Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

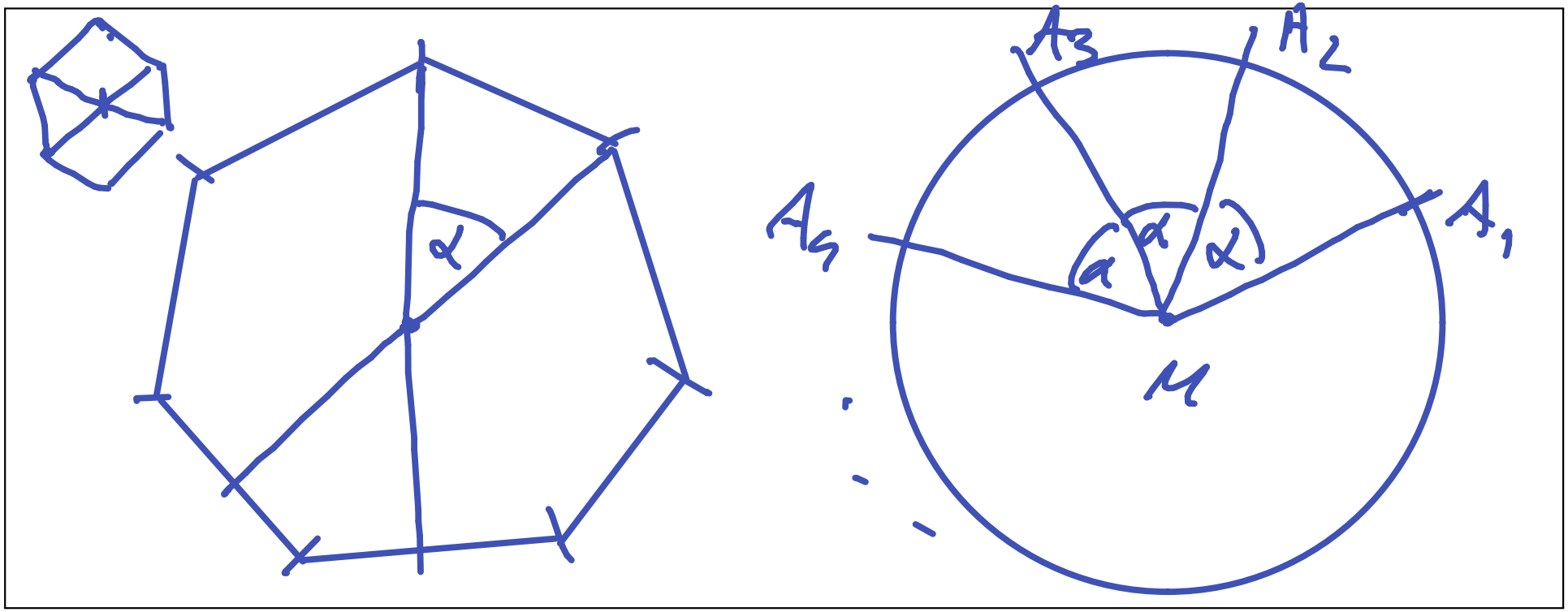
Verhältnisse, Ähnlichkeiten

Stefan Witzel

Konstruktionsprobleme: Zahlen und Winkel

Viele Konstruktionsprobleme bestehen im Wesentlichen darin, eine Zahl oder einen Winkel zu konstruieren.

Beispiel. Um ein regelmäßiges n-Eck zu konstruieren, muss man im Wesentlichen einen Winkel $360^\circ/n$ konstruieren:



Konstruktionsprobleme: Zahlen und Winkel

Viele Konstruktionsprobleme bestehen im Wesentlichen darin, eine Zahl oder einen Winkel zu konstruieren.

Beispiel. Um ein regelmäßiges n-Eck zu konstruieren, muss man im Wesentlichen einen Winkel $360^\circ/n$ konstruieren:

Zahlen konstruieren? Was soll das heißen? Wozu soll das gut sein?

Ziel: wir wollen ein regelmäßiges Fünfeck konstruieren.

Zahlen

Zahlen kann man

- addieren $a + b$,
- multiplizieren $a \cdot b$,
- subtrahieren $a - b$,
- dividieren a/b $(b \neq 0)$.

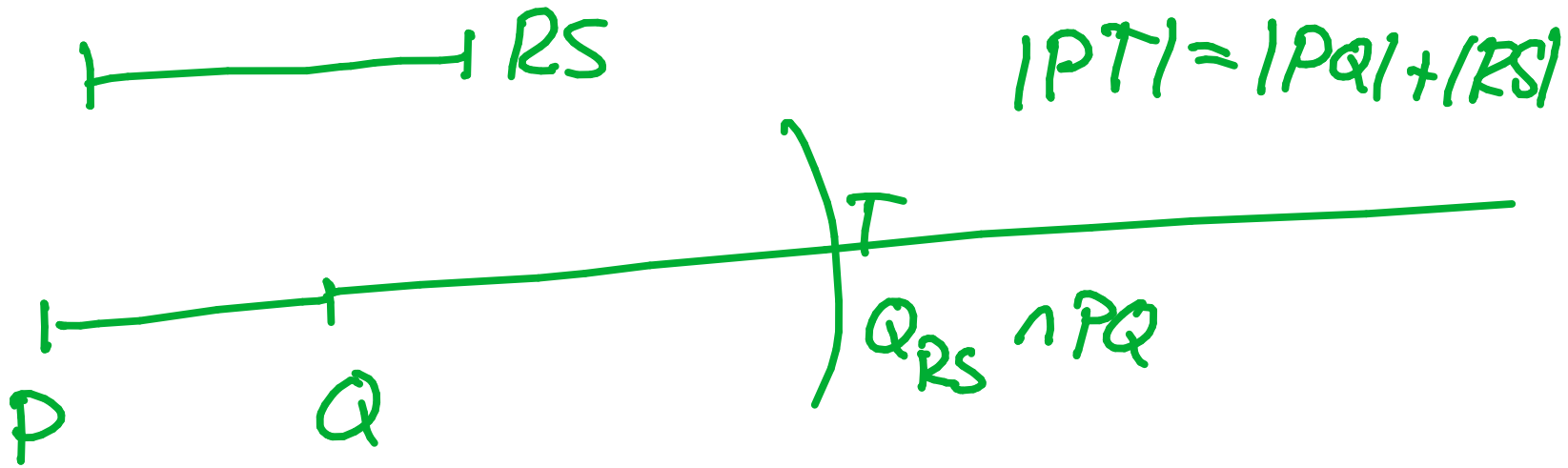
Es gibt ausgezeichnete Zahlen

- 0 mit $0 + a = a + 0 = a$ und
- 1 mit $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ $(a \neq 0)$.

Längen kann man

✓ Produkt von Längen ist Flächeninh.

✓ Quotient von Längen ist keine Länge sondern Zahl



Zahlen

Zahlen kann man

- addieren $a + b$,
- multiplizieren $a \cdot b$,
- subtrahieren $a - b$,
- dividieren a/b $(b \neq 0)$.

Längenverhältnisse kann man

ja, wenn multiplizieren

ja, siehe nächstes Jahr

Es gibt ausgezeichnete Zahlen

- 0 mit $0 + a = a + 0 = a$ und
- 1 mit $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ $(a \neq 0)$.

$$\frac{|PQ|}{|RS|} + \frac{|TU|}{|RS|} = \frac{|PQ| + |TU|}{|RS|}$$

Zahlen

Zahlen kann man

- addieren $a + b$,
- multiplizieren $a \cdot b$,
- subtrahieren $a - b$,
- dividieren a/b ($b \neq 0$).

Längenverhältnisse kann man

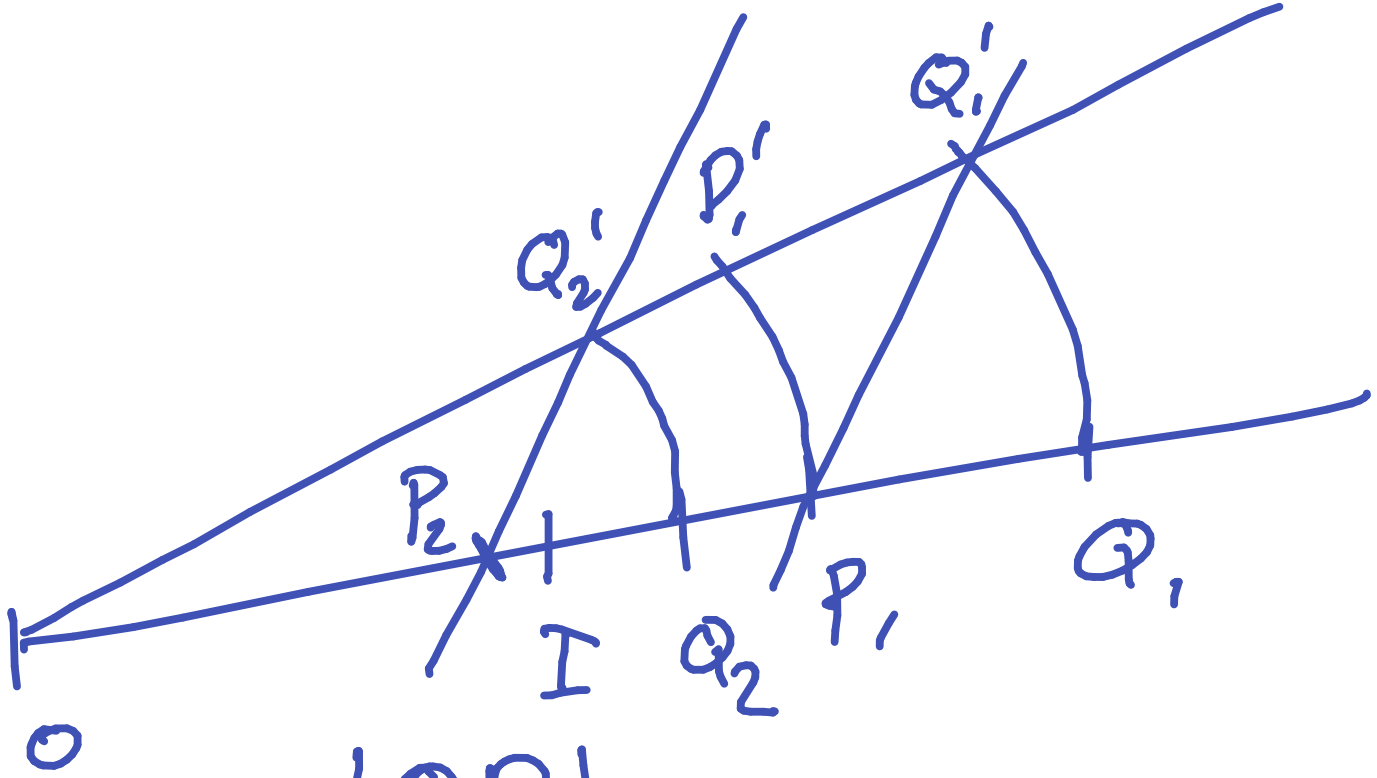
Es gibt ausgezeichnete Zahlen

- 0 mit $0 + a = a + 0 = a$ und
- 1 mit $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ ($a \neq 0$).

$\rightsquigarrow$ Zahlen treten auf als Längenverhältnisse.

Multiplikation geometrisch

Problem. Sei $\overrightarrow{OI}$ ein Strahl und seien $P_1, Q_1, Q_2 \in \overrightarrow{OI}$ Punkte mit $Q_1 \neq O$. Konstruiere den Punkt P_2 mit $|OP_2| = |OP_1|/|OQ_1| \cdot |OQ_2|$.



$$|OP_2| = \frac{|OP_1|}{|OQ_1|} \cdot |OQ_2|$$

Multiplikation geometrisch

Problem. Sei $\overrightarrow{OI}$ ein Strahl und seien $P_1, Q_1, Q_2 \in \overrightarrow{OI}$ Punkte mit $Q_1 \neq O$. Konstruiere den Punkt P_2 mit $|OP_2| = |OP_1|/|OQ_1| \cdot |OQ_2|$.

Konstruktion. Sei I' nicht auf OI.
Sei $\{Q_1'\} = O_{Q_1} \cap \overrightarrow{OI'}$ und $\{Q_2'\} = O_{Q_2} \cap \overrightarrow{OI'}$.
Sei $g_1 = Q_1'P_1$ und sei g_2 die Parallele zu g_1 durch Q_2'.
Der Schnittpunkt P_2 von g_2 und $\overrightarrow{OI}$ ist der gesuchte Punkt. $\Diamond$

Multiplikation geometrisch

Problem. Sei $\overrightarrow{OI}$ ein Strahl und seien $P_1, Q_1, Q_2 \in \overrightarrow{OI}$ Punkte mit $Q_1 \neq O$. Konstruiere den Punkt P_2 mit $|OP_2| = |OP_1|/|OQ_1| \cdot |OQ_2|$.

Konstruktion. Sei I' nicht auf OI.
Sei $\{Q_1'\} = O_{Q_1} \cap \overrightarrow{OI'}$ und $\{Q_2'\} = O_{Q_2} \cap \overrightarrow{OI'}$.
Sei $g_1 = Q_1'P_1$ und sei g_2 die Parallele zu g_1 durch Q_2'.
Der Schnittpunkt P_2 von g_2 und $\overrightarrow{OI}$ ist der gesuchte Punkt. $\Diamond$

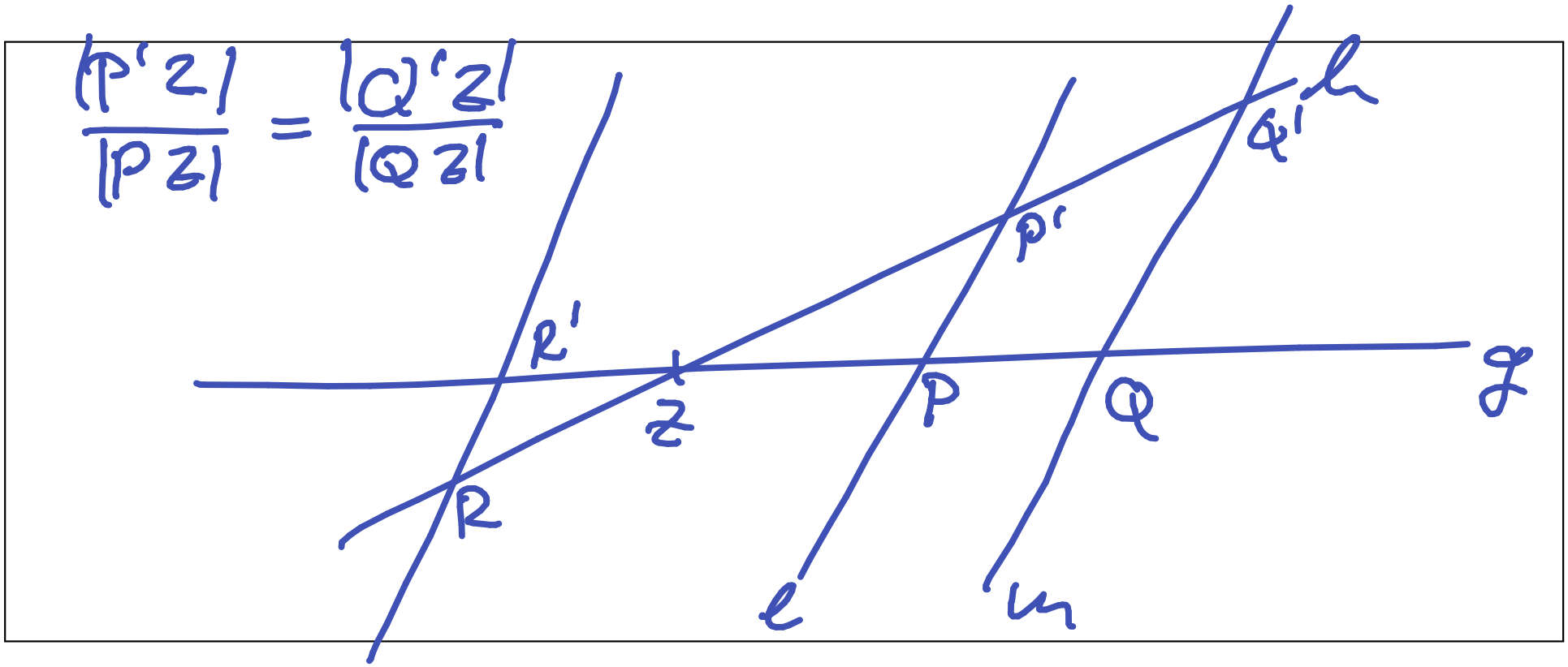
Beweis. ?!

Strahlensatz

Satz (1. Strahlensatz). Seien g und h Geraden die sich in einem Punkt Z schneiden und seien ℓ und m parallele Geraden, die nicht durch Z gehen und weder zu g noch zu h parallel sind.

Seien $\{P\} = g \cap \ell$, $\{Q\} = g \cap m$, $\{P'\} = h \cap \ell$, $\{Q'\} = h \cap m$. Es ist

$$\frac{|P'Z|}{|PZ|} = \frac{|Q'Z|}{|QZ|}.$$



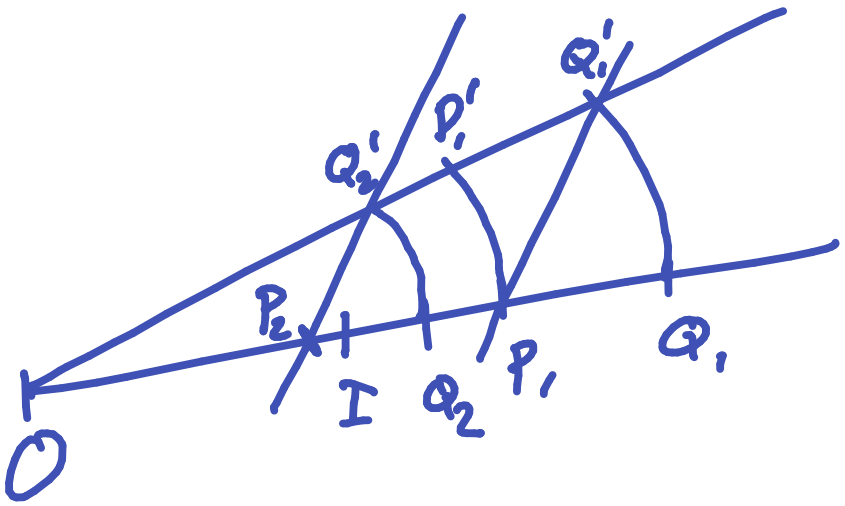
Multiplikation geometrisch

Problem. Sei $\overrightarrow{OI}$ ein Strahl und seien $P_1, Q_1, Q_2 \in \overrightarrow{OI}$ Punkte mit $Q_1 \neq O$. Konstruiere den Punkt P_2 mit $|OP_2| = |OP_1|/|OQ_1| \cdot |OQ_2|$.

Konstruktion. Sei I' nicht auf OI.
Sei $\{Q_1'\} = O_{Q_1} \cap \overrightarrow{OI'}$ und $\{Q_2'\} = O_{Q_2} \cap \overrightarrow{OI'}$.
Sei $g_1 = Q_1'P_1$ und sei g_2 die Parallele zu g_1 durch Q_2'.
Der Schnittpunkt P_2 von g_2 und $\overrightarrow{OI}$ ist der gesuchte Punkt. $\Diamond$

Beweis. Nach dem Strahlensatz ist $|OP_1|/|OQ_1'| = |OP_2|/|OQ_2'|$. Die Behauptung folgt weil $|OQ_1| = |OQ_1'|$ und $|OQ_2| = |OQ_2'|$. $\square$

$$\frac{|OP_1|}{|OP_2|} = \frac{|OQ_1'|}{|OQ_2'|} = \frac{|OQ_1|}{|OQ_2|}$$



$$\frac{|OP_1|}{|OP_2|} = \frac{|OQ_1|}{|OQ_2|} \qquad \cdot |OP_2|$$

$$\frac{|OP_1|}{\cancel{|OP_2|}} \cdot \cancel{|OP_2|} = \frac{|OQ_1|}{|OQ_2|} \cdot |OP_2|$$

$$|OP_1| = \frac{|OQ_1|}{|OQ_2|} \cdot |OP_2| \qquad \text{(Längen)} \qquad \cdot |OQ_1|^{-1}$$

$$\frac{|OP_1|}{|OQ_1|} = \frac{1}{|OQ_2|} \cdot |OP_2| = \frac{|OP_2|}{|OQ_2|} \qquad \text{(Längen-verh.)} \qquad \cdot |OQ_2|$$

$$\frac{|OP_1|}{|OQ_1|} \cdot |OQ_2| = |OP_2| \qquad \cdot |OQ_1|$$

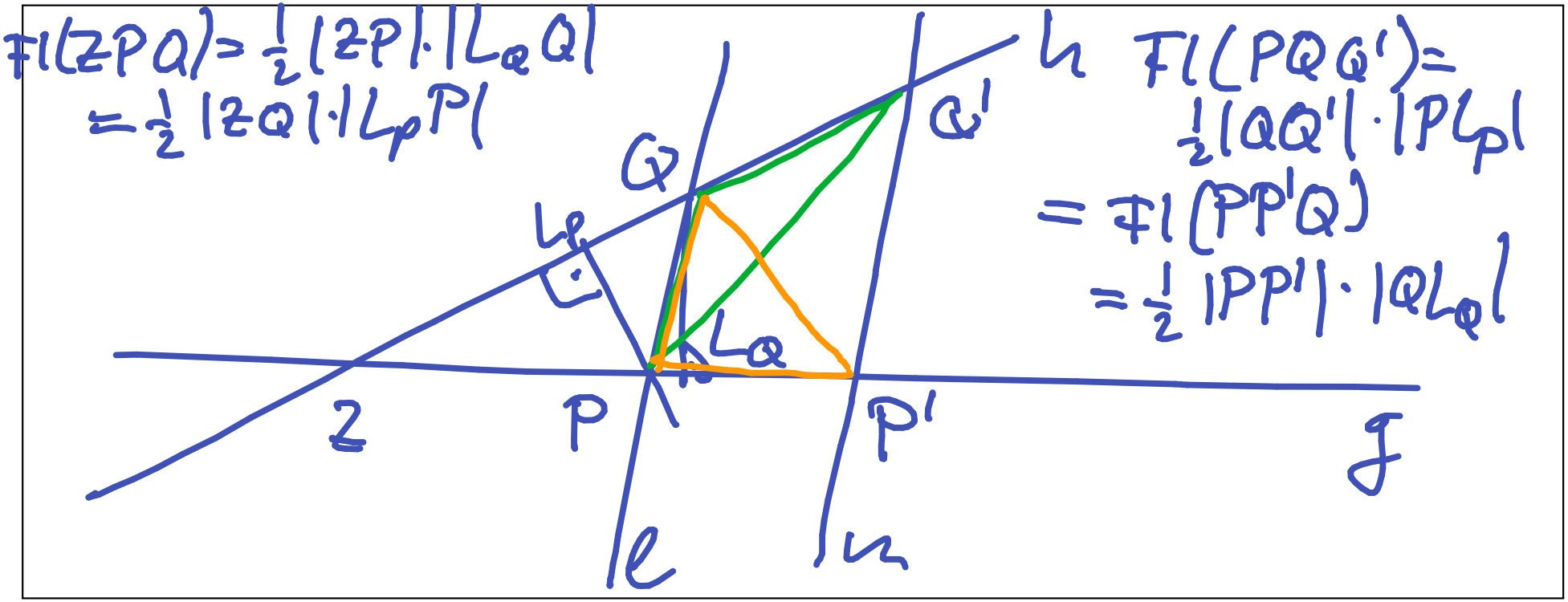
$$|OP_1| \cdot |OQ_2| = |OP_2| \cdot |OQ_1| \qquad \text{(Flächen-inh.)}$$

Strahlensatz

Satz (1. Strahlensatz). Seien g und h Geraden die sich in einem Punkt Z schneiden und seien ℓ und m parallele Geraden, die nicht durch Z gehen und weder zu g noch zu h parallel sind.

Seien $\{P\} = g \cap \ell$, $\{Q\} = g \cap m$, $\{P'\} = h \cap \ell$, $\{Q'\} = h \cap m$. Es ist

$$\frac{|P'Z|}{|PZ|} = \frac{|Q'Z|}{|QZ|}.$$



Strahlensatz

Satz (1. Strahlensatz). Seien g und h Geraden die sich in einem Punkt Z schneiden und seien ℓ und m parallele Geraden, die nicht durch Z gehen und weder zu g noch zu h parallel sind.

Seien $\{P\} = g \cap \ell$, $\{Q\} = g \cap m$, $\{P'\} = h \cap \ell$, $\{Q'\} = h \cap m$. Es ist

$$\frac{|P'Z|}{|PZ|} = \frac{|Q'Z|}{|QZ|}.$$

Beweis. Wir zeigen, dass $|P'P|/|PZ| = |Q'Q|/|QZ|$.

Sei L_P der Lotfußpunkt von P auf h und L_Q der Lotfußpunkt von Q auf g.

Flächeninhalt$(ZPQ) = 1/2 \cdot |ZQ| \cdot |\cancel{QL_Q}\ PL_P| = 1/2 \cdot |ZP| \cdot |\cancel{PL_P}\ QL_Q|$

Flächeninhalt$(PQQ') = 1/2 \cdot |QQ'| \cdot |\cancel{QL_Q}\ PL_P|$, Flächeninhalt$(PQP') = 1/2 \cdot |PP'| \cdot |\cancel{PL_P}\ QL_Q|$.

Flächeninhalt$(PQQ') =$ Flächeninhalt(PQP'): Grundseite PQ, zwischen selben Parallelen.

$$\text{Also} \quad \frac{|PP'| \cdot |\cancel{PL_P}\ QL_Q|}{|ZP| \cdot |\cancel{PL_P}\ QL_Q|} = \frac{|QQ'| \cdot |\cancel{QL_Q}\ PL_P|}{|ZQ| \cdot |\cancel{QL_Q}\ PL_P|}. \quad [\ldots]$$

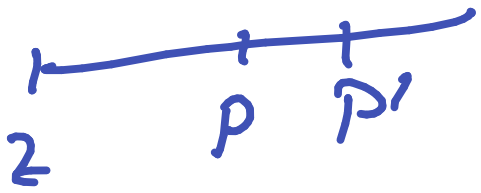
Strahlensatz

Satz (1. Strahlensatz). Seien g und h Geraden die sich in einem Punkt Z schneiden und seien ℓ und m parallele Geraden, die nicht durch Z gehen und weder zu g noch zu h parallel sind.

Seien $\{P\} = g \cap \ell$, $\{Q\} = g \cap m$, $\{P'\} = h \cap \ell$, $\{Q'\} = h \cap m$. Es ist

$$\frac{|P'Z|}{|PZ|} = \frac{|P'P|}{|PZ|} + \underbrace{\frac{|PZ|}{|PZ|}}_{1}$$

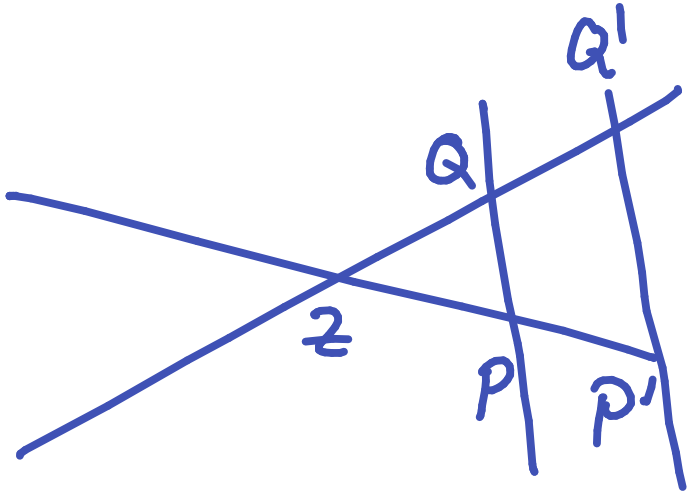
$$\frac{|P'Z|}{|PZ|} = \frac{|Q'Z|}{|QZ|}.$$



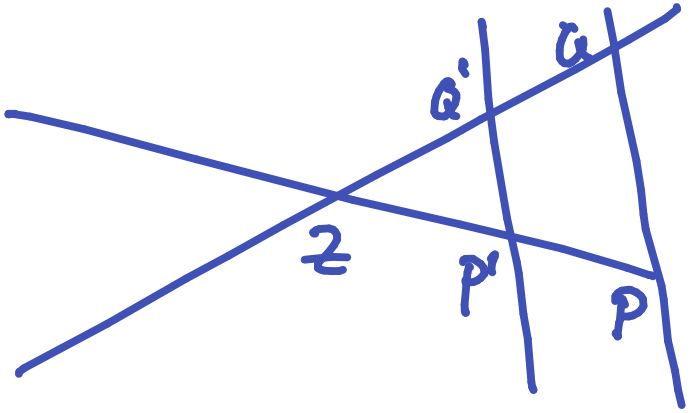
Beweis. [...] Wissen $|P'P|/|PZ| = |Q'Q|/|QZ|$.
Es ist $\pm|P'P| \pm |PZ| = |P'Z|$ und $\pm|Q'Q| \pm |QZ| = |Q'Z|$.
Vorzeichen hängen von Reihenfolge von Z, P, P' und Z, Q, Q' ab.
Die Reihenfolge gleiche, weil ℓ und m parallel sind.
Also ist

$$\frac{|P'Z|}{|PZ|} = \pm\frac{|P'P|}{|PZ|} \pm \frac{|PZ|}{|PZ|} = \pm\frac{|P'P|}{|PZ|} \pm 1$$

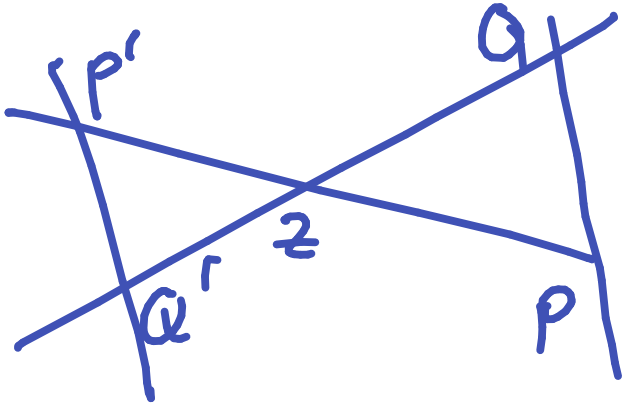
$$= \pm\frac{|Q'Q|}{|QZ|} \pm 1 = \pm\frac{|Q'Q|}{|QZ|} \pm \frac{|QZ|}{|QZ|} = \frac{|Q'Z|}{|QZ|} \quad \square$$



$$|ZP'| = |ZP| + |PP'|$$
$$|ZQ'| = |ZQ| + |QQ'|$$



$$|ZP'| = |ZP| - |PP'|$$
$$|ZQ'| = |ZQ| - |QQ'|$$



$$|ZP'| = -|ZP| + |PP'|$$
$$|ZQ'| = -|ZQ| + |QQ'|$$

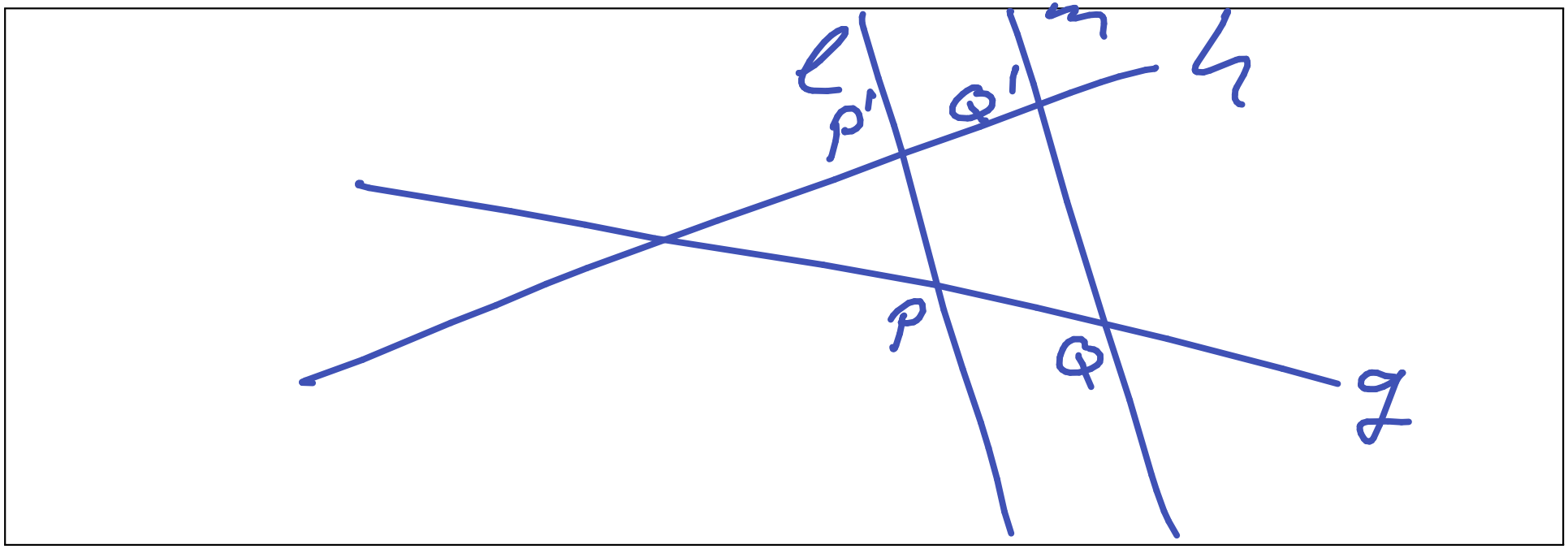
Umkehrung

Proposition. Seien g und h Geraden die sich in einem Punkt Z schneiden und seien ℓ und m Geraden, die nicht durch Z gehen und weder zu g noch zu h parallel sind.

Seien $\{P\} = g \cap \ell$, $\{Q\} = g \cap m$, $\{P'\} = h \cap \ell$, $\{Q'\} = h \cap m$. Wenn

$$\frac{|P'Z|}{|PZ|} = \frac{|Q'Z|}{|QZ|}$$

dann sind ℓ und m parallel.



Zusammenhang Längen $\leftrightarrow$ Längenverhältnisse

Wenn wir uns eine feste Länge $|OI|$ als Einheitslänge vorgeben, können wir jede andere Länge darauf beziehen.

Bekommen Entsprechung

$$\text{Länge} \longleftrightarrow \text{Längenverhältnis}$$

$$|AB| \longleftrightarrow \frac{|AB|}{|OI|}.$$

Beispiel. Aus

$$|OP_2| = \frac{|OP_1|}{|OQ_1|} \cdot |OQ_2|$$

wird

$$\frac{|OP_2|}{|OI|} = \frac{|OP_1|}{|OQ_1|} \cdot \frac{|OQ_2|}{|OI|}.$$

$P_1 \parallel$

$P \parallel$

Zusammenhang Längen $\leftrightarrow$ Längenverhältnisse

Wenn wir uns eine feste Länge $|OI|$ als Einheitslänge vorgeben, können wir jede andere Länge darauf beziehen.

Bekommen Entsprechung

$$\text{Länge} \longleftrightarrow \text{Längenverhältnis}$$

$$|AB| \longleftrightarrow \frac{|AB|}{|OI|}.$$

Beispiel. Aus

$$|OP_2| = \frac{|OP_1|}{|OQ_1|} \cdot |OQ_2|$$

wird

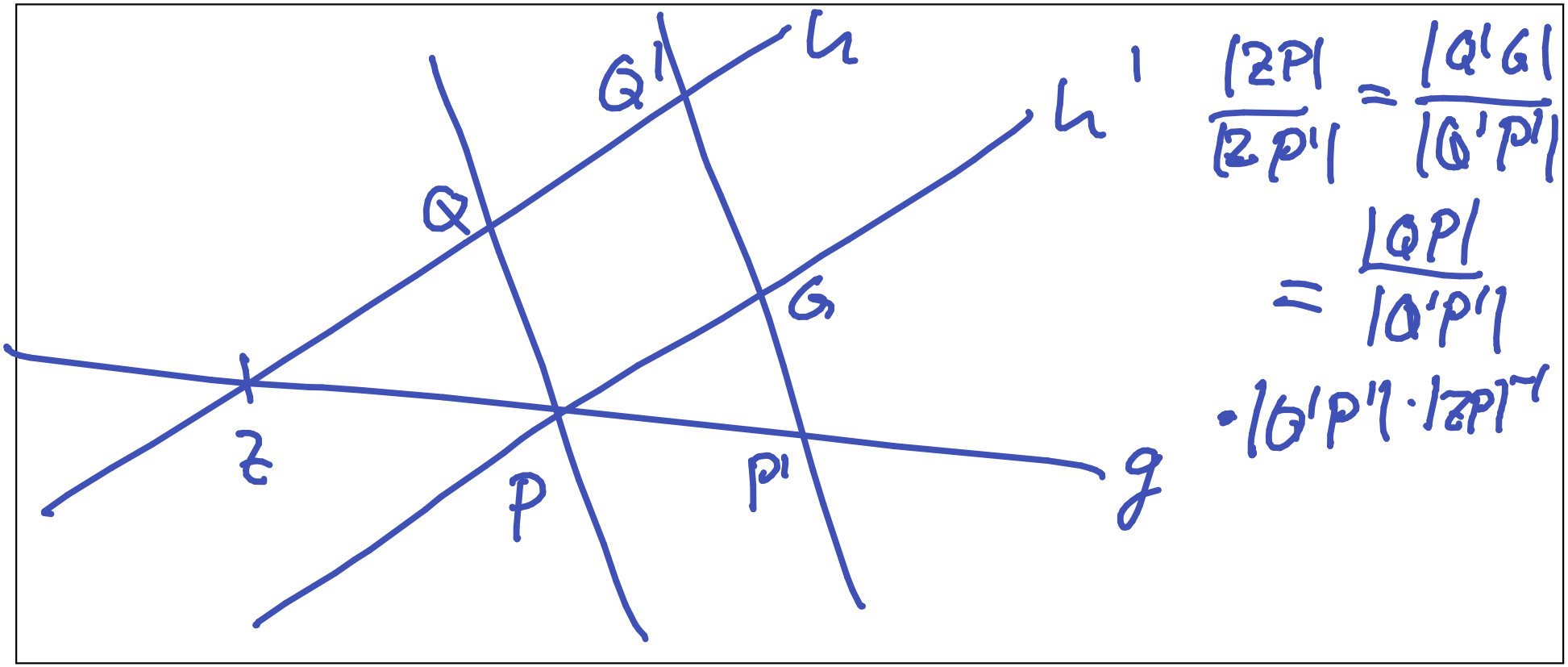
$$\frac{|OP_2|}{|OI|} = \frac{|OP_1|}{|OQ_1|} \cdot \frac{|OQ_2|}{|OI|}.$$

Wir nennen unser Einheitssegment häufig $\overline{OI}$ mit O für 0 und I für 1.

2. Strahlensatz

Folgerung (2. Strahlensatz). Seien die Punkte und Geraden wie im 1. Strahlensatz und seien ℓ und m parallel. Dann ist

$$\frac{|PQ|}{|ZP|} = \frac{|P'Q'|}{|ZP'|}.$$



$$\frac{|ZP|}{|ZP'|} = \frac{|Q'G|}{|Q'P'|} = \frac{|QP|}{|Q'P'|} \cdot |Q'P'| \cdot |ZP|^{-1}$$

2. Strahlensatz

Folgerung (2. Strahlensatz). Seien die Punkte und Geraden wie im 1. Strahlensatz und seien ℓ und m parallel. Dann ist

$$\frac{|PQ|}{|ZP|} = \frac{|P'Q'|}{|ZP'|}.$$

Beweis. Sei h' Parallele zu h durch P und G Schnittpunkt von h' mit m.
Wir wenden den 1. Strahlensatz mit Zentrum P' an.
Es ist $|ZP|/|ZP'| = |Q'G|/|Q'P'|$.
Da $PQQ'G$ ein Parallelogramm ist, ist $|Q'G| = |PQ|$. $\square$