Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

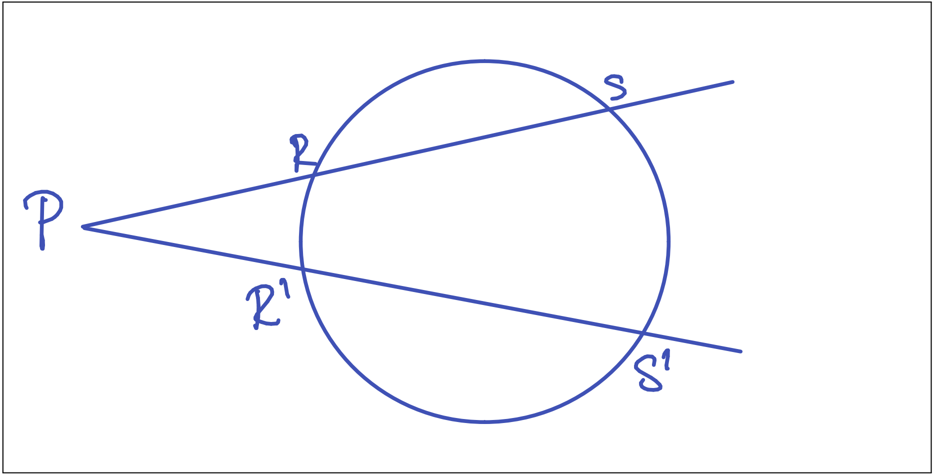
Sommersemester 2018

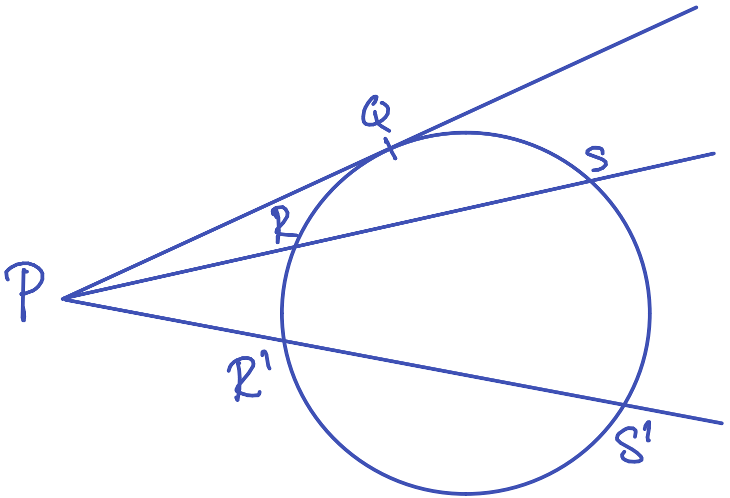
Geraden am Kreis

Stefan Witzel

Sekanten-Satz

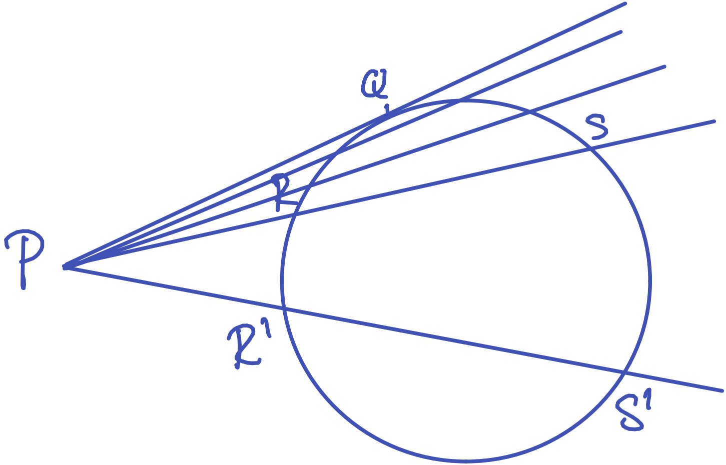
Proposition (Sekanten-Satz). Sei k ein Kreis und P ein Punkt außerhalb des Kreises. Seien h und h' Geraden durch P, die k in Punkten R, S und R', S' schneiden. Dann ist $|PR| \cdot |PS| = |PR'| \cdot |PS'|$





$$|PR'|\cdot|PS'| = |PQ|^2 = |PR|\cdot|PS|$$

$$|PR'|\cdot|PS'| = |PR|\cdot|PS| \longrightarrow |PQ|\cdot|PQ|$$



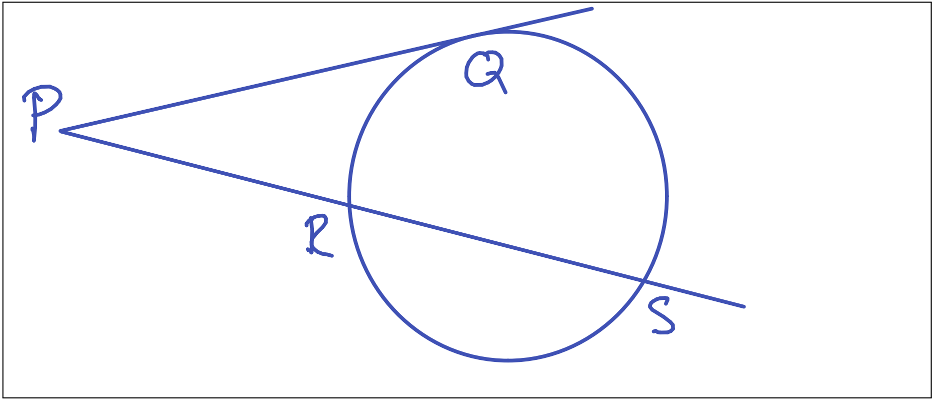
Sekanten-Satz

Proposition (Sekanten-Satz). Sei k ein Kreis und P ein Punkt außerhalb des Kreises. Seien h und h' Geraden durch P, die k in Punkten R, S und R', S' schneiden. Dann ist $|PR| \cdot |PS| = |PR'| \cdot |PS'|$

Beweis. Sei $Q \in k$ so, dass PQ eine Tangente an k ist.
Nach dem Sekanten-Tangengen-Satz ist $|PR| \cdot |PS| = |PQ|^2 = |PR'| \cdot |PS'|$. $\square$

Umkehrung des des Sekanten-Tangenten-Satzes

Proposition (Umkehrung des Sekanten-Tangenten-Satzes, Euklid III.37). Sei k ein Kreis und P ein Punkt außerhalb von k. Seien g eine Gerade durch P, die k in Q schneidet und sei h eine Gerade, die k in R und S schneidet. Wenn $|PQ|/|PS| = |PR|/|PQ|$ ist, dann ist g eine Tangente und Q ein Berührpunkt.



Umkehrung des des Sekanten-Tangenten-Satzes

Proposition (Umkehrung des Sekanten-Tangenten-Satzes, Euklid III.37). Sei k ein Kreis und P ein Punkt außerhalb von k. Seien g eine Gerade durch P, die k in Q schneidet und sei h eine Gerade, die k in R und S schneidet. Wenn $|PQ|/|PS| = |PR|/|PQ|$ ist, dann ist g eine Tangente und Q ein Berührpunkt.

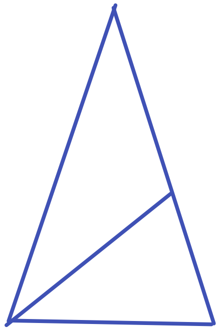
Beweis. Angenommen g hätte einen zweiten Schnittpunkt $Q' \neq Q$, dann wäre nach dem Sekanten-Satz $|PQ|^2 \neq |PQ| \cdot \underline{|PQ'|} = |PR^{\cancel{\prime}}| \cdot |PS^{\cancel{\prime}}|$ im Widerspruch zur Annahme. $\square$

$$\rightarrow \quad |PQ|^2 = |PR| \cdot |PS| \quad \leftarrow \text{Sek-Tan}$$

$$\underbrace{|PQ| \cdot |PQ'|}_{\neq} = |PR| \cdot |PS| \leftarrow \text{Sek.}$$

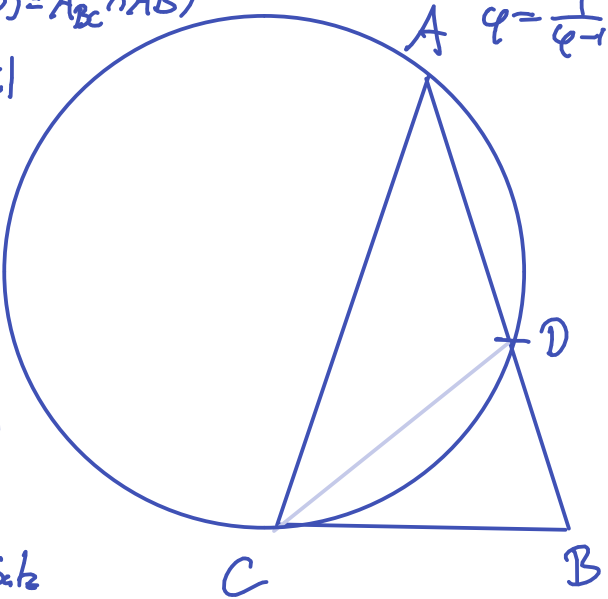
Zerlegung goldener Dreiecke

Proposition (Euklid IV.10). Jedes spitzwinklige goldene Dreieck lässt sich zerlegen in ein spitzwinkliges und ein stumpfwinkliges goldenes Dreieck.



$|AD| = |BC| \quad (\{D\} = A_{BC} \cap \overline{AB})$

$|AC| = |AB| = \varphi \cdot |BC|$



$\varphi = \frac{1}{\varphi - 1}$

$|AB| \cdot |BD|$

$= \varphi \cdot |BC| \cdot (\varphi - 1) \cdot |BC|$

$$\begin{aligned} |BD| &= |AB| - |AD| \\ &= \varphi |BC| - |BC| \\ &= (\varphi - 1) \cdot |BC| \end{aligned}$$

$= |BC|^2$

Sekanten-Tangenten-Satz

$\Rightarrow$ BC Tangente

Zerlegung goldener Dreiecke

Proposition (Euklid IV.10). Jedes spitzwinklige goldene Dreieck lässt sich zerlegen in ein spitzwinkliges und ein stumpfwinkliges goldenes Dreieck.

Beweis. Sei ABC ein spitzwinkliges goldenes Dreieck mit $|AB| = |AC| = \varphi \cdot |BC|$.
Sei D der Schnittpunkt von A_{BC} mit $\overline{AB}$.
Sei k der Kreis durch A, C und D.
Es ist $|AB| \cdot |BD| = \varphi \cdot |BC| \cdot (\varphi - 1) \cdot |BC| = \varphi \cdot (\varphi - 1) \cdot |BC|^2$.
Nach der definierenden Gleichung für den goldenen Schnitt ist aber $\varphi \cdot (\varphi - 1) = 1$, also

$$|AB| \cdot |BD| = |BC|^2.$$

[...]

Tangente BC, Sehne CD

Sehnen-Tangentenwinkel-Satz

$\Rightarrow \alpha = \alpha$

$\Rightarrow ABC \sim CBD$

$\Rightarrow$ CBD ist spitzw. golden

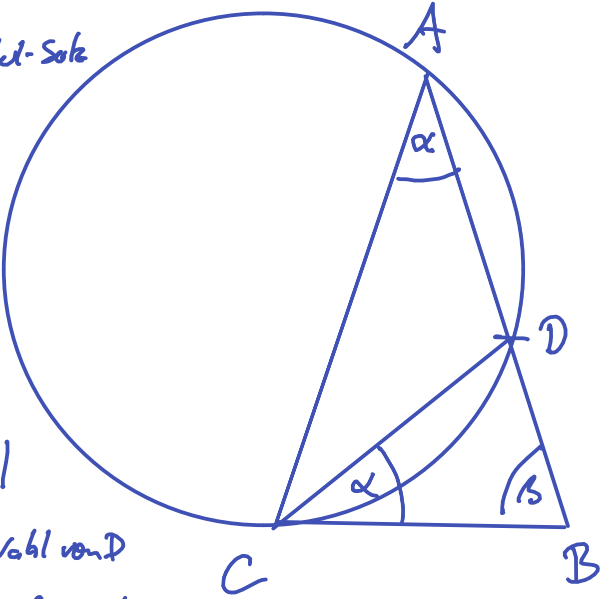
$$|AD| = |BC| = \frac{1}{\varphi}|AC|$$

$$|CD| = |BC| - |AD|$$

CBD gleichschenklig

nach Wahl von D

$\Rightarrow$ ADC ist stumpfw. golden



Zerlegung goldener Dreiecke

Proposition (Euklid IV.10). Jedes spitzwinklige goldene Dreieck lässt sich zerlegen in ein spitzwinkliges und ein stumpfwinkliges goldenes Dreieck.

Beweis. [...] Nach der Umkehrung des Sekanten-Tangenten-Satzes folgt, dass BC eine Tangente an k ist.
Nach dem Sehnen-Tangentenwinkelsatz, ist also $\angle BCD \cong \angle CAB$.
Folglich ist nach dem Ähnlichkeitssatz ABC ähnlich zu CBD.
Insbesondere ist CBD gleichschenklig und damit $|BC| = |CD|$, also auch ACD gleichschenklig.
Nach Konstruktion ist damit ACD ein stumpfwinkliges und BCD ein spitzwinkliges goldenes Dreieck. $\square$

Spitzwinkliges goldenes Dreieck hat Seitenlängen a, b, c mit

$[a:b:c = \varphi:\varphi:1]$

$$\frac{a}{c} = \varphi$$

$$\frac{b}{c} = \varphi$$

$$\frac{c}{c} = 1$$

Stumpfwinkliges goldenes Dreieck hat Seitenlängen a, b, c mit

$[a:b:c = \varphi:1:1]$

$$\frac{a}{c} = \varphi$$

$$\frac{b}{c} = 1$$

$$\frac{c}{c} = 1$$