Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

Verhältnisse, Ähnlichkeiten

Stefan Witzel

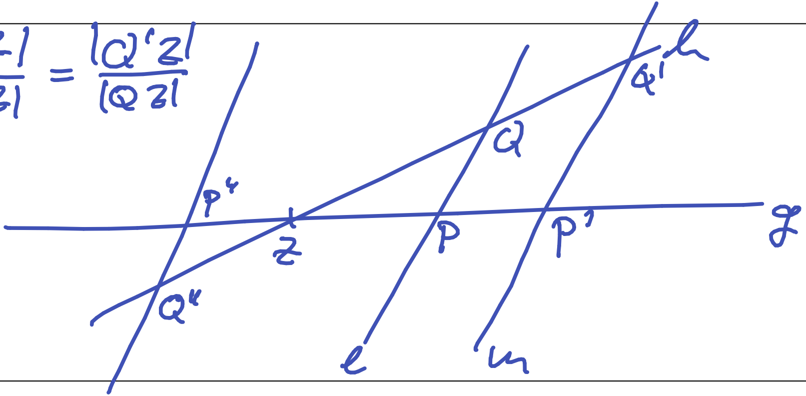
Strahlensatz

Satz (1. Strahlensatz). Seien g und h Geraden die sich in einem Punkt Z schneiden und seien ℓ und m parallele Geraden, die nicht durch Z gehen und weder zu g noch zu h parallel sind.

Seien $\{P\} = g \cap \ell$, $\{Q\} = g \cap m$, $\{P'\} = h \cap \ell$, $\{Q'\} = h \cap m$. Es ist

$$\frac{|P'Z|}{|PZ|} = \frac{|Q'Z|}{|QZ|}.$$

$$\frac{|P'Z|}{|PZ|} = \frac{|Q'Z|}{|QZ|}$$



3. Strahlensatz

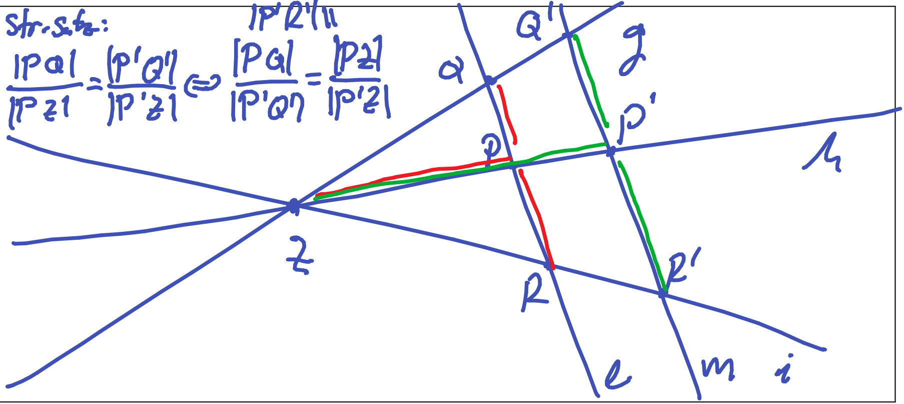
Folgerung (3. Strahlensatz). Seien die Punkte und Geraden wie im 1. Strahlensatz und seien ℓ und m parallel. Sei i eine weitere Gerade durch Z, die ℓ und m in Punkten R und R' schneidet. Dann ist

$$\frac{|PQ|}{|PR|} = \frac{|P'Q'|}{|P'R'|}.$$

$$\frac{|PR|}{|P'R'|}$$

2. Str.-Satz:

$$\frac{|PQ|}{|PZ|} = \frac{|P'Q'|}{|P'Z|} \iff \frac{|PQ|}{|P'Q'|} = \frac{|PZ|}{|P'Z|}$$



3. Strahlensatz

Folgerung (3. Strahlensatz). Seien die Punkte und Geraden wie im 1. Strahlensatz und seien ℓ und m parallel. Sei i eine weitere Gerade durch Z, die ℓ und m in Punkten R und R' schneidet. Dann ist

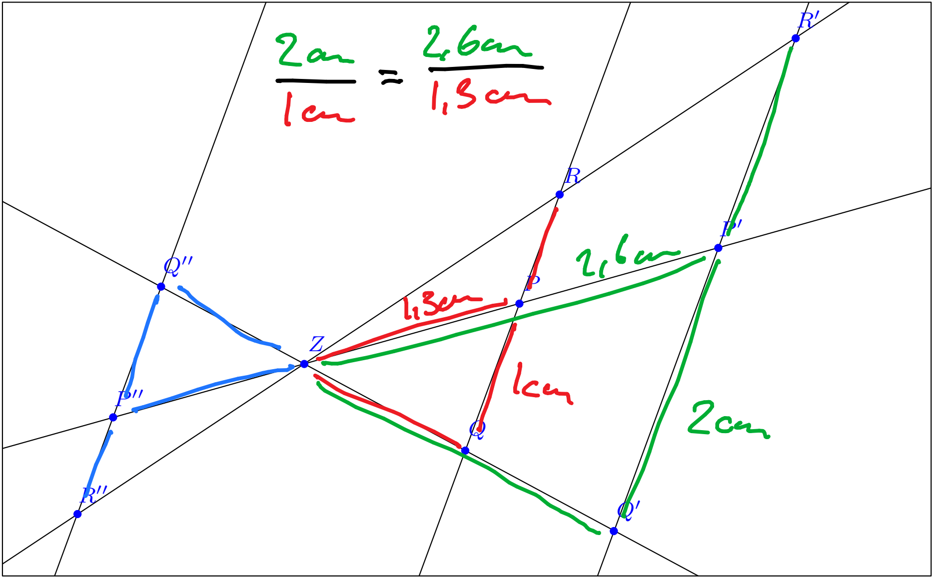
$$\frac{|PQ|}{|PR|} = \frac{|P'Q'|}{|P'R'|}.$$

Beweis. Wir wenden zweimal den 2. Strahlensatz an und erhalten

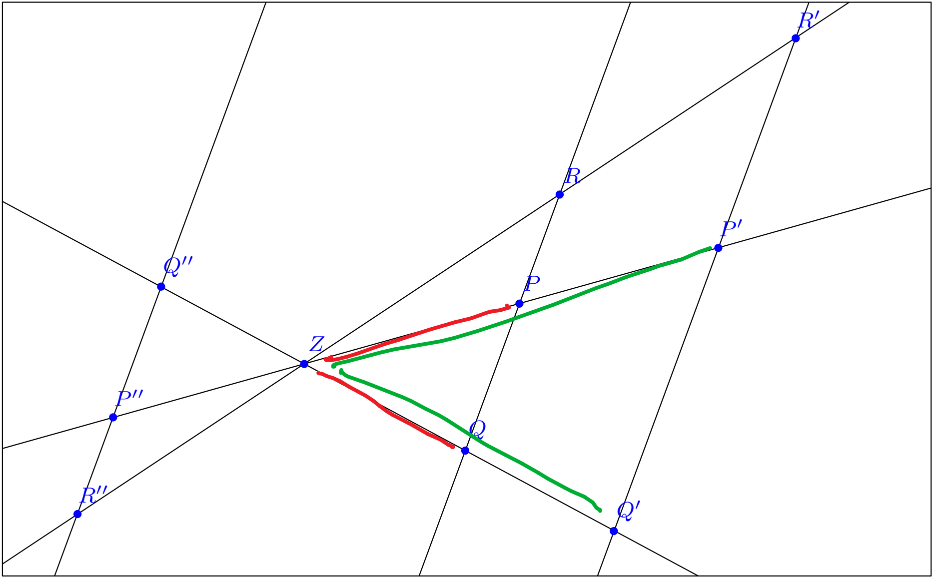
$$\frac{|PQ|}{|PZ|} = \frac{|P'Q'|}{|P'Z|} \quad \text{und} \quad \frac{|PR|}{|PZ|} = \frac{|P'R'|}{|P'Z|}.$$

Umformen ergibt $|PQ|/|P'Q'| = |PZ|/|P'Z| = |PR|/|P'R'|$. $\square$

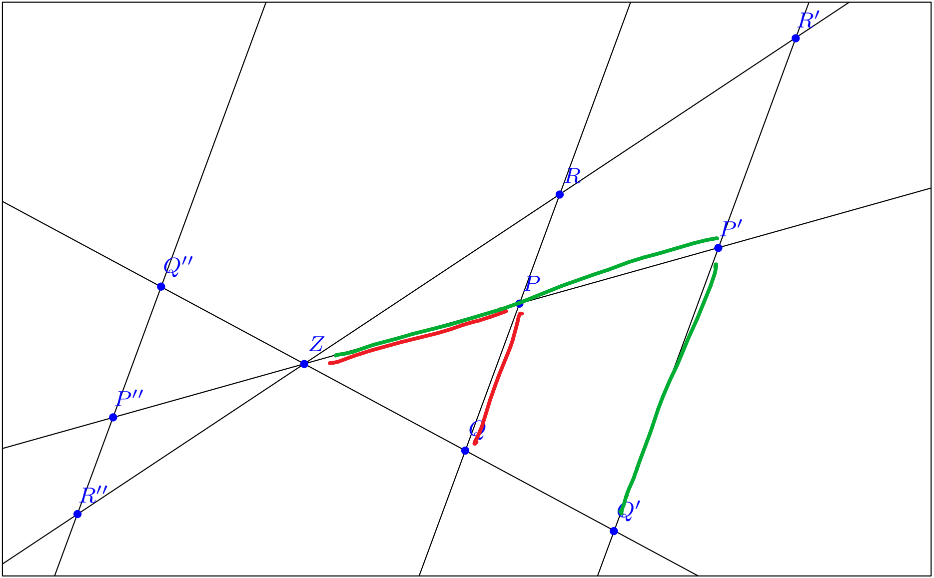
Strahlensätze



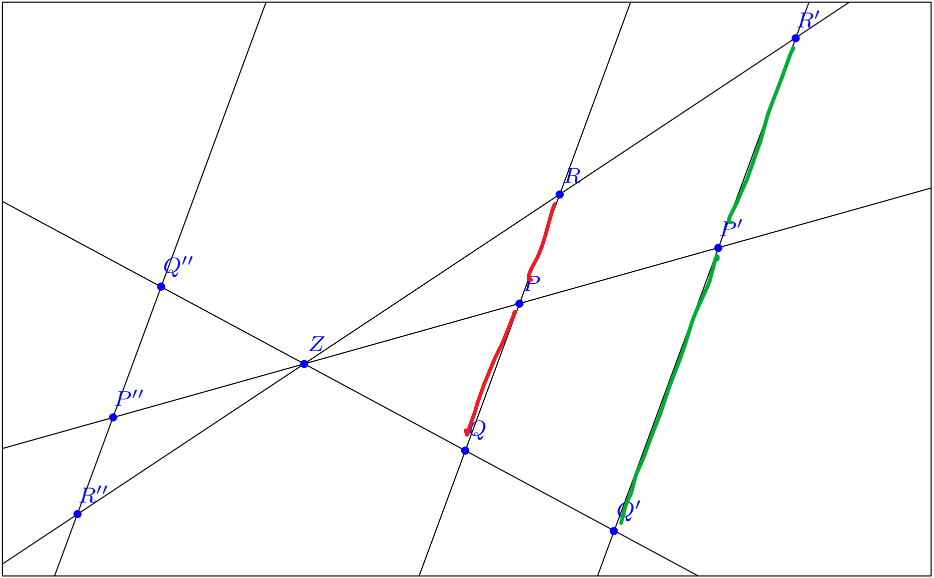
Strahlensätze : Erster



Strahlensätze: Zweiter



Strahlensätze : Dritte



Ähnlichkeiten

Erinnerung: Bewegungen erhalten Länge, $|\varphi(P)\varphi(Q)| = |PQ|$.

Zahlen sind Längenverhältnisse. Was erhält Längenverhältnisse?

Eine bijektive Abbildung $\varphi\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ heißt Ähnlichkeit wenn für beliebige vier Punkte P, Q, R, S gilt

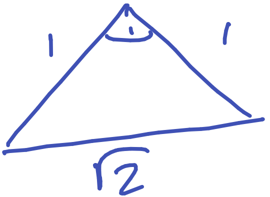
$$|PQ| \cdot |\varphi(R)\varphi(S)| = |RS| \cdot |\varphi(P)\varphi(Q)|.$$

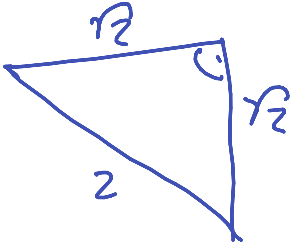
Die Gleichung ist äquivalent zu

$$\frac{|PQ|}{|RS|} = \frac{|\varphi(P)\varphi(Q)|}{|\varphi(R)\varphi(S)|} \quad \text{und} \quad \frac{|RS|}{|PQ|} = \frac{|\varphi(R)\varphi(S)|}{|\varphi(P)\varphi(Q)|}$$

wann immer diese definiert sind, Ähnlichkeiten erhalten also Längenverhältnisse.

Zwei Figuren f und f' heißen *ähnlich*, geschrieben $f \sim f'$, wenn es eine Ähnlichkeit φ gibt, die f auf f' abbildet: $\varphi(f) = f'$.





ähnlich, aber nicht
kongruent

Ähnlichkeiten bilden Gruppe

Proposition. Die Komposition von zwei Ähnlichkeiten ist eine Ähnlichkeit. Die Inverse einer Ähnlichkeit ist eine Ähnlichkeit.

Beweis. Seien $P \neq Q$ und $R \neq S$ Punkte. Wenn φ und ψ Ähnlichkeiten sind ist

$$\frac{|\psi(\varphi(P))\psi(\varphi(Q))|}{|\psi(\varphi(R))\psi(\varphi(S))|} \underset{\uparrow\,\psi\text{ Ähnlichkeit}}{=} \frac{|\varphi(P)\varphi(Q)|}{|\varphi(R)\varphi(S)|} \underset{\uparrow\,\varphi\text{ Ähnlichkeit}}{=} \frac{|PQ|}{|RS|}$$

also ist $\psi \circ \varphi$ eine Ähnlichkeit.

Wenn φ eine Ähnlichkeit ist, wenden wir die definierende Gleichung auf die Punkte $\varphi^{-1}(P)$, $\varphi^{-1}(Q)$, $\varphi^{-1}(R)$ und $\varphi^{-1}(S)$ an und erhalten

$$\frac{|PQ|}{|RS|} = \frac{|\varphi(\underline{\varphi^{-1}(P)})\varphi(\underline{\varphi^{-1}(Q)})|}{|\varphi(\underline{\varphi^{-1}(R)})\varphi(\underline{\varphi^{-1}(S)})|} \underset{\uparrow\,\varphi\text{ Ähnlichkeit}}{=} \frac{|\underline{\varphi^{-1}(P)}\underline{\varphi^{-1}(Q)}|}{|\underline{\varphi^{-1}(R)}\underline{\varphi^{-1}(S)}|}$$

also ist φ^{-1} eine Ähnlichkeit. $\square$

Ähnlichkeiten bilden Gruppe

Proposition. Die Komposition von zwei Ähnlichkeiten ist eine Ähnlichkeit. Die Inverse einer Ähnlichkeit ist eine Ähnlichkeit.

Beweis. Seien $P \neq Q$ und $R \neq S$ Punkte. Wenn φ und ψ Ähnlichkeiten sind ist

$$\frac{|\psi(\varphi(P))\psi(\varphi(Q))|}{|\psi(\varphi(R))\psi(\varphi(S))|} = \frac{|\varphi(P)\varphi(Q)|}{|\varphi(R)\varphi(S)|} = \frac{|PQ|}{|RS|}$$

also ist $\psi \circ \varphi$ eine Ähnlichkeit.

Wenn φ eine Ähnlichkeit ist, wenden wir die definierende Gleichung auf die Punkte $\varphi^{-1}(P)$, $\varphi^{-1}(Q)$, $\varphi^{-1}(R)$ und $\varphi^{-1}(S)$ an und erhalten

$$\frac{|PQ|}{|RS|} = \frac{|\varphi(\varphi^{-1}(P))\varphi(\varphi^{-1}(Q)|}{|\varphi(\varphi^{-1}(R))\varphi(\varphi^{-1}(S))|} = \frac{|\varphi^{-1}(P)\varphi^{-1}(Q)|}{|\varphi^{-1}(R)\varphi^{-1}(S)|}$$

also ist φ^{-1} eine Ähnlichkeit. $\square$

Folgerung. Die Menge der Ähnlichkeiten ist eine Gruppe.

Streckungen

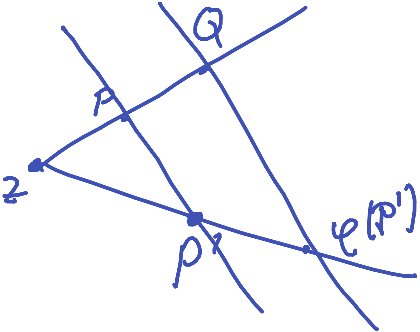
Sei Z ein Punkt und $P, Q \neq Z$. $(Q \in \overrightarrow{ZP})$

Die bijektive Abbildung $\varphi\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ die jeden Strahl ab M invariant lässt und für jedes $R \neq Z$

$$\frac{|Z\varphi(R)|}{|ZR|} = \frac{|ZQ|}{|ZP|}$$

erfüllt ist die *Streckung* mit *Zentrum* Z und *Streckungsfaktor* $|ZQ|/|ZP|$.

$$\frac{|Z\varphi(P')|}{|ZP'|} = \frac{|ZQ|}{|ZP|}$$



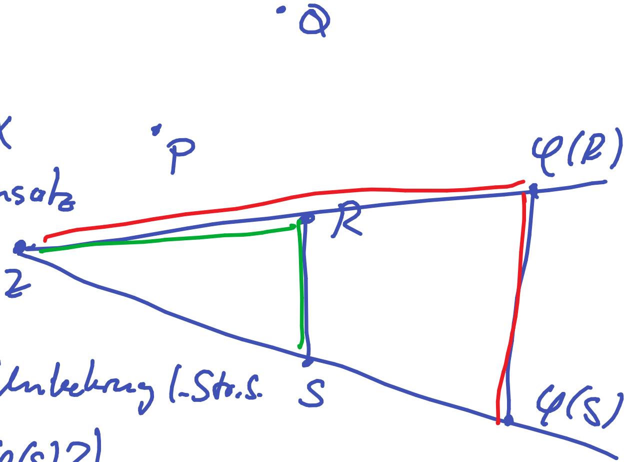
$$x = \frac{|ZQ|}{|ZP|}$$

Wollen zeigen

$$\frac{|\varphi(R)\varphi(S)|}{|RS|} = x$$

$\parallel$ 2. Strahlensatz

$$\frac{|\varphi(R)Z|}{|RZ|} = x$$



Parallelität: Umkehrung 1. Str. S.

$$\frac{|\varphi(R)Z|}{|RZ|} = \frac{|\varphi(S)Z|}{|SZ|}$$