Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

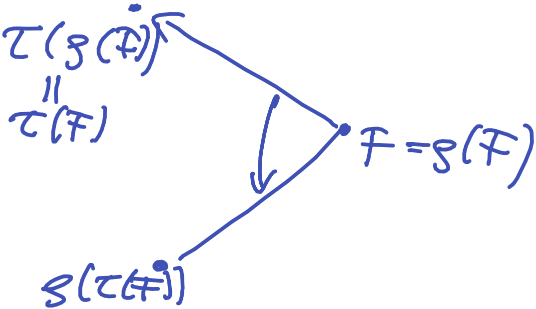
Gruppen, Bewegungen

Stefan Witzel

Drehungen und Verschiebungen vertauschen nicht

Proposition. Wenn $\tau \neq \mathrm{id}$ eine Verschiebung ist und ρ $\neq$ id eine Drehung, dann ist $\tau \circ \rho \neq \rho \circ \tau$.

F Fixp. v. ρ



Drehungen und Verschiebungen vertauschen nicht

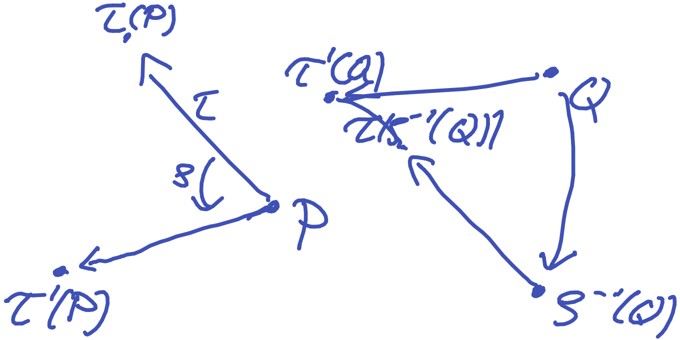
Proposition. Wenn $\tau \neq \mathrm{id}$ eine Verschiebung ist und ρ eine Drehung, dann ist $\tau \circ \rho \neq \rho \circ \tau$.

Beweis. Sei *P* der Fixpunkt von ρ.
Wäre $\tau \circ \rho = \rho \circ \tau$, dann wäre insbesondere $\tau(P) = \tau(\rho(P)) = \rho(\tau(P))$, also $\tau(P)$ ein Fixpunkt von ρ.
Der einzige Fixpunkt von ρ ist *P*.
Aber $\tau(P) \neq P$ weil τ eine Verschiebung und nicht die Identität ist.
Also ist $\tau \circ \rho \neq \rho \circ \tau$. $\square$

Folgerung. Die Gruppe der Bewegungen ist nicht abelsch.

$$\rho\circ\tau \neq \tau\circ\rho \iff \underbrace{\rho\circ\tau\circ\rho^{-1}}_{\text{Versch.}} \neq \tau$$

$$\tau' = \rho\circ\tau\circ\rho^{-1}$$



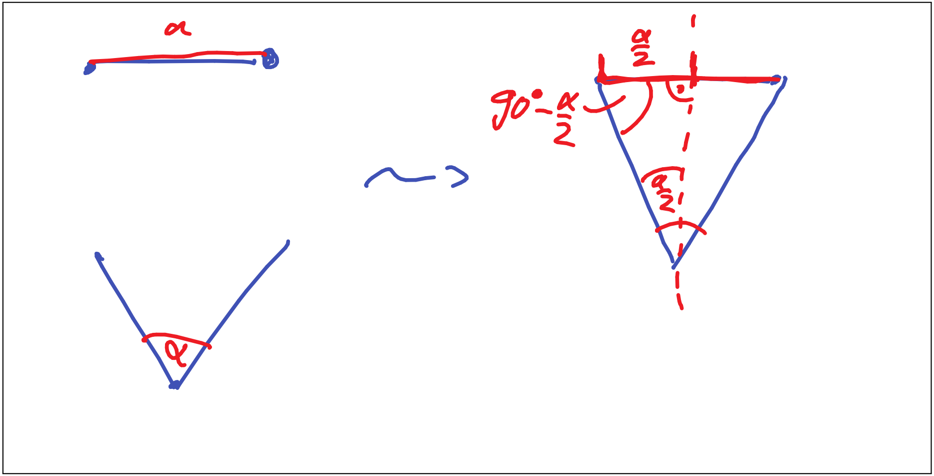
$$\rho \neq \underbrace{\tau\circ\rho\circ\tau^{-1}}$$

<u>Konjugation</u>: $\alpha\circ\beta\circ\alpha^{-1}$

ist <u>Konjugat</u> von β um α.

Gleichschenkliges Dreieck mit Grundseite und Winkel

Problem. Konstruiere ein Dreieck PQR mit $|PQ| = |PR|$ wobei $|QR|$ und $\angle RPQ$ vorgegeben sind.



Gleichschenkliges Dreieck mit Grundseite und Winkel

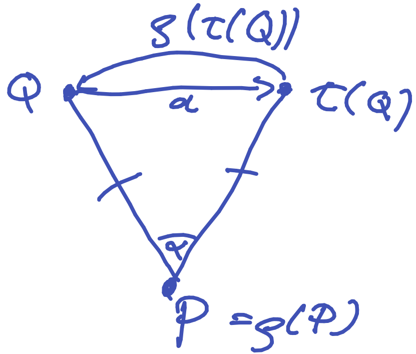
Problem. Konstruiere ein Dreieck PQR mit $|PQ| = |PR|$ wobei $|QR|$ und $\angle RPQ$ vorgegeben sind.

Konstruktion. Konstruiere das Dreieck MPQ wobei $\angle PQM$ die Hälfte des vorgegebenen Winkels ist, $|MP|$ die Hälfte der vorgegebenen Länge und $\angle QMP$ ein rechter Winkel.
Sei R der zweite Schnittpunkt von M_P mit MP. $\Diamond$

Beweis. Da $\angle QMP$ ein rechter Winkel ist, ist $PQM \equiv PRM$.
Damit ist $\angle PQM = 2 \cdot \angle PQM$ wie gefordert.
Außerdem ist $|PR| = 2|MP|$ wie gefordert.
Schließlich ist $|PQ| = |RQ|$. $\square$

Komposition von Verschiebung und Drehung

Proposition. Wenn τ eine Verschiebung ist und ρ eine Drehung, dann ist $\rho \circ \tau$ eine Drehung.



Komposition von Verschiebung und Drehung

Proposition. Wenn τ eine Verschiebung ist und ρ eine Drehung, dann ist $\rho \circ \tau$ eine Drehung.

Beweis. Wenn $\tau = \mathrm{id}$ trivial, also $\tau \neq \mathrm{id}$.
Sei P Fixpunkt von ρ. Wollen Fixpunkt von $\rho \circ \tau$ bestimmen, Q mit $\rho(\tau(Q)) = Q$.
D.h. $\tau(Q) = \rho^{-1}(Q)$ ist.
Sei PQR wie folgt beschrieben ist:

- P ist der Fixpunkt von ρ,
- das Segment $\overline{QR}$ ist parallel zu $\overline{P\tau(P)}$,
- der Winkel $\angle RPQ$ ist der Winkel um den ρ dreht,
- $|PQ| = |QR|$.

Behauptung: Q ist der gesuchte Fixpunkt.
Es ist $\tau(Q) = R$ und $\rho(R) = Q$. Also $\rho \circ \tau(Q) = Q$.
Gäbe es einen weiteren Fixpunkt, wäre die Fixpunktmenge schon die ganze Ebene ($\rho \circ \tau$ ist gerade!). $\square$

Komposition von Verschiebung und Drehung

Proposition. Wenn τ eine Verschiebung ist und ρ eine Drehung, dann ist $\rho \circ \tau$ eine Drehung.

Folgerung. Wenn τ eine Verschiebung ist und ρ eine Drehung, dann ist $\tau \circ \rho$ eine Drehung.

Beweis. Nach der Proposition ist $\rho^{-1} \circ \tau^{-1}$ eine Drehung ρ'^{-1}. Dann ist aber $\tau \circ \rho = \rho'^{\cancel{-1}}$ ebenfalls eine Drehung. □

$$\rho \circ \tau = \rho'$$

$$\rho^{-1} \circ \tau^{-1} = \rho'^{-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\rho' = \tau \circ \rho$$

Höchstens drei Spiegelungen

Folgerung. Jede Bewegung ist eine Komposition von höchstens drei Spiegelungen.

Beweis. Im Beweis des Kongruenzsatzes SSS haben wir gesehen, dass jede Bewegung eine Komposition $\varphi = \sigma \circ \rho \circ \tau$ ist (τ Verschiebung, ρ Drehung, σ Spiegelung oder Identität).

Nach der letzten Proposition ist $\rho \circ \tau$ eine Drehung ρ' und damit Komposition von zwei Spiegelungen σ' und σ''.

Also ist $\varphi = \sigma \circ \sigma' \circ \sigma''$ eine Komposition von höchstens drei Spiegelungen. □

Folgerung. Jede gerade Bewegung ist eine Komposition von höchstens zwei Spiegelungen.

Folgerung. Jede gerade Bewegung ist eine Verschiebungen oder eine Drehung.

Was fehlt noch?

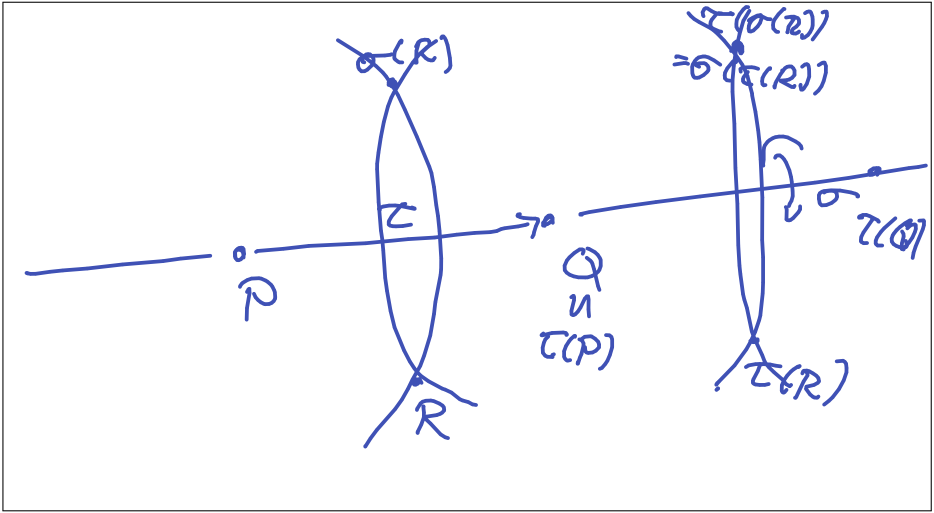
Eigenschaften von Bewegungen, die noch möglich sind:

- Produkt von nicht weniger als drei Spiegelungen
- Ungerade
- Ohne Fixpunkt

Bewegungen mit diesen Eigenschaften heißen Gleitspiegelungen.

Kommutierende Spiegelungen und Verschiebungen

Proposition. Seien P und Q Punkte, sei τ die Verschiebung, die P auf Q abbildet, und σ die Spiegelung an PQ. Dann ist $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$.



Kommutierende Spiegelungen und Verschiebungen

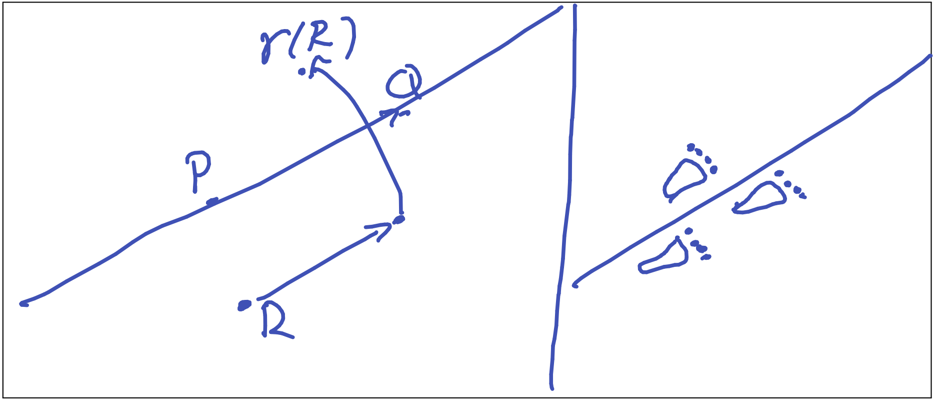
Proposition. Seien P und Q Punkte, sei τ die Verschiebung, die P auf Q abbildet, und σ die Spiegelung an PQ. Dann ist $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$.

Beweis. Sei R ein beliebiger Punkt.
Wenn $R \in PQ$ ist $\sigma(R) = R$ und $\sigma(\tau(R)) = \tau(R)$, und die Behauptung ist klar.
Wir betrachten also den Fall, $R \notin PQ$.
Die Verschiebung τ bildet jeden der Halbräume von PQ auf sich ab.
Die Spiegelung σ vertauscht die beiden Halbräume.
Die Punkte R und $\sigma(R)$ sind die beiden Schnittpunkte von P_R und Q_R.
Die Punkte $\tau(R)$ und $\sigma(\tau(R))$ sind die beiden Schnittpunkte von $P_{\tau(R)}$ und $Q_{\tau(R)}$.
Da $\tau(\sigma(R))$ der von $\tau(R)$ verschiedene Schnittpunkt von $P_{\tau(R)}$ und $Q_{\tau(R)}$ ist, ist $\tau(\sigma(R)) = \sigma(\tau(R))$. $\square$

Gleitspiegelungen

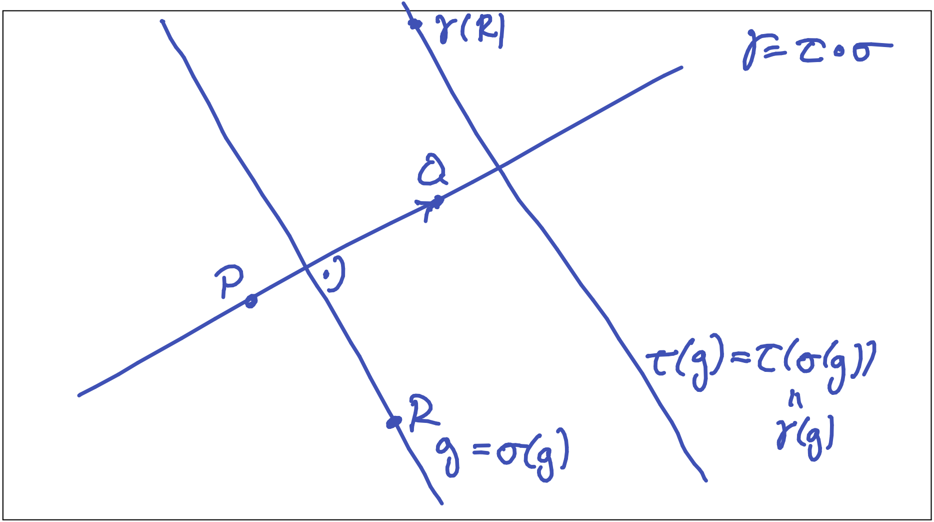
Die *Gleitspiegelung mit Achse PQ, die P auf Q abbildet*, ist die Abbildung $\gamma = \tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$ wobei τ die Verschiebung ist, die *P* auf *Q* abbildet und σ die Spiegelung and *PQ*.

Wenn $P = Q$, ist $\tau = \mathrm{id}$ und $\gamma = \sigma$ ist eine Spiegelung. Um diesen Fall auszuschließen sagen wir, dass γ eine *echte Gleitspiegelung* ist, wenn $P \neq Q$ ist.



Gleitspiegelungen, Eigenschaften

Proposition. Eine echte Gleitspiegelung ist die Komposition von (nicht weniger als) drei Spiegelungen. Sie hat keinen Fixpunkt.



Gleitspiegelungen, Eigenschaften

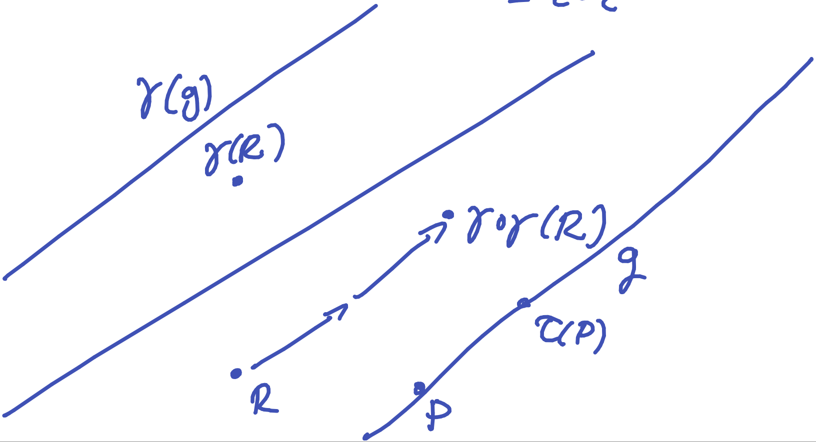
Proposition. Eine echte Gleitspiegelung ist die Komposition von (nicht weniger als) drei Spiegelungen. Sie hat keinen Fixpunkt.

Beweis. Sei $\gamma = \sigma \circ \tau$ und P und Q wie gehabt.
γ hat keinen Fixpunkt: Ist $g \perp PQ$, dann ist $\sigma(g) = g$ und $\tau(g) \parallel g$, $\tau(g) \neq g$ (d.h. $g \cap \tau(g) = \emptyset$).
Ist jetzt R beliebig und g das Lot auf PQ durch R, dann ist $R \in g$ und $\gamma(R) \in \gamma(g)$, also $R \neq \gamma(R)$.
γ ist ungerade und hat keinen Fixpunkt. Also sind mindestens drei Spiegelungen nötig. $\square$

Gesuche Bewegungen sind Gleitspiegelungen

Proposition. Eine ungerade Bewegung, die keine Spiegelung ist, ist eine echte Gleitspiegelung.

$\gamma = \sigma \circ \tau$, $\gamma \circ \gamma = \sigma \circ \tau \circ \sigma \circ \tau = \sigma \circ \sigma \circ \tau \circ \tau$
$= \tau \circ \tau$



Gesuche Bewegungen sind Gleitspiegelungen

Proposition. Eine ungerade Bewegung, die keine Spiegelung ist, ist eine echte Gleitspiegelung.

Beweis. Sei φ eine ungerade Bewegung, die keine Spiegelung ist.
Die Bewegung $\varphi \circ \varphi$ ist eine Verschiebung (gerade, hätte sie einen Fixpunkt, hätte φ auch einen.
Sei τ Verschiebung mit $\tau \circ \tau = \varphi \circ \varphi$.
Sei $g = P\tau(P)$ und $h = \varphi(g) = \varphi(P)\varphi(\tau(P))$.
Dann ist $\varphi(h) = \varphi(\varphi(g)) = \tau(\tau(g)) = g$. Die Abbildung φ vertauscht also die beiden Geraden g und h.
φ hat keinen Fixpunkt, also $g \parallel h$.
Insbesondere bildet φ jede Gerade, die parallel zu g ist, auf eine Gerade parallel zu g ab.
Die Gerade in der Mitte zwischen g und h ist die gesuchte Achse ℓ. $\square$

Klassifikation von Bewegungen

Typ	Fixpunkt-menge	Komposition von ... Spiegelungen	gerade/ ungerade
Identität	Ebene	0	gerade
Spiegelung	Gerade	1	ungerade
echte Drehung	Punkt	2	gerade
echte Verschiebung	leer	2	gerade
echte Gleitspiegelung	leer	3	ungerade