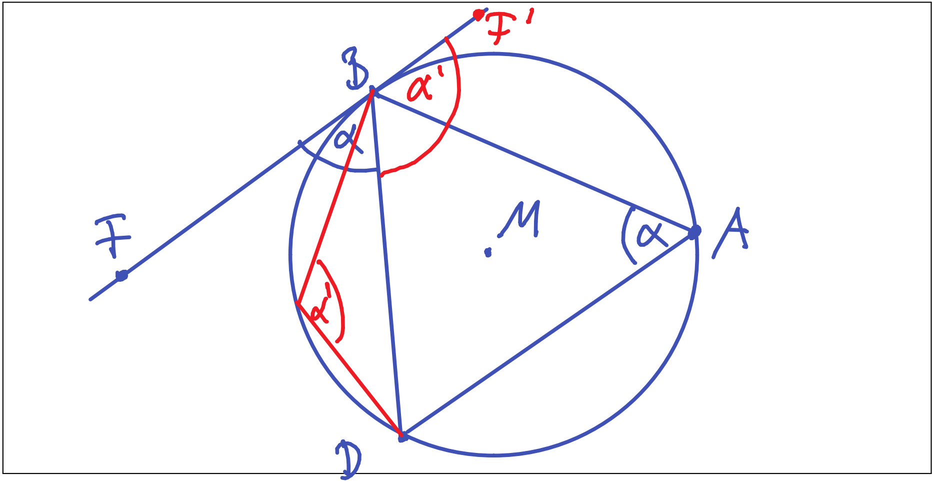
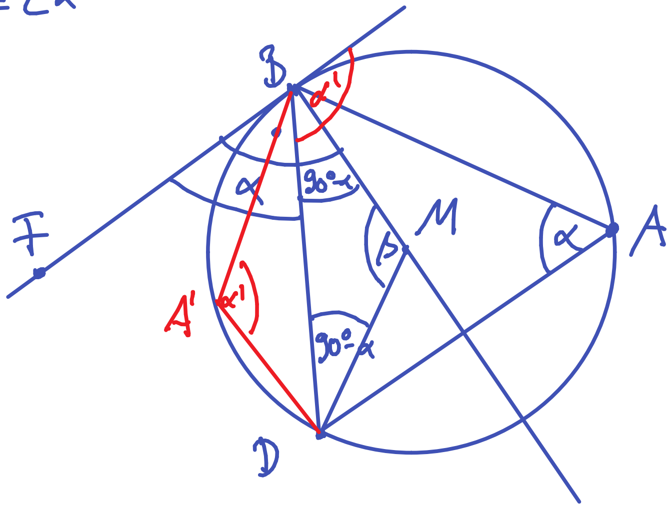
Sehnen-Tangentenwinkelsatz

Proposition (Sehnen-Tangentenwinkelsatz, Euklid III.32). Seien A, B, D Punkte auf einem Kreis k und F ein Punkt, der auf der Tangente an k in B liegt, und zwar im Halbraum von BD, der A nicht enthält. Dann ist der Tangentenwinkel $\angle FBD$ gleich groß wie der Peripheriewinkel $\angle BAD$.



$$\beta = 180° - 2\cdot(90° - \alpha)$$
$$= 2\alpha$$

$$\alpha' = 180° - \alpha$$



Sehnen-Tangentenwinkelsatz

Proposition (Sehnen-Tangentenwinkelsatz, Euklid III.32). Seien A, B, D Punkte auf einem Kreis k und F ein Punkt, der auf der Tangente an k in B liegt, und zwar im Halbraum von BD, der A nicht enthält. Dann ist der Tangentenwinkel $\angle FBD$ gleich groß wie der Peripheriewinkel $\angle BAD$.

Beweis. Sei M der Mittelpunkt von k.
Dann ist $\angle FBM = 90^\circ$, also $\angle FBD = 90^\circ - \angle DBM$.
Da die Winkelsumme im gleichschenkligen Dreieck BDM gleich 180° ist, ist $\angle DBM = 1/2(180^\circ - \angle BMD)$.
Nach dem Zentriwinkelsatz ist aber $\angle DMB = 2\angle BAD$.
Zusammensetzen ergibt

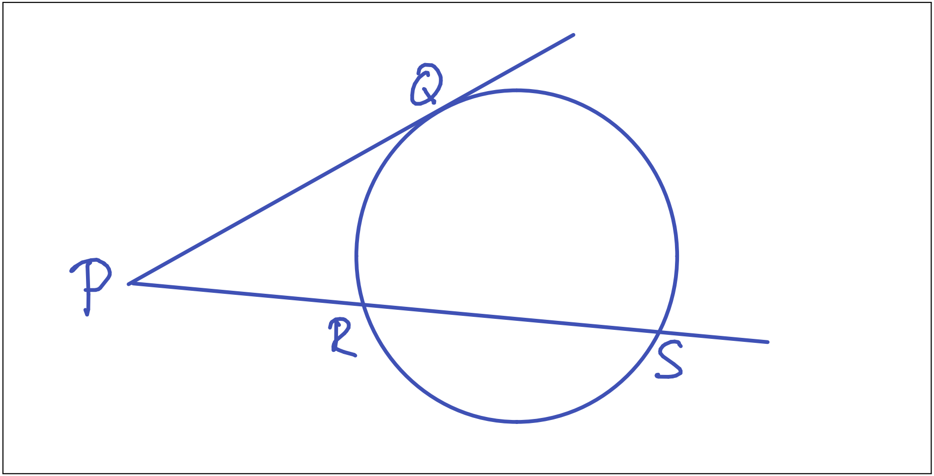
$$\angle FBD = 90^\circ - \angle DBM = 90^\circ - (90^\circ - \angle BAD) = \angle BAD.$$

$\square$

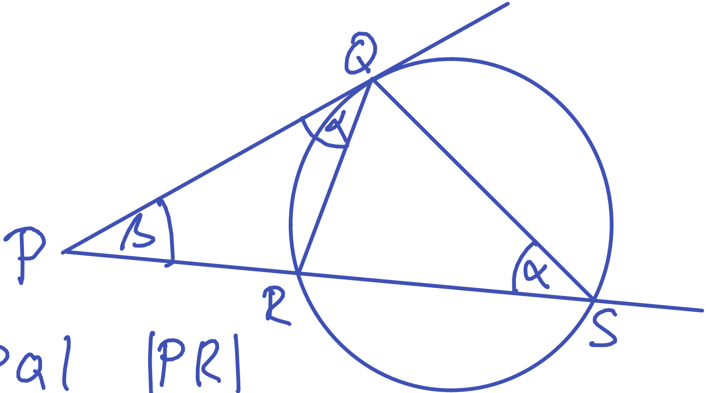
Sekanten-Tangenten-Satz

Proposition (Sekanten-Tangenten-Satz, Euklid III.36). Sei k ein Kreis und P ein Punkt außerhalb von k. Sei g eine Gerade durch P, die k in Q berührt und sei h eine Gerade durch P, die k in R und S schneidet. Dann ist $|PQ|/|PS| = |PR|/|PQ|$.

$|PQ|^2 = |PR| \cdot |PS|$



$PQR \sim PSQ$



$$\frac{|PQ|}{|PS|} = \frac{|PR|}{|PQ|}$$

$$|PQ|^2 = |PR| \cdot |PS|$$

Sekanten-Tangenten-Satz

Proposition (Sekanten-Tangenten-Satz, Euklid III.36). Sei k ein Kreis und P ein Punkt außerhalb von k. Sei g eine Gerade durch P, die k in Q berührt und sei h eine Gerade durch P, die k in R und S schneidet. Dann ist $|PQ|/|PS| = |PR|/|PQ|$.

Beweis. Nach Umbenennung können wir annehmen, dass R zwischen P und S liegt.
Nach dem Sehnentangentenwinkelsatz ist dann $\angle PQR \equiv \angle QSR$.
Es folgt, dass die Dreiecke PQR und PSQ ähnlich sind. Also ist $|PQ|/|PS| = |PR|/|PQ|$. □