Streckungen

Sei Z ein Punkt und $P, Q \neq Z$.

Die bijektive Abbildung $\varphi\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ die jeden Strahl ab M invariant lässt und für jedes $R \neq Z$

$$\frac{|Z\varphi(R)|}{|ZR|} = \frac{|ZQ|}{|ZP|}$$

erfüllt ist die *Streckung* mit *Zentrum* Z und *Streckungsfaktor* $|ZQ|/|ZP|$.

Proposition. Streckungen sind Ähnlichkeiten.

Beweis. Sei α die Streckung mit Mittelpunkt Z und Streckungsfaktor $x = |ZQ|/|ZP|$. Seien R und S beliebige Punkte.

Müssen zeigen: $|\alpha(R)\alpha(S)|/|RS| = x$ ist.

Nach Definition von Streckungen ist $|Z\alpha(R)|/|ZR| = x = |Z\alpha(S)|/|ZS|$.

Aus der Umkehrung des Strahlensatzes folgt, dass RS und $\alpha(R)\alpha(S)$ parallel sind.

Aus dem 2. Strahlensatz folgt, dass $|\alpha(R)\alpha(S)|/|Z\alpha(R)| = |RS|/|ZR|$.
Umformen ergibt $|\alpha(R)\alpha(S)|/|RS| = |Z\alpha(R)|/|ZR| = x$. $\square$

Ähnlichkeit = Bewegung ∘ Streckung

Proposition. Jede Ähnlichkeit φ kann geschrieben werden als Komposition $\varphi = \iota \circ \alpha$ einer Streckung α und einer Bewegung ι.

Das Zentrum der Streckung kann dabei beliebig gewählt werden.

Beweis. Sei M ein beliebiger Punkt. Sei $P \neq M$ beliebig und sei $Q \in \overrightarrow{MP}$ der Punkt mit $|MQ| = |\varphi(M)\varphi(P)|$.

Sei α die Streckung mit Zentrum M, die P auf Q abbildet.

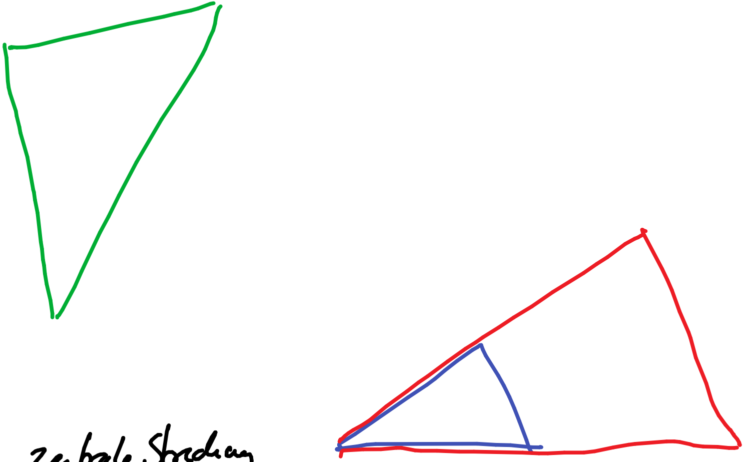
Für Punkte $A \neq B$ und $C \neq D$ gilt dann

$$\frac{|\varphi(A)\varphi(B)|}{|AB|} = \frac{|\varphi(M)\varphi(P)|}{|MP|} = \frac{|MQ|}{|MP|} = \frac{|\alpha(C)\alpha(D)|}{|CD|}. \tag{1}$$

Wir definieren $\underline{\iota := \alpha^{-1} \circ \varphi}$, so dass gilt $\varphi = \alpha \circ \iota$. Wenn wir in (1) $C = \iota(A))$ und $D = \iota(B))$ setzen, erhalten wir

$$\frac{|\varphi(A)\varphi(B)|}{|AB|} = \frac{|\alpha(\alpha^{-1}(\varphi(A)))\alpha(\alpha^{-1}(\varphi(B)))|}{|\iota(A)\iota(B)|} = \frac{|\varphi(A)\varphi(B)|}{|\iota(A)\iota(B)|}.$$

Umformen ergibt, dass $|\iota(A)\iota(B)| = |AB|$. Also ist ι eine Bewegung. $\square$

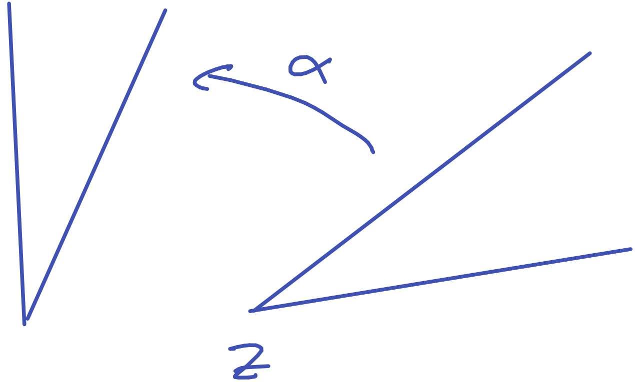


Zentrale Streckung

Bewegung

Winkel invariant unter Ähnlichkeiten

Folgerung. Ähnliche Winkel sind kongruent: Wenn $\angle(s,t)$ ein Winkel ist und α eine Ähnlichkeit, dann ist $\angle(s,t) \equiv \angle(\alpha(s), \alpha(t))$.



Winkel invariant unter Ähnlichkeiten

Folgerung. Ähnliche Winkel sind kongruent: Wenn $\angle(s,t)$ ein Winkel ist und α eine Ähnlichkeit, dann ist $\angle(s,t) \equiv \angle(\alpha(s), \alpha(t))$.

Beweis. Sei Z der Scheitel von $\angle(s,t)$. Mit der letzte Proposition schreiben wir α als Komposition einer Streckung mit Zentrum Z und einer Bewegung. Die Streckung bildet $\angle(s,t)$ auf sich selbst ab und die Bewegung auf einen kongruenten Winkel. $\square$

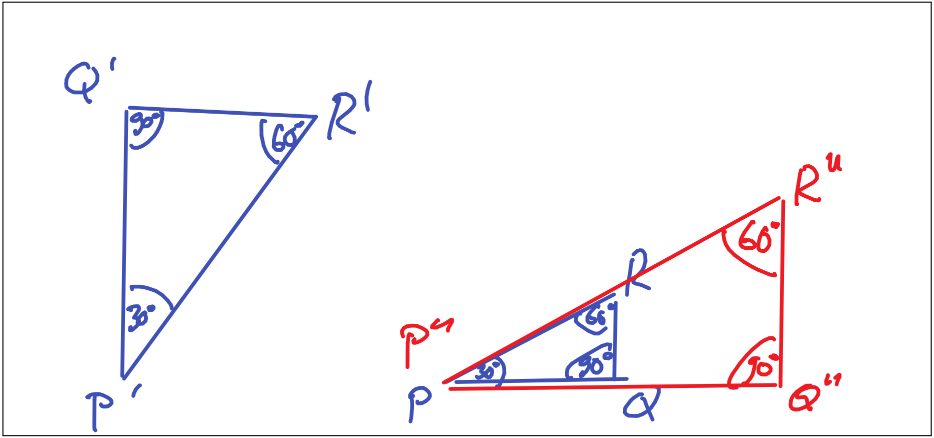
Kein Kongruenzsatz „WWW“?!

Wir haben nie einen Kongruenzsatz „WWW“ gezeigt.

Winkel zu erhalten heißt nicht, Längen zu erhalten. . .

Ähnlichkeitssatz

Satz (Ähnlichkeitssatz „WWW“). Wenn PQR und $P'Q'R'$ Dreiecke sind mit $\angle RPQ = \angle R'P'Q'$, $\angle PQR \equiv \angle P'Q'R'$ und $\angle QRP \equiv \angle Q'R'P'$, dann ist $PQR \sim P'Q'R'$.



Ähnlichkeitssatz

Satz (Ähnlichkeitssatz „WWW“). Wenn PQR und $P'Q'R'$ Dreiecke sind mit $\angle RPQ = \angle R'P'Q'$, $\angle PQR \equiv \angle P'Q'R'$ und $\angle QRP \equiv \angle Q'R'P'$, dann ist $PQR \sim P'Q'R'$.

Beweis. Sei ι die Bewegung, die $\angle RPQ$ auf $\angle R'P'Q'$ abbildet.
Wir ersetzen PQR durch sein Bild unter ι und können also annehmen, dass $\angle RPQ = \angle R'P'Q'$ ist.
Da die beiden innen liegenden Winkel $\angle PQR$ und $\angle P'Q'R'$ kongruent sind, folgt dass QR und $Q'R'$ parallel sind.
Mit dem Strahlensatz folgt

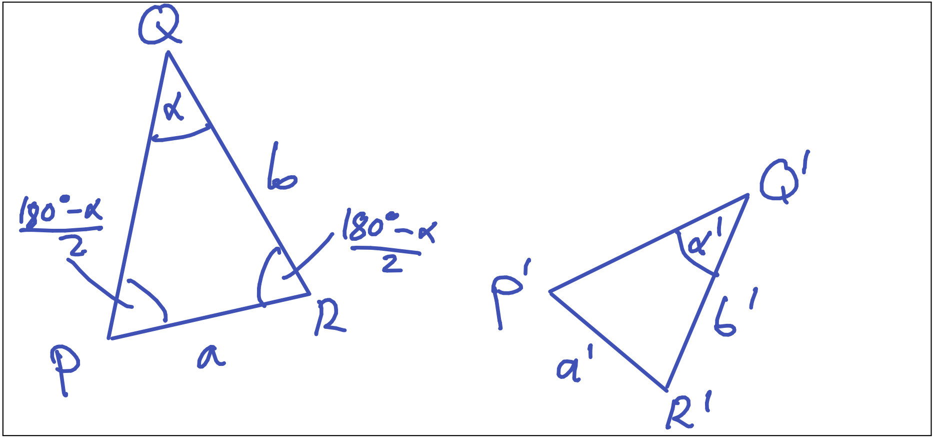
$$\frac{|P'R'|}{|PR|} = \frac{|P'Q'|}{|PQ|}.$$

Ist also α die Streckung mit Zentrum P und Streckungsfaktor $|P'R'|/|PR|$, dann ist $\alpha(PQR) = P'Q'R'$. $\square$

Seitenverhältnisse und Winkel

Proposition. Seien PQR und $P'Q'R'$ gleichschenklige Dreiecke mit $|PQ| = |QR|$ und $|P'Q'| = |Q'R'|$.

Es ist $\sphericalangle PQR \equiv \sphericalangle P'Q'R'$ genau dann, wenn $\sphericalangle PQ/\sphericalangle PR = \sphericalangle P'Q'/\sphericalangle P'R'$.



Seitenverhältnisse und Winkel

Proposition. Seien PQR und $P'Q'R'$ gleichschenklige Dreiecke mit $|PQ| = |QR|$ und $|P'Q'| = |Q'R'|$.

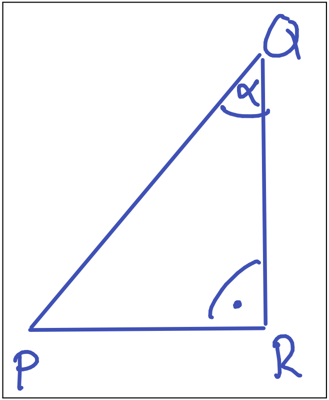
Es ist $\sphericalangle PQR \equiv \sphericalangle P'Q'R'$ genau dann, wenn $\sphericalangle PQ/\sphericalangle PR = \sphericalangle P'Q'/\sphericalangle P'R'$.

Beweis. Wenn die Bedingung an die Winkel erfüllt ist, folgt aus der Gleichschenkligkeit und der Winkelsumme im Dreieck , dass alle Winkel paarweise kongruent sind. Aus dem Ähnlichkeitssatz folgt, dass die Dreiecke ähnlich sind, also sind insbesondere die Seitenverhältnisse gleich.
Sind umgekehrt die Seitenverhältnisse gleich, sind die Dreiecke nach einer zentrischen Streckung kongruent und haben damit gleiche Winkel. $\square$

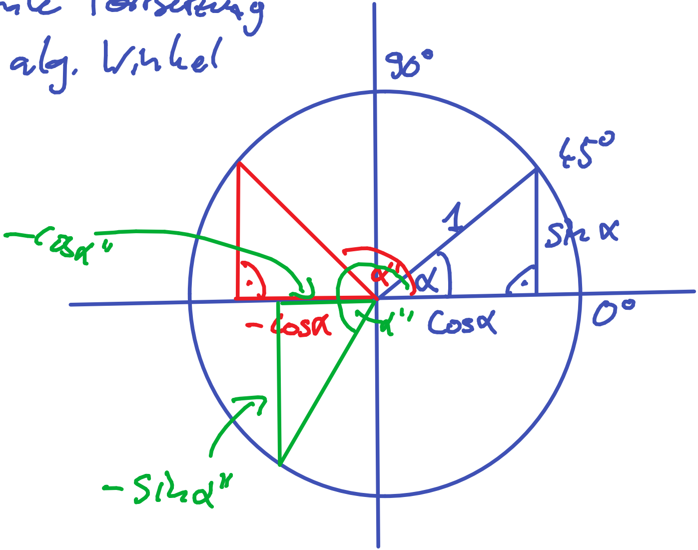
Winkel und Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck

Sei PQR ein rechtwinkliges Dreieck mit $\angle PQR = \alpha$ und $\angle QRP = 90°$.

Hypothenuse	$\overline{PQ}$
Ankathete	$\overline{QR}$
Gegenkathete	$\overline{PR}$
Sinus	$\sin\alpha = \dfrac{\|PR\|}{\|PQ\|} = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$
Kosinus	$\cos\alpha = \dfrac{\|QR\|}{\|PQ\|} = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$
Tangens	$\tan\alpha = \dfrac{\|PR\|}{\|QR\|} = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$



Formale Fortsetzung
auf alg. Winkel



Winkel und Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck

Sei PQR ein rechtwinkliges Dreieck mit $\angle PQR = \alpha$ und $\angle QRP = 90^\circ$.

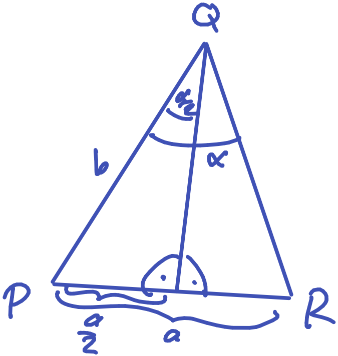
Hypothenuse	$\overline{PQ}$
Ankathete	$\overline{QR}$
Gegenkathete	$\overline{PR}$
Sinus	$\sin\alpha = \dfrac{\lvert PR\rvert}{\lvert PQ\rvert} = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$
Kosinus	$\cos\alpha = \dfrac{\lvert QR\rvert}{\lvert PQ\rvert} = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$
Tangens	$\tan\alpha = \dfrac{\lvert PR\rvert}{\lvert QR\rvert} = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$

Helfen uns, den Zusammenhang zwischen Winkeln und Längenverhältnissen zu *beschreiben* und *berechnen*, aber nicht zu *konstruieren*.

Rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke

Sei PQR gleichschenklig, $|PQ| = |QR|$.

Kann in zwei kongruente, rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden.



Also ist

$$\frac{|PR|}{|PQ|} = 2\sin\left(\frac{\angle PQR}{2}\right) = 2\cos\angle RPQ.$$