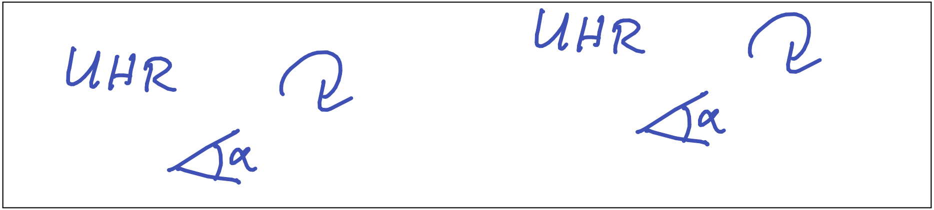
Eine Bewegung ist gerade, wenn sie die Komposition einer geraden Anzahl von Spiegelungen ist.

Sie ist ungerade, wenn sie die Komposition einer ungeraden Anzahl von Spiegelungen ist.

Beispiel. Drehungen und Verschiebungen sind gerade Bewegungen. Spiegelungen sind ungerade Bewegungen.

Ungerade Bewegungen tauschen Uhrzeigersinn und Gegenuhrzeigersinn, Schrift und Spiegelschrift, wechseln Vorzeichen des algebraischen Winkelmaßes.

Gerade Bewegungen erhalten Uhrzeigersinn und Gegenuhrzeigersinn, Schrift und Spiegelschrift, algebraisches Winkelmaß.



Komposition von geraden und ungeraden Bewegungen

Proposition. Die Komposition von zwei geraden Bewegungen ist gerade.

Die Komposition von zwei ungeraden Bewegungen ist gerade.

Die Komposition einer geraden und einer ungeraden (oder einer ungeraden und einer geraden) Bewegung ist ungerade.

Beweis. Da „gerade plus gerade gleich gerade", „ungerade plus ungerade gleich gerade", „gerade plus ungerade gleich ungerade". □

Folgerung. Die Menge der geraden Bewegungen ist eine Gruppe.

Proposition. Die Fixpunktmenge einer geraden Bewegung ist entweder leer, ein einziger Punkt, oder die ganze Ebene.

Inverse: $\varphi = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \sigma_4$

$\varphi^{-1} = \sigma_4 \circ \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$

Komposition von geraden und ungeraden Bewegungen

Proposition. Die Komposition von zwei geraden Bewegungen ist gerade.

Die Komposition von zwei ungeraden Bewegungen ist gerade.

Die Komposition einer geraden und einer ungeraden (oder einer ungeraden und einer geraden) Bewegung ist ungerade.

Beweis. Da „gerade plus gerade gleich gerade“, „ungerade plus ungerade gleich gerade“, „gerade plus ungerade gleich ungerade“. □

Folgerung. Die Menge der geraden Bewegungen ist eine Gruppe.

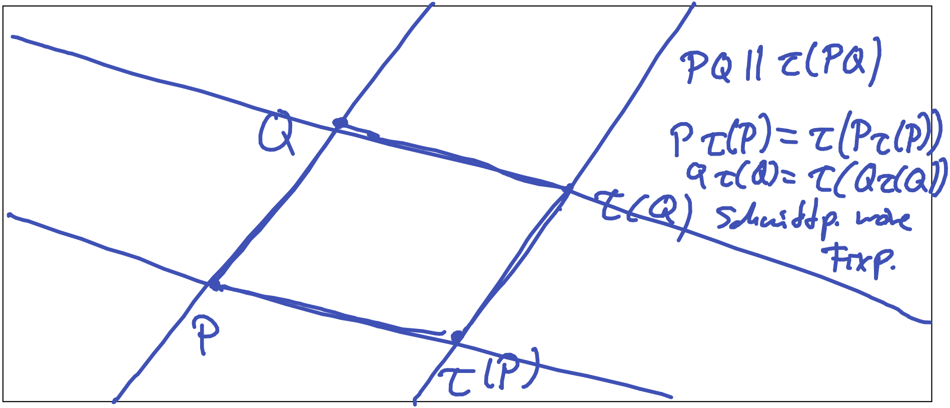
Proposition. Die Fixpunktmenge einer geraden Bewegung ist entweder leer, ein einziger Punkt, oder die ganze Ebene.

Beweis. Aus den bekannten Möglichkeiten fällt eine Gerade weg, da Spiegelungen ungerade sind. □

Charakterisierung von Verschiebungen

Proposition. Eine Bewegung τ ist eine Verschiebung genau dann, wenn für beliebige Punkte P und Q das Viereck $PQ\tau(Q)\tau(P)$ ein Parallelogramm ist (eventuell degeneriert).

Insbesondere bewegen Verschiebungen jeden Punkt um denselben Abstand $|P\tau(P)| = |Q\tau(Q)|$.



Charakterisierung von Verschiebungen

Proposition. Eine Bewegung τ ist eine Verschiebung genau dann, wenn für beliebige Punkte P und Q das Viereck $PQ\tau(Q)\tau(P)$ ein Parallelogramm ist (eventuell degeneriert).

Insbesondere bewegen Verschiebungen jeden Punkt um denselben Abstand $|P\tau(P)| = |Q\tau(Q)|$.

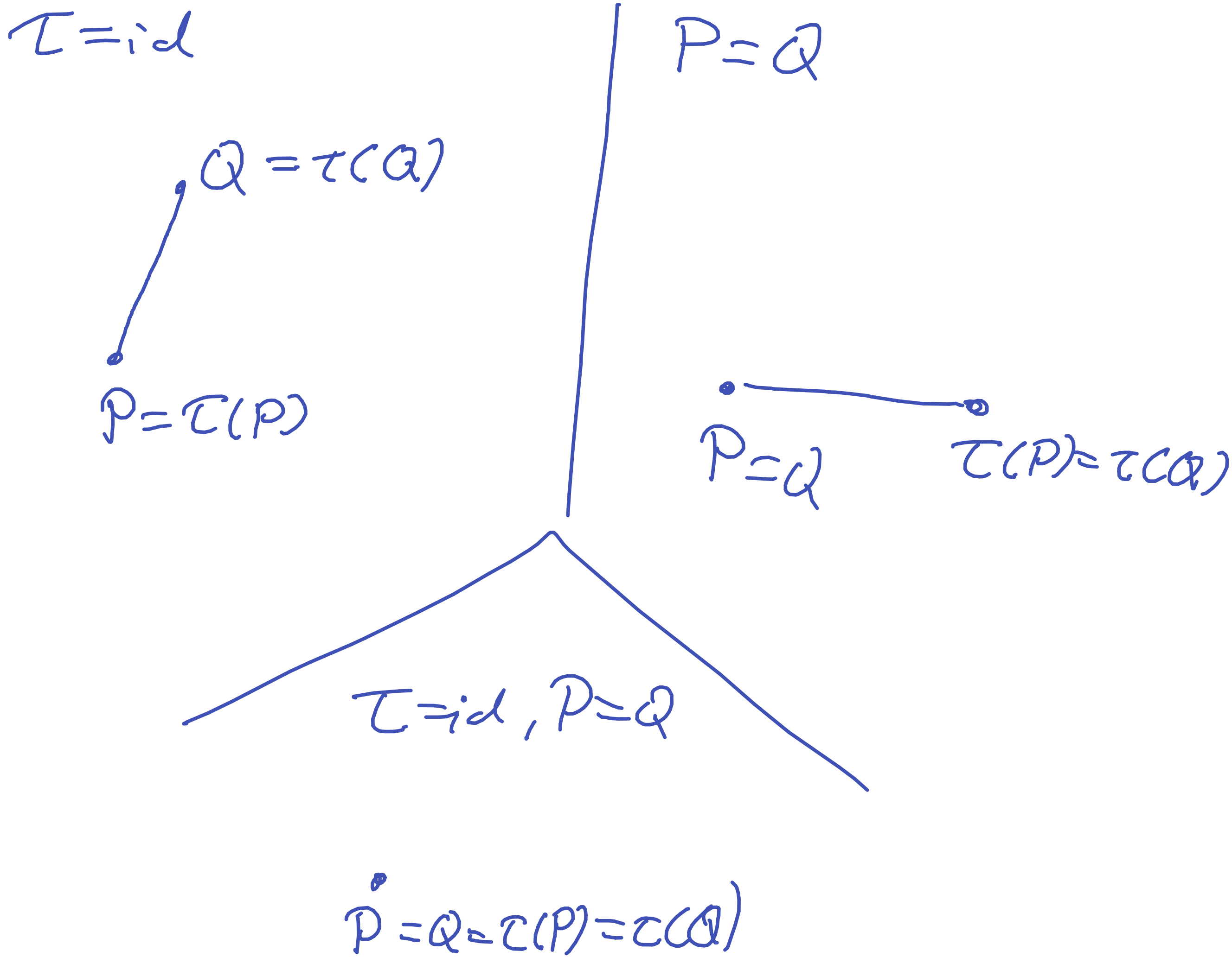
Beweis. Seien P und Q zwei Punkte. Wenn τ eine Verschiebung ist, ist $PQ\tau(Q)\tau(P)$ ein Parallelogramm: $|PQ| = |\tau(P)\tau(Q)|$
Da $P\tau(P) \parallel \tau(P\tau(P))$, also $P\tau(P) = \tau(P\tau(P))$ (τ Verschiebung).
Außerdem ist $PQ \parallel \tau(PQ)$ (τ Bewegung).
Also ist $PQ\tau(Q)\tau(P)$ ein Parallelogramm (eventuell degeneriert, wenn die zwei der parallelen Geraden gleich sind).
[...] $\square$

Charakterisierung von Verschiebungen

Proposition. Eine Bewegung τ ist eine Verschiebung genau dann, wenn für beliebige Punkte P und Q das Viereck $PQ\tau(Q)\tau(P)$ ein Parallelogramm ist (eventuell degeneriert).

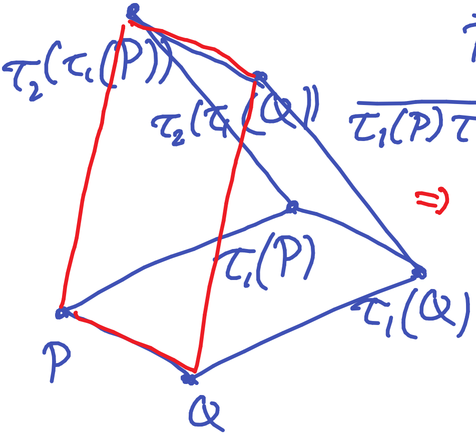
Insbesondere bewegen Verschiebungen jeden Punkt um denselben Abstand $|P\tau(P)| = |Q\tau(Q)|$.

Beweis. [...]
Aus der Parallelogramm-Bedigung folgt dass alle Punkte um denselben Abstand bewegt werden.
Wenn τ die Parallelogramm-Bedingung ist τ eine Verschiebung:
Da τ jeden Punkt um denselben Abstand bewegt ist entweder jeder Punkt ein Fixpunkt (und $\tau = \mathrm{id}$) oder keiner.
Wenn τ keinen Fixpunkt hat, folgt außerdem, dass eine beliebige Gerade PQ auf die parallele Gerade $\tau(P)\tau(Q)$ abgebildet wird.
Damit ist τ eine Verschiebung. □


$\tau = id$
$Q = \tau(Q)$
$P = \tau(P)$
$P = Q$
$P = Q$
$\tau(P) = \tau(Q)$
$\tau = id,\ P = Q$
$P = Q = \tau(P) = \tau(Q)$

Komposition von Verschiebungen

Proposition. Wenn τ_1 und τ_2 Verschiebungen sind, ist $\tau_2 \circ \tau_1$ auch eine Verschiebung.



$$\overline{PQ} \parallel \overline{\tau_1(P)\tau_1(Q)}$$

$$\overline{\tau_1(P)\tau_1(Q)} \parallel \overline{\tau_2(\tau_1(P))\tau_2(\tau_1(Q))}$$

$$\Rightarrow \overline{PQ} \parallel \overline{\tau_2(\tau_1(P))\tau_2(\tau_1(Q))}$$

Komposition von Verschiebungen

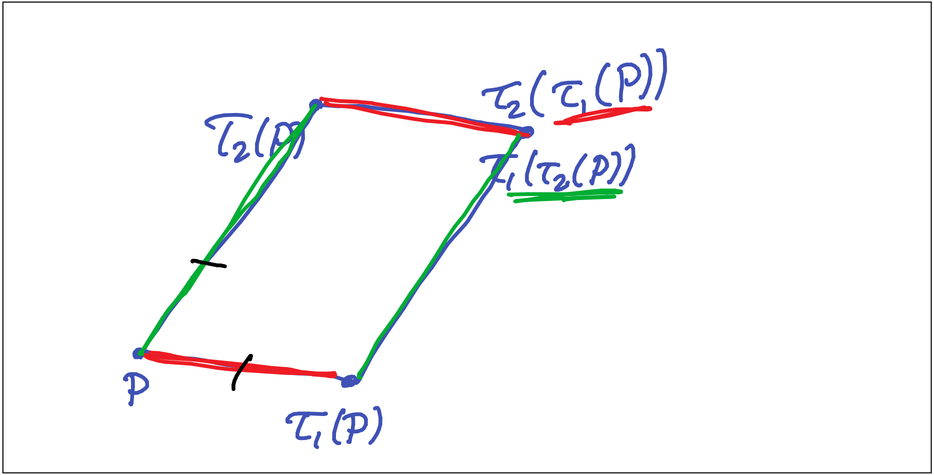
Proposition. Wenn τ_1 und τ_2 Verschiebungen sind, ist $\tau_2 \circ \tau_1$ auch eine Verschiebung.

Beweis. Seien P und Q Punkte.
Da τ_1 eine Verschiebung ist, ist $\overline{PQ}$ parallel zu $\overline{\tau_1(P)\tau_1(Q)}$.
Da τ_2 eine Verschiebung ist, ist $\overline{\tau_1(P)\tau_1(Q)}$ parallel zu $\overline{\tau_2(\tau_1(P))\tau_2(\tau_1(Q))}$.
Also ist $\overline{PQ}$ parallel zu $\overline{\tau_2(\tau_1(P))\tau_2(\tau_1(Q))}$.
Also ist $PQ\tau_2(\tau_1(Q))\tau_2(\tau_1(P))$ ein Parallelogramm.
Also ist $\tau_2 \circ \tau_1$ eine Verschiebung. $\square$

Folgerung. Verschiebungen bilden eine Gruppe.

Verschiebungen vertauschen

Proposition. Wenn τ_1 und τ_2 Verschiebungen sind, ist $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$.



Verschiebungen vertauschen

Proposition. Wenn τ_1 und τ_2 Verschiebungen sind, ist $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$.

Beweis. Sei $P \in \mathbb{E}^2$ beliebig.
Die Segmente $\overline{P\tau_2(P)}$ und $\overline{\tau_1(P)\tau_2(\tau_1(P))}$ sind parallel.
Also ist $P\tau_2(P)\tau_2(\tau_1(P))\tau_1(P)$ ein Parallelogramm.
Folglich sind $\overline{P\tau_1(P)}$ und $\overline{\tau_2(P)\tau_2(\tau_1(P))}$ parallel.
Das heißt $\tau_2(\tau_1(P)) = \tau_1(\tau_2(P))$. □

Folgerung. Die Gruppe der Verschiebungen ist abelsch.