

Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

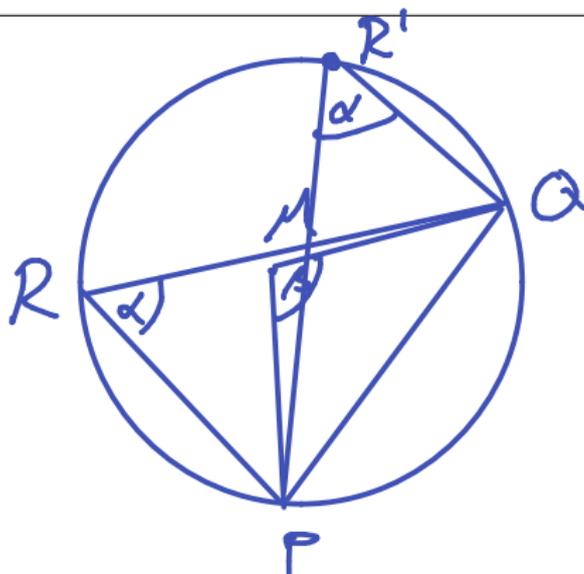
Geraden am Kreis

Stefan Witzel

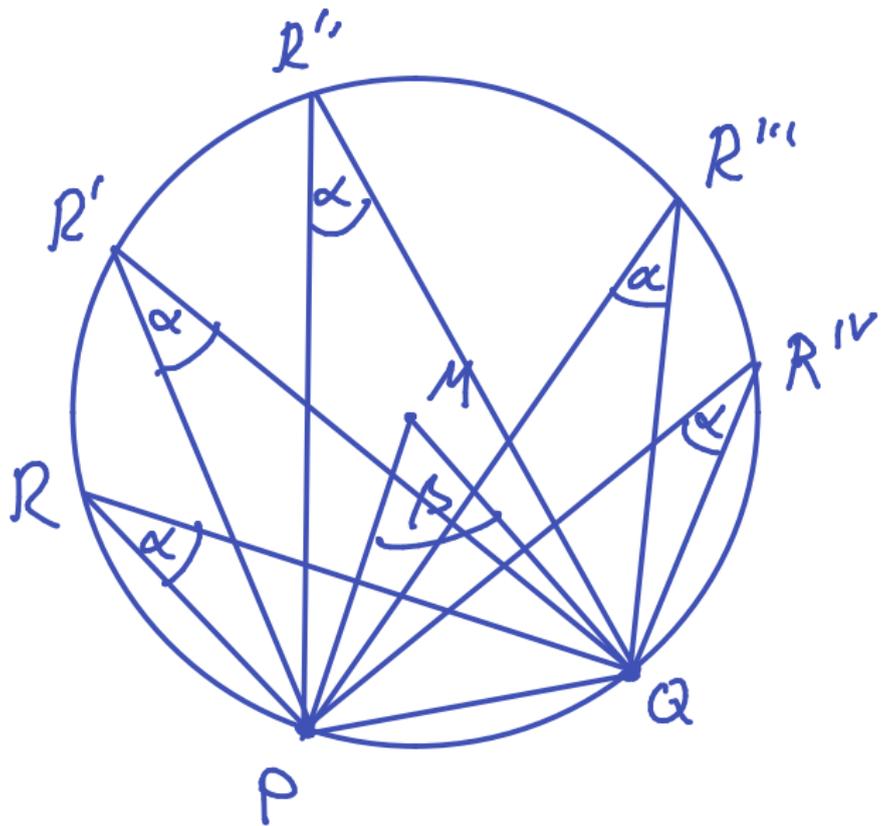
Zentriwinkelsatz

In den Übungsaufgaben haben Sie bewiesen:

Proposition (Zentriwinkelsatz). Wenn P und Q Punkte auf einem Kreis k sind und $R \in k$ im gleichen Halbraum von PQ liegt wie der Mittelpunkt M von k , dann ist der (Zentri-)Mittelpunktswinkel $\angle PMQ$ doppelt so groß wie der Peripheriewinkel $\angle PRQ$.



$$\beta = 2\alpha$$



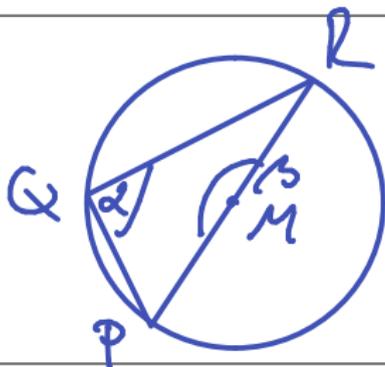
$$\alpha = \beta/2$$

Zentriwinkelsatz

In den Übungsaufgaben haben Sie bewiesen:

Proposition (Zentriwinkelsatz). Wenn P und Q Punkte auf einem Kreis k sind und $R \in k$ im gleichen Halbraum von PQ liegt wie der Mittelpunkt M von k , dann ist der (Zentri-)Mittelpunktswinkel $\angle PMQ$ doppelt so groß wie der Peripheriewinkel $\angle PRQ$.

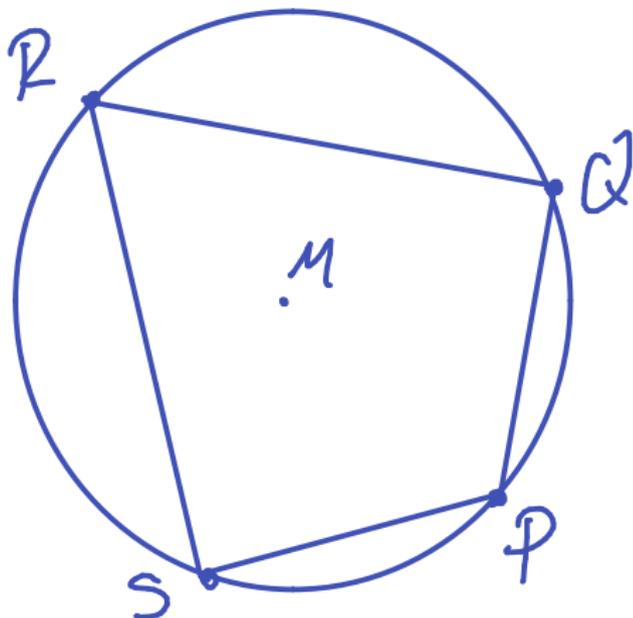
Folgerung (Satz des Thales). Wenn zwei Punkte P und R auf einem Kreis k gegenüberliegen, ist für jeden Punkt $Q \in k$ der Winkel $\angle PQR$ ein rechter.

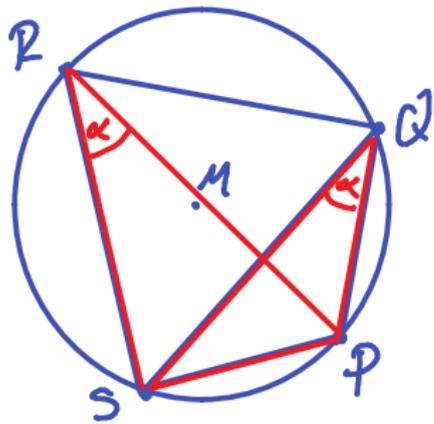


$$\beta = 180^\circ$$
$$\alpha = 90^\circ$$

Sehnenviereck

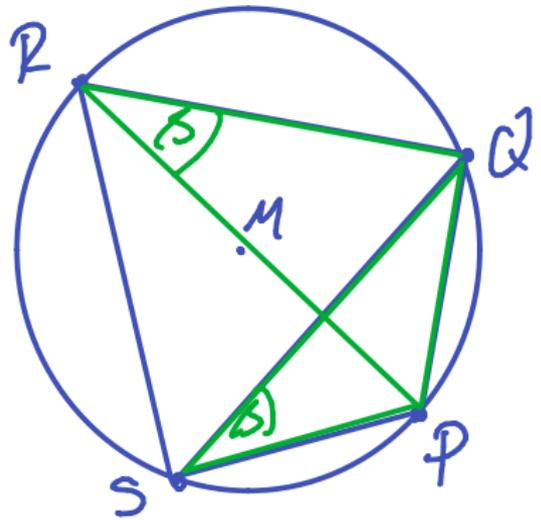
Proposition. Ist k ein Kreis und $PQRS$ ein Viereck dessen Punkte auf k liegen (ein Sehnenviereck), dann ist $\angle SPQ + \angle QRS = 180^\circ$.





$$\alpha + \beta = \angle SRQ$$

$$\gamma = \angle QPS$$



$$\angle SRQ + \angle QPS$$

$$= \alpha + \beta + \gamma = \text{Winkelsumme in } \triangle PQS$$

$$= 180^\circ$$

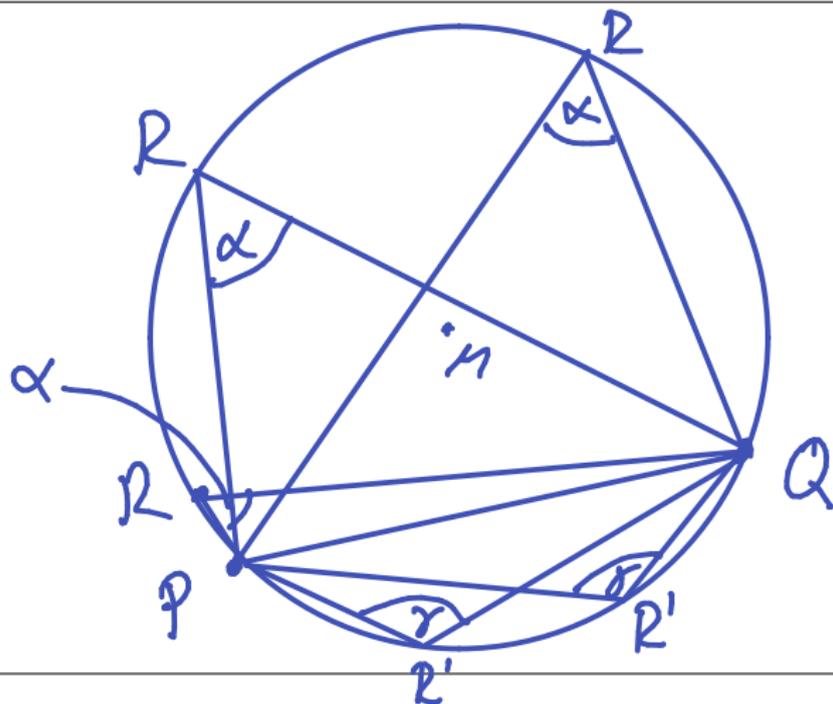
Sehnenviereck

Proposition. Ist k ein Kreis und $PQRS$ ein Viereck dessen Punkte auf k liegen (ein Sehnenviereck), dann ist $\angle SPQ + \angle QRS = 180^\circ$.

Beweis. Nach eventueller Umbenennung können wir annehmen, dass R auf der gleichen Seite von SQ liegt wie der Mittelpunkt M des Kreises. Insbesondere sind nach dem Zentriwinkelsatz die Peripheriewinkel $\angle PQS$ und $\angle PRS$ gleich groß, ebenso wie die Winkel $\angle QSP$ und $\angle QRP$. Nun ist aber $\angle QRP + \angle PRS = \angle QRS$ und $\angle PQS + \angle QSP = 180^\circ - \angle SPQ$ da die Winkelsumme im Dreieck PQS 180° ist. \square

Peripheriewinkelsatz

Proposition (Peripheriewinkelsatz, Euklid III.27). Wenn P und Q Punkte auf einem Kreis k sind, dann ist der Peripheriewinkel $\angle PRQ$ für alle Punkte $R \in k$ im gleichen Halbraum von PQ gleich.



Peripheriewinkelsatz

Proposition (Peripheriewinkelsatz, Euklid III.27). Wenn P und Q Punkte auf einem Kreis k sind, dann ist der Peripheriewinkel $\angle PRQ$ für alle Punkte $R \in k$ im gleichen Halbraum von PQ gleich.

Beweis. Für die Punkte im gleichen Halbraum wie der Mittelpunkt von k folgt die Behauptung unmittelbar aus dem Zentriwinkelsatz.
Für die Punkte im anderen Halbraum folgt sie durch anwenden der Proposition über Sehnenvierecke. □