Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

Geraden am Kreis

Stefan Witzel

Segmente und Geraden am Kreis

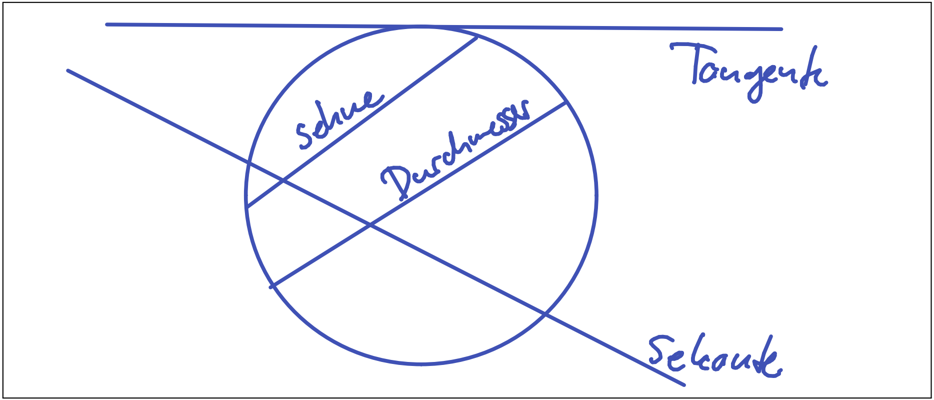
Sei k ein Kreis.

Eine *Sekante* ist eine Gerade, die k in zwei Punkten schneidet.

Eine *Tangente* ist eine Gerade, die k in einem Punkt schneidet.

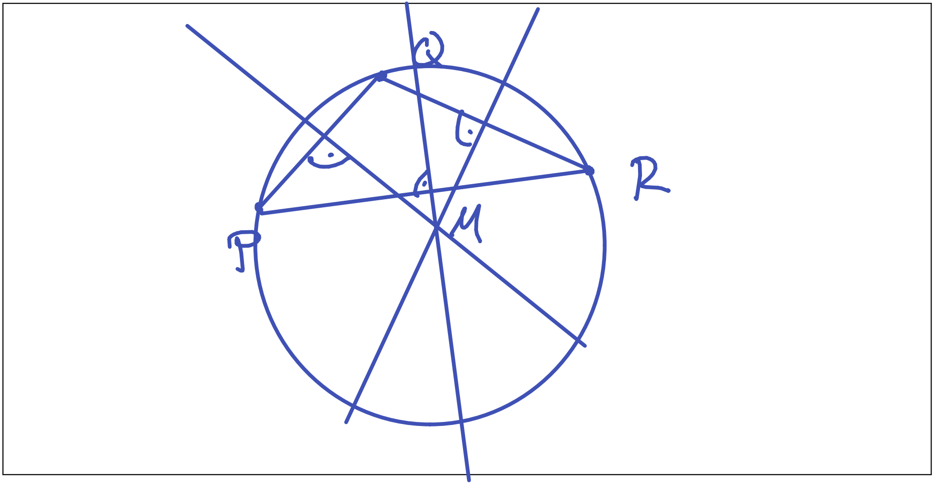
Eine *Sehne* ist ein Segment $\overline{PQ}$ mit $P, Q \in k$.

Ein *Durchmesser* ist eine Sehne, die den Mittelpunkt von k enthält.



Kreis durch drei Punkte

Proposition. Durch drei nicht kollineare Punkte P, Q und R geht genau ein Kreis.



Kreis durch drei Punkte

Proposition. Durch drei nicht kollineare Punkte P, Q und R geht genau ein Kreis.

Beweis. Die Menge der Punkte L, die gleichen Abstand von P und Q haben die Mittelsenkrechte ℓ.
Die die Menge der Punkte N, die gleichen Abstand von Q und R haben die Mittelsenkrechte n.
Die Menge der Punkte, die gleichen Abstand von P, Q und R haben, ist also der Schnittpunkt von ℓ und n.
Er existiert weil PQ und QR nicht parallel sind und somit auch ℓ und n nicht parallel sind. □

Kreis durch drei Punkte

Proposition. Durch drei nicht kollineare Punkte P, Q und R geht genau ein Kreis.

Der *Umkreis* eines Dreiecks PQR ist ein Kreis, der jeden der Punkte P, Q und R enthält.

Folgerung. Jedes Dreieck hat einen (eindeutigen) Umkreis. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.

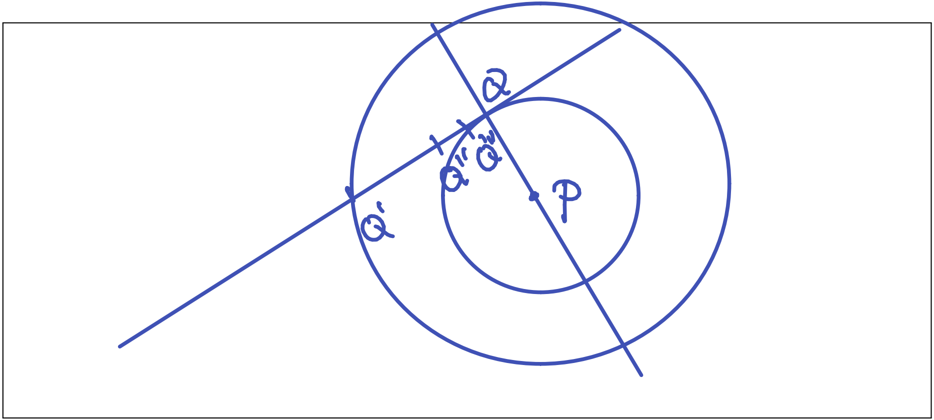
Beweis. Der Kreis in der Proposition ist offensichtlich der Umkreis. Der Mittelpunkt wurde konstruiert als der Schnittpunkt zweier beliebiger Seitenhalbierender. Da der Kreis eindeutig ist, geht die dritte Seitenhalbierende ebenso durch den Punkt. $\square$

Abstand von Geraden

Wenn P ein Punkt ist und g eine Gerade, ist der *Abstand* zwischen P und g den kleinsten Abstand zwischen P und einem Punkt Q auf g.

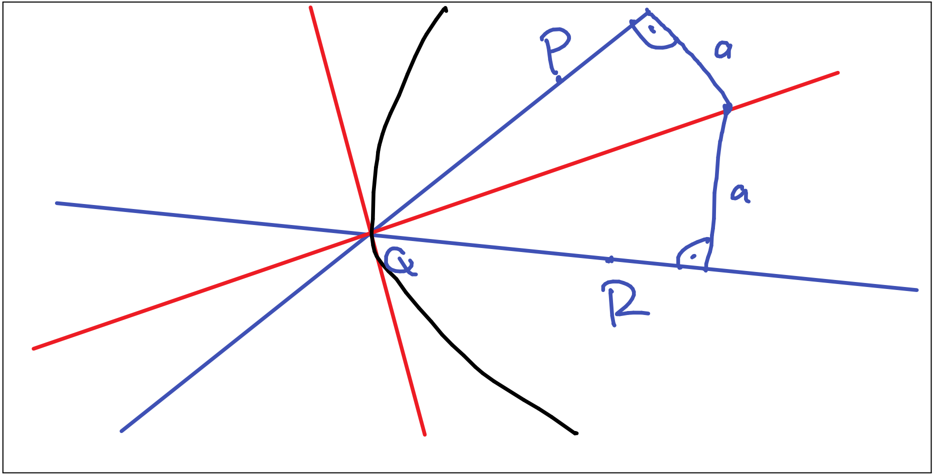
Dieser Punkt Q ist eindeutig: der Fußpunkt des Lots von P auf g.

Insbesondere ist P_Q der eindeutige Kreis, der die Gerade g nur in einem Punkt trifft.



Gleicher Abstand von Geraden

Proposition. Sei $\angle PQR$ ein Winkel und ℓ die Winkelhalbierende. Ein Punkt N liegt auf ℓ genau dann, wenn er gleichen Abstand zu PQ wie zu QR hat.



Gleicher Abstand von Geraden

Proposition. Sei $\angle PQR$ ein Winkel und ℓ die Winkelhalbierende. Ein Punkt N liegt auf ℓ genau dann, wenn er gleichen Abstand zu PQ wie zu QR hat.

Beweis. Sei σ die Spiegelung an ℓ.
Sie vertauscht die Strahlen $\overrightarrow{QP}$ und $\overrightarrow{QR}$.
Wenn N auf ℓ liegt, ist $\sigma(N) = N$ also vertauscht σ die Lotfußpunkte von N auf QP und auf QR.
Damit hat N den gleichen Abstand zu QP und QR.
[...]

Gleicher Abstand von Geraden

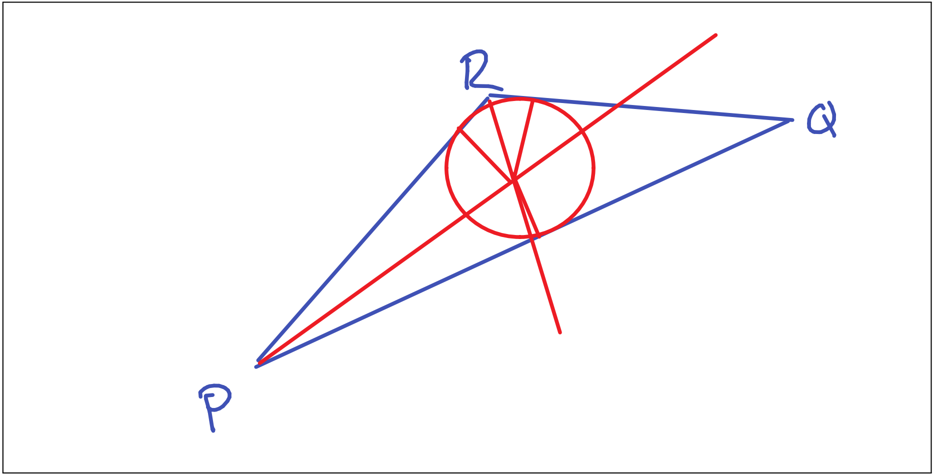
Proposition. Sei $\angle PQR$ ein Winkel und ℓ die Winkelhalbierende. Ein Punkt N liegt auf ℓ genau dann, wenn er gleichen Abstand zu PQ wie zu QR hat.

Beweis. [. . .]
Umgekehrt, angenommen N hat gleichen Abstand zu QP wie zu QR.
Seien P' und R' die entsprechenden Lotfußpunkte.
Dann sind $P'NQ$ und $R'NQ$ rechtwinklige Dreiecke mit zwei gleich langen Seiten.
Aus dem Satz des Pythagoras folgt, dass auch die dritten Seiten gleich lang sein müssen: $|P'Q| = |R'Q|$.
Der Punkt N hat also gleichen Abstand von zwei Punkten auf QP und QR die gleichen Abstand von Q haben.
Damit liegt N auf ℓ. $\square$

Inkreis

Der *Inkreis* eines Dreiecks *PQR* ist der Kreis, der jede Seite in genau einem Punkt trifft.

Proposition. Ein Dreieck *PQR* hat einen eindeutigen Inkreis. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.



Inkreis

Der *Inkreis* eines Dreiecks PQR ist der Kreis, der jede Seite in genau einem Punkt trifft.

Proposition. Ein Dreieck PQR hat einen eindeutigen Inkreis. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.

Beweis. Sei ℓ die Winkelhalbierende von $\angle PQR$ und m die Winkelhalbierende von $\angle RPQ$.
Sei M der Schnittpunkt von ℓ und m.
Sei A der Lotfußpunkt von M auf PQ, B der Lotfußpunkt auf QR und C der Lotfußpunkt auf RP.
Nach der letzten Proposition ist $M_A = M_B$ und trifft PQ und QR jeweils nur in einem Punkt.
Außerdem ist $M_B = M_C$ und trifft RP nur in einem Punkt.
[...]

Inkreis

Der *Inkreis* eines Dreiecks PQR ist der Kreis, der jede Seite in genau einem Punkt trifft.

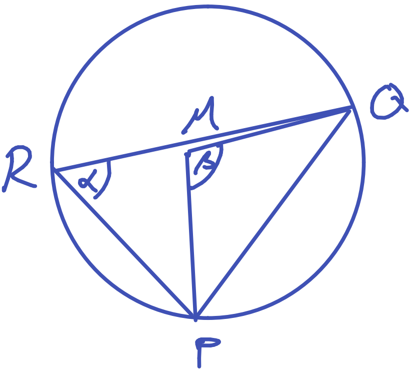
Proposition. Ein Dreieck PQR hat einen eindeutigen Inkreis. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.

Beweis. [...]
Da der gesamte Kreis $M_A = M_B = M_C$ im Halbraum von PQ liegt, der R enthält, liegt insbesondere B auf dem Strahl $\overrightarrow{QR}$.
Aus ähnlichen Gründen liegt B auf dem Strahl $\overrightarrow{RQ}$ und damit in $\overline{QR}$.
Analoge Argumente zeigen, dass $A \in \overline{PQ}$ und $C \in \overline{RP}$. $\square$

Zentriwinkelsatz

In den Übungsaufgaben haben Sie bewiesen:

Proposition (Zentriwinkelsatz). Wenn P und Q Punkte auf einem Kreis k sind und $R \in k$ im gleichen Halbraum von PQ liegt wie der Mittelpunkt M von k, dann ist der (Zentri-)Mittelpunktswinkel $\angle PMQ$ doppelt so groß wie der Peripheriewinkel $\angle PRQ$.



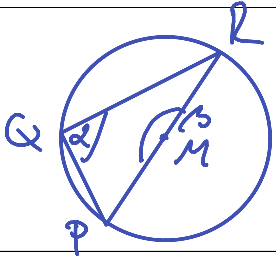
$\beta = 2\alpha$

Zentriwinkelsatz

In den Übungsaufgaben haben Sie bewiesen:

Proposition (Zentriwinkelsatz). Wenn P und Q Punkte auf einem Kreis k sind und $R \in k$ im gleichen Halbraum von PQ liegt wie der Mittelpunkt M von k, dann ist der (Zentri-)Mittelpunktswinkel $\angle PMQ$ doppelt so groß wie der Peripheriewinkel $\angle PRQ$.

Folgerung (Satz des Thales). Wenn zwei Punkte P und R auf einem Kreis k gegenüberliegen, ist für jeden Punkt $Q \in k$ der Winkel $\angle PQR$ ein rechter.



$\beta = 180°$

$\alpha = 90°$