Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

Bewegungen: Parameter

Stefan Witzel

Parameter

Ziel: gegeben eine Bewegung φ, beschreibe Parameter, die φ eindeutig beschreiben.

Diese werden sein:

1. die Parität ε: ist φ gerade oder ungerade?
2. der Drehwinkel ϑ: um wieviel dreht der gerade Anteil von φ?
3. der Verschiebungsvektor $\underline{v}$: wie verschiebt der Verschiebungsanteil von φ?

Wir wählen einen Punkt O und eine Gerade ℓ und können jede Bewegung eindeutig zerlegen als

$$\varphi = \tau_{\underline{v}} \circ \rho_\vartheta \circ \sigma^\varepsilon$$

wobei $\tau_{\underline{v}}$ eine Verschiebung ist, ρ_ϑ eine Drehung mit Fixpunkt O und σ die Spiegelung, die ℓ festhält.

Übersicht

Vektoren

Drehwinkel

Parität

Vektoren und Verschiebungen

Vektoren

- beschreiben die relative Lage zweier Punkte.
- parametrisieren Verschiebungen (eindeutig).

Wenn τ eine Verschiebung ist, wollen wir die Beziehung

$$Q = \tau(P) \quad \text{schreiben als} \quad Q = P + \underline{v}$$

wobei $\underline{v}$ der zu τ gehörende Vektor ist.

Wenn ein Vektor und eine Bewegung so zueinander gehören, schreiben wir

$$\underline{v} = \operatorname{vec}\tau \quad \text{bzw.} \quad \tau = \tau_{\underline{v}}$$

und sagen, $\underline{v}$ ist der Verschiebungsvektor von τ und τ verschiebt um $\underline{v}$.

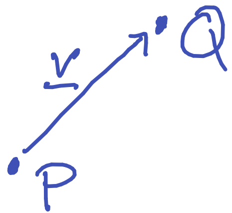
Vektoren

Für beliebige Punkte P und Q gibt es einen Vektor $\underline{v}$ von P nach Q.

(Entspricht der Verschiebung, die P auf Q abbildet.)

Wir schreiben $Q = P + \underline{v}$ oder

$$\underline{v} = Q - P.$$



Vektoren

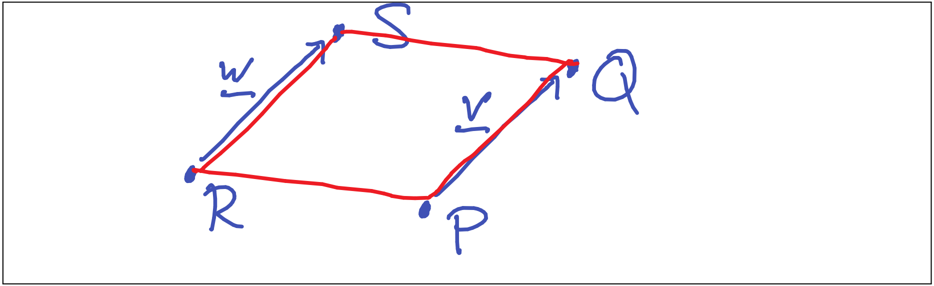
Für beliebige Punkte P und Q gibt es einen Vektor $\underline{v}$ von P nach Q.

(Entspricht der Verschiebung, die P auf Q abbildet.)

Wir schreiben $Q = P + \underline{v}$ oder

$$\underline{v} = Q - P.$$

Zwei Vektoren $\underline{v} = Q - P$ und $\underline{w} = S - R$ sind gleich ($\underline{v} = \underline{w}$), wenn die zugehörigen Verschiebungen gleich sind, d.h. wenn $PRSQ$ ein Parallelogramm ist.

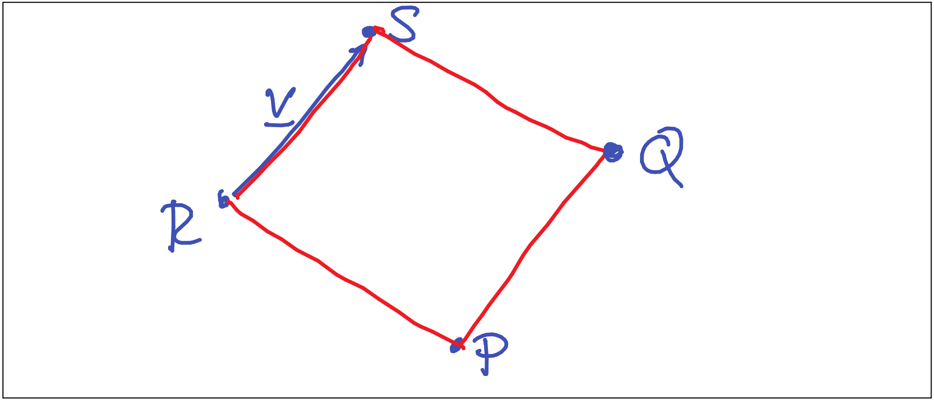


Vektor an Punkt

Jeder Vektor $\underline{v}$ kann an jeden Punkt P angetragen werden.

D.h. man kann den Vektor schreiben als $\underline{v} = Q - P$ für den geeigneten Punkt Q:

Wenn $\underline{v} = S - R$, wähle Q als den eindeutigen Punkt Q, so dass $PRSQ$ ein Parallelogramm ist.



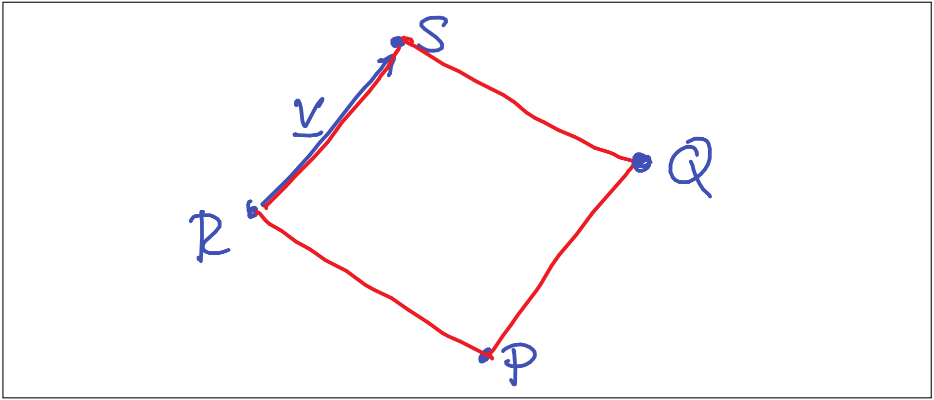
Punkt + Vektor

Wenn P ein Punkt ist und $\underline{v}$ ein Vektor, gibt es einen Punkt $P + \underline{v}$.

Wenn $\underline{v} = S - R$ ist, schreiben wir $\underline{v} = Q - P$.

Dann ist

$$P + \underline{v} = P + (Q - P) = Q.$$



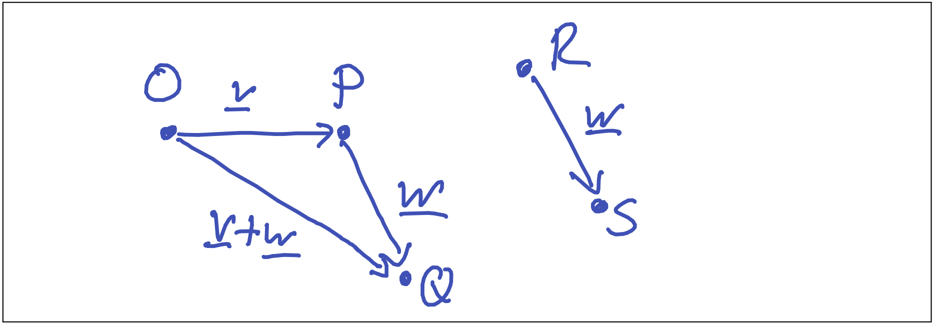
Vektor + Vektor

Wenn $\underline{v}$ und $\underline{w}$ Vektoren sind, gibt es einen Vektor $\underline{v} + \underline{w}$.

Wenn $\underline{v} = P - O$ und $\underline{w} = S - R$, dann gibt es einen Punkt Q, so dass $\underline{w} = Q - P$ ist.

Dann ist dann

$$\underline{v} + \underline{w} = (P - O) + (Q - P) = Q - O.$$



Null-Vektor, Negation

Es gibt einn 0-Vektor $\underline{0}$ mit der Eigenschaft $P + \underline{0} = P$.

$\underline{0}$

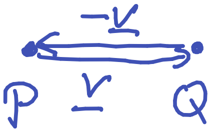
P

Null-Vektor, Negation

Es gibt einn 0-Vektor $\underline{0}$ mit der Eigenschaft $P + \underline{0} = P$.

Zu jedem Vektor $\underline{v}$ gibt es den negativen Vektor $-\underline{v}$ mit der Eigenschaft $\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$.

Wenn $\underline{v} = Q - P$, dann ist $-\underline{v} = P - Q$.



Null-Vektor, Negation

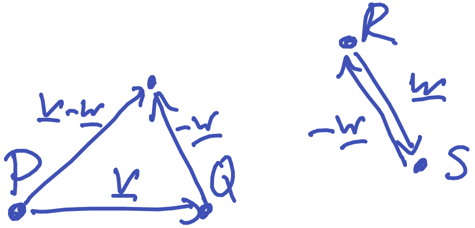
Es gibt einn 0-Vektor $\underline{0}$ mit der Eigenschaft $P + \underline{0} = P$.

Zu jedem Vektor $\underline{v}$ gibt es den negativen Vektor $-\underline{v}$ mit der Eigenschaft $\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$.

Wenn $\underline{v} = Q - P$, dann ist $-\underline{v} = P - Q$.

Daraus ergibt sich, dass wir auch die Differenz von Vektoren bilden können: Wenn $\underline{v} = Q - P$ und $\underline{w} = S - R$, dann ist

$$\underline{v} - \underline{w} = \underline{v} + (-\underline{w}) = (Q - P) + (-(S - R)) = (Q - P) + (R - S).$$



Übersetzung Vektoren Verschiebungen

Seien τ, τ_1, τ_2 die Verschiebungen um die Vektoren $\underline{v}, \underline{v}_1, \underline{v}_2$:
Dann entsprechen sich die folgenden Aussagen

$$
\begin{array}{rcl}
Q = \tau(P) & \text{wenn} & Q = P + \underline{v} \\
\tau = \tau_2 \circ \tau_1 & \text{wenn} & \underline{v} = \underline{v}_2 + \underline{v}_1 \\
\tau(P) = \tau_2(\tau_1(P)) & \text{wenn} & \underline{v} = P + \underline{v}_2 + \underline{v}_1 \\
\tau = \mathrm{id} & \text{wenn} & \underline{v} = \underline{0} \\
\tau_1 = \tau_2^{-1} & \text{wenn} & \underline{v}_1 = -\underline{v}_2
\end{array}
$$

Reihenfolge vertauschen und Umklammern

Da Verschiebungen vertauschen, tun es auch Vektoren:

$$\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v}.$$

Man kann sogar umklammern:

$$(Q - P) + (S - R) = (Q - R) + (S - P).$$

Für Abenteuerlustige (A, B, C, … Punkte):

$A + B - C + D - E + F - G - H$ ist ein Vektor.

$$= (A - H) + (B - C) + (D - E) + (F - G)$$

Reihenfolge vertauschen und Umklammern

Da Verschiebungen vertauschen, tun es auch Vektoren:

$$\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v}.$$

Man kann sogar umklammern:

$$(Q - P) + (S - R) = (Q - R) + (S - P).$$

Für Abenteuerlustige (A, B, C, ... Punkte):

$A + B - C + D - E + F - G - H$ ist ein Vektor.

$$= (A - H) + (B - C) + (D - E) + (F - G)$$

$A + B - C + D - E + F - G - H + I$ ist ein Punkt.

$$= I + (A - H) + (B - C) + (D - E) + (F - G)$$

Übersicht

algebraische Winkel und gerade Bewegungen

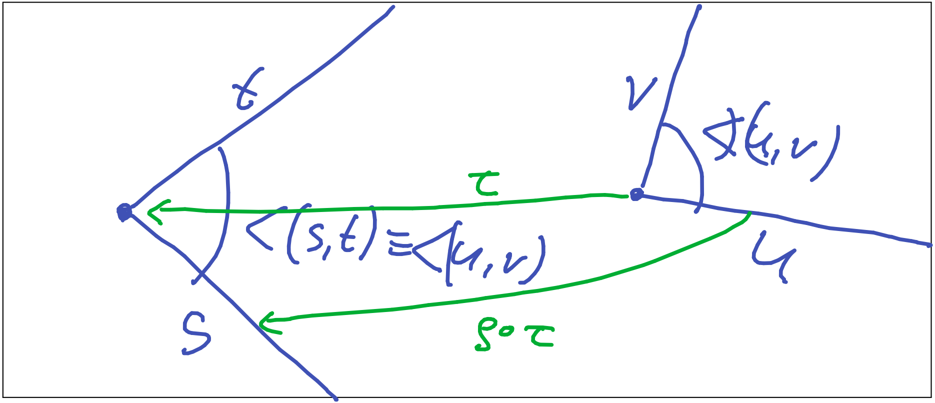
Erinnerung: gerade Bewegungen erhalten algebraisches Winkelmaß.

Zwei algebraische Winkel $\sphericalangle(s, t)$ und $\sphericalangle(u, v)$ sind kongruent, geschrieben $\sphericalangle(s, t) \equiv \sphericalangle(u, v)$, wenn es eine gerade Bewegung gibt, die den einen in den anderen überführt.

Algebraische Winkel sind kongruent genau dann, wenn sie gleiches Winkelmaß haben.

Eindeutigkeit algebraischer Winkel

Proposition. Für einen Strahl s und einen algebraischen Winkel $\sphericalangle(u, v)$ gibt es genau einen Strahl t, so dass $\sphericalangle(s, t) \equiv \sphericalangle(u, v)$.



Eindeutigkeit algebraischer Winkel

Proposition. Für einen Strahl s und einen algebraischen Winkel $\sphericalangle(u, v)$ gibt es genau einen Strahl t, so dass $\sphericalangle(s, t) \equiv \sphericalangle(u, v)$.

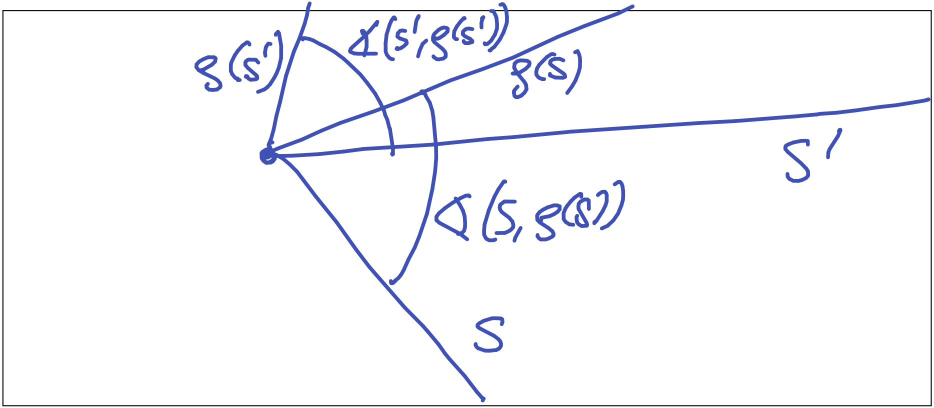
Beweis. Existenz:
Sei P der Ausgangspunkt von s, sei $u = \overrightarrow{RS}$ und $v = \overrightarrow{RT}$.
Sei $\{Q\} = s \cap P_{RS}$.
Sei τ die Verschiebung, die R auf P abbildet und ρ die Drehung mit Fixpunkt P, die $\tau(R)$ auf Q abbildet.
Dann ist $s = \rho(\tau(s))$, also bildet $t = \rho(\tau(v))$ den gewünschten Winkel.

Eindeutigkeit: Wenn $\sphericalangle(s, t')$ ein weiterer solcher Winkel ist, gibt es eine gerade Bewegung φ, die s festhält und t auf t' abbildet.
Die von s aufgespannte Gerade ist in der Fixpunktmenge von φ.
Also ist $\varphi = \mathrm{id}$ und $t = t'$. $\square$

Drehwinkel

Proposition. Für eine Drehung ρ ist der Winkel $\sphericalangle(s, \rho(s))$ bis auf Kongruenz vom Strahl s unabhängig.

Wenn s irgendein Strahl ab dem Fixpunkt von ρ ist, ist $\sphericalangle(s, \rho(s))$ der Drehwinkel von ρ, geschrieben ang ρ.



Drehwinkel

Proposition. Für eine Drehung ρ ist der Winkel $\sphericalangle(s, \rho(s))$ bis auf Kongruenz vom Strahl s unabhängig.

Wenn s irgendein Strahl ab dem Fixpunkt von ρ ist, ist $\sphericalangle(s, \rho(s))$ der Drehwinkel von ρ, geschrieben ang ρ.

Beweis. Sei ρ eine Drehung und s und s' Strahlen ab dem Fixpunkt von ρ. Da ρ eine gerade Bewegung ist, ist $\sphericalangle(s, s')$ kongruent zu $\sphericalangle(\rho(s), \rho(s'))$. Also ist

$$\begin{aligned}\sphericalangle(s, \rho(s)) \equiv \sphericalangle(s, s') + \sphericalangle(s', \rho(s)) \equiv \\ \sphericalangle(\rho(s), \rho(s')) + \sphericalangle(s', \rho(s)) \equiv \sphericalangle(s', \rho(s')).\end{aligned}$$

$\square$

Drehwinkel

Proposition. Für eine Drehung ρ ist der Winkel $\sphericalangle(s, \rho(s))$ bis auf Kongruenz vom Strahl s unabhängig.

Wenn s irgendein Strahl ab dem Fixpunkt von ρ ist, ist $\sphericalangle(s, \rho(s))$ der Drehwinkel von ρ, geschrieben ang ρ.

Folgerung. Sei P ein Punkt. Der Drehwinkel ist additiv: für Drehungen ρ_1 und ρ_2 mit Fixpunkt P gilt $\sphericalangle(\rho_2 \circ \rho_1) = \sphericalangle(\rho_2) + \sphericalangle(\rho_1)$.

Beweis. Sei s ein Strahl ab P. Es ist

$$\sphericalangle(s, \rho_2(\rho_1(s))) \equiv$$
$$\sphericalangle(s, \rho_1(s)) + \sphericalangle(\rho_1(s), \rho_2(\psi(s))) \equiv \sphericalangle(s, \rho_1(s)) + \sphericalangle(s, \rho_2(s)).$$

$\square$

Übersetzung Drehwinkel Drehungen

Seien ρ, ρ_1, ρ_2 die Drehungen mit Fixpunkt P um die Drehwinkel $\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2$.

Dann entsprechen sich die folgenden Aussagen

$\rho = \rho_2 \circ \rho_1$	wenn	$\vartheta = \vartheta_2 + \vartheta_1$
$\rho = \mathrm{id}$	wenn	$\vartheta = 0^\circ$
$\rho_1 = \rho_2^{-1}$	wenn	$\vartheta_1 = -\vartheta_2$

Drehwinkel ohne Fixpunkt

Bisher brauchten wir den Fixpunkt, um den Drehwinkel zu bestimmen.

Ziel jetzt: Drehwinkel für Gerade Bewegungen ohne Fixpunkt.

- Leichter zu bestimmen für Drehungen.
- Auch für Verschiebungen definiert.

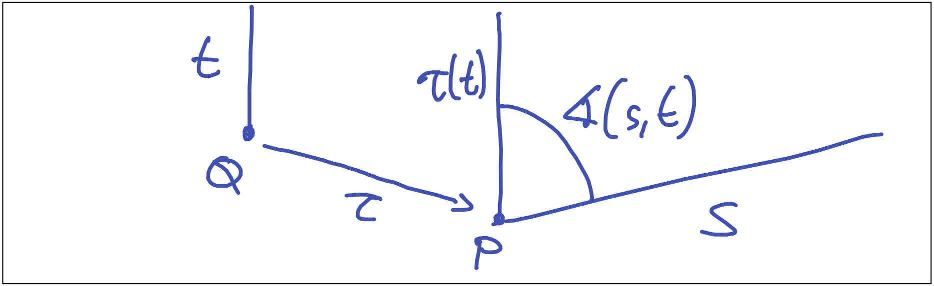
Seien s ein Strahl ab P und t ein Strahl ab Q.

Sei τ die Verschiebung, die Q auf P abbildet.

Wir definieren den verallgemeinerten algebraischen Winkel

$$\sphericalangle(s, t) := \sphericalangle(s, \tau(t)).$$

Drehwinkel ohne Fixpunkt



Seien s ein Strahl ab P und t ein Strahl ab Q.

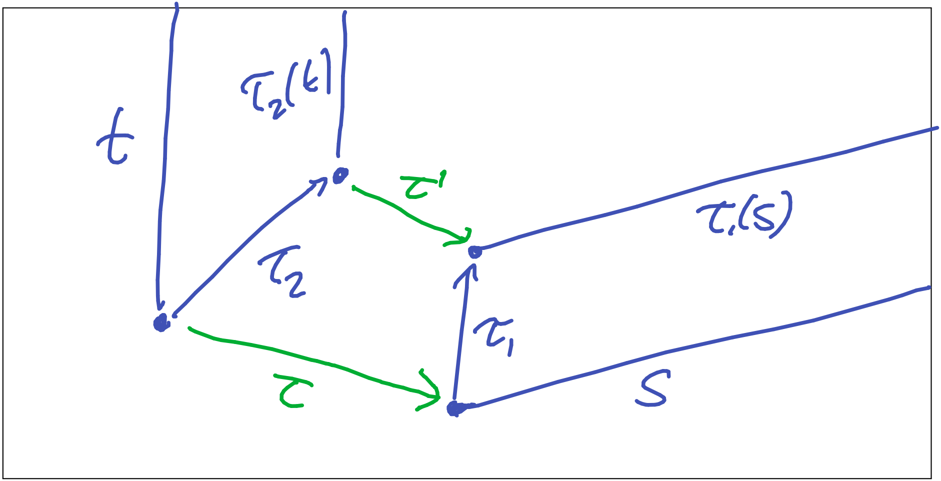
Sei τ die Verschiebung, die Q auf P abbildet.

Wir definieren den verallgemeinerten algebraischen Winkel

$$\sphericalangle(s,t) := \sphericalangle(s,\tau(t)).$$

Invarianz des verallgemeinerten Winkels

Proposition. Seien s und t Strahlen und τ_1 und τ_2 Verschiebungen. Es ist $\sphericalangle(\tau_1(s), \tau_2(t)) = \sphericalangle(s, t)$.



Invarianz des verallgemeinerten Winkels

Proposition. Seien s und t Strahlen und τ_1 und τ_2 Verschiebungen. Es ist $\sphericalangle(\tau_1(s), \tau_2(t)) = \sphericalangle(s, t)$.

Beweis. Seien P und Q die Ausgangspunkte von s und t.
Sei τ die Verschiebung, die Q auf P abbildet.
Dann ist $\tau' = \tau_1 \circ \tau\tau_2^{-1}$ die Verschiebung, die $\tau_2(Q)$ auf $\tau_1(P) = \tau_1(\tau(Q))$ abbildet.

$$\begin{aligned}
\sphericalangle(s, t) &= \sphericalangle(s, \tau(t)) \\
&\equiv \sphericalangle(\tau_1(s), \tau_1(\tau(t))) \\
&= \sphericalangle(\tau_1(s), \tau'(\tau_2(t))) = \sphericalangle(\tau_1(s), \tau_2(t)).
\end{aligned}$$

$\square$

Invarianz des verallgemeinerten Winkels

Proposition. Seien s und t Strahlen und τ_1 und τ_2 Verschiebungen. Es ist $\sphericalangle(\tau_1(s), \tau_2(t)) = \sphericalangle(s, t)$.

Proposition. Gerade Bewegungen erhalten den (verallgemeinerten) algebraischen Winkel: wenn φ eine gerade Bewegung ist, ist $\sphericalangle(\varphi(s), \varphi(t)) = \sphericalangle(s, t)$.

Beweis ähnlich

Drehwinkel gerader Bewegungen

Wir definieren den Drehwinkel $\operatorname{ang}\varphi$ einer geraden Bewegung φ durch

$$\operatorname{ang}\varphi = \angle(s, \varphi(s))$$

wobei s irgendein Strahl ist.

Wie beim Drehwinkel für Drehungen sieht man:

- Der Drehwinkel ist wohldefiniert (von s unabhängig).
- Der Drehwinkel ist additiv: $\sphericalangle(\varphi \circ \psi) = \sphericalangle\varphi + \sphericalangle\psi$.
- Insbesondere $\sphericalangle(\varphi^{-1}) = -\sphericalangle(\varphi)$.

Proposition. Eine gerade Bewegung φ hat Drehwinkel $\operatorname{ang}\varphi = 0°$ genau dann, wenn φ eine Verschiebung ist.

Zerlegung gerader Bewegungen

Proposition. Sei P ein Punkt. Jede gerade Bewegung ψ lässt sich eindeutig schreiben als

$$\psi = \tau \circ \rho$$

wobei τ eine Verschiebung ist und ρ eine Drehung mit Fixpunkt P. Genauer ist ρ die Drehung mit Drehwinkel $\operatorname{ang} \psi$.

Beweis. Wenn ρ die Drehung mit Fixpunkt P und Drehwinkel $\operatorname{ang} \psi$ ist, hat die Bewegung $\tau = \psi \circ \rho^{-1}$ Drehwinkel

$$\operatorname{ang} \tau = \operatorname{ang} \psi + \operatorname{ang}(\rho_{\operatorname{ang} \psi}^{-1}) = \operatorname{ang} \psi - \operatorname{ang} \rho_{\operatorname{ang} \psi} = \operatorname{ang} \psi - \operatorname{ang} \psi = 0^\circ,$$

ist also eine Verschiebung.

Umgekehrt muss die Drehung ρ den gleichen Drehwinkel haben wie ψ, da Verschiebungen Drehwinkel 0° haben. □

Übersicht

Vektoren

Drehwinkel

Parität

Parität

Die *Parität* einer Bewegung ist definiert als

$$\begin{aligned} \operatorname{par}\varphi &= 0 && \text{wenn } \varphi \text{ gerade,} \\ \operatorname{par}\varphi &= 1 && \text{wenn } \varphi \text{ ungerade.} \end{aligned}$$

Proposition. Sei ℓ eine beliebige Gerade. Jede Bewegung φ lässt sich eindeutig schreiben als $\varphi = \psi \circ \zeta$ wobei ψ eine gerade Bewegung ist und ζ die Gerade ℓ fixiert. Genauer ist $\zeta = \sigma_\ell^{\operatorname{par}\varphi}$.

Merke $\sigma_\ell^0 = \mathrm{id}$, $\sigma_\ell^1 = \sigma_\ell$.

Beweis. Wenn $\zeta = \sigma^{\operatorname{par}\varphi}$ ist, ist $\psi = \varphi \circ \zeta$ gerade.

Soll umgekehrt ψ gerade sein, muss $\zeta = \sigma_\ell$ sein wenn φ ungerade ist und die Identität wenn φ gerade ist. □

Zerlegung von Bewegungen

Satz. Sei P ein beliebiger Punkt und ℓ eine beliebige Gerade.

Jede Bewegung φ ist eindeutig beschrieben durch einen Vektor $\underline{v}$, einen algebraischen Winkel ϑ und eine Parität ε so dass gilt

$$\varphi = \tau_{\underline{v}} \circ \rho_{P,\vartheta} \circ \sigma_\ell^\varepsilon.$$

Diese Parameter ergeben sich wie folgt: die Parität $\varepsilon = \operatorname{par} \varphi$ ist die von φ, der Winkel ist der Drehwinkel $\vartheta = \sphericalangle\psi$ von $\psi = \varphi \circ \sigma_\ell^\varepsilon$, der Vektor ist der Verschiebungsvektor $\underline{v} = \operatorname{vec} \tau$ von $\tau = \psi \circ \rho_{P,\vartheta}^{-1}$.

Beweis. Zusammensetzen, was wir bisher gezeigt haben. □