Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

Konstruktion von Zahlen

Stefan Witzel

Rechnen durch Konstruktion

Wir haben gesehen, wie man mit Konstruktionen Rechnungen durchführen kann.

Hier gehen wir diese Konstrukionen noch einmal systematisch durch.

Dazu betrachten wir eine Gerade durch zwei Punkte O und I.

Wir stellen uns die Gerade als Zahlengerade vor und die Punkte O und I als 0 und 1.

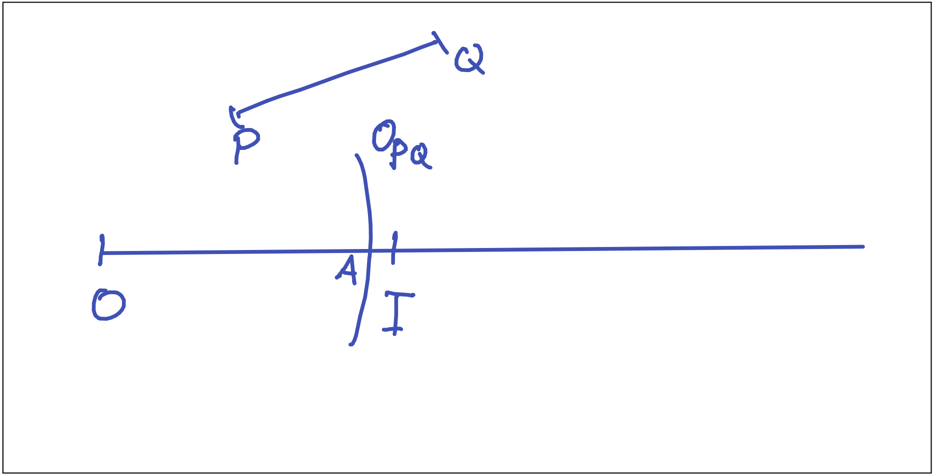
Plan:

- Übersetze beliebige Länge $|PQ|$ in Länge $|OA|$ mit $A \in \overrightarrow{OI}$.
- Überzetze beliebiges Verhältnis in $|OA|/|OI|$ mit $A \in \overrightarrow{OI}$.
- „Rechne“ mit Verhältnissen $|OA|/|OI|$.

1. Reduktion: Segment auf $|OI|$

Problem. Gegeben Punkte P und Q, konstruiere $A \in \overrightarrow{OI}$ mit $|OA| = |PQ|$.

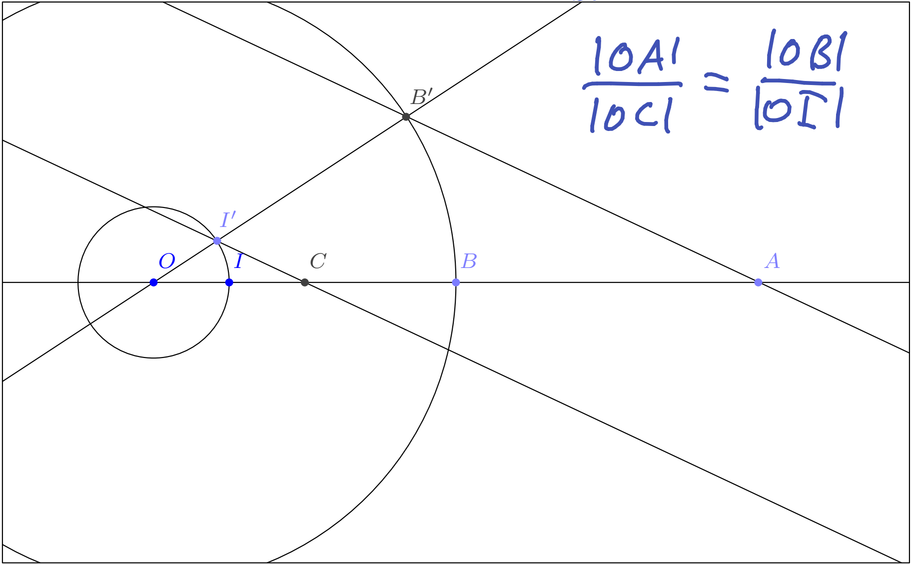
Konstruktion. Es ist $\{A\} = O_{PQ} \cap \overrightarrow{OI}$. $\Diamond$



2. Reduktion: Verhältnis auf $|OI|$ beziehen

Problem. Gegeben Punkte $A, B \in \overrightarrow{OI}$ mit $B \neq O$ konstruiere $C \in \overrightarrow{OI}$ mit $|OC|/|OI| = |OA|/|OB|$.

$|OC| = \frac{|OA|}{|OB|} \cdot |OI|$



$$\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|OB|}{|OI|}$$

Zweite Gerade h durch O.

Übertrage I, B auf h, erhalte I', B'.

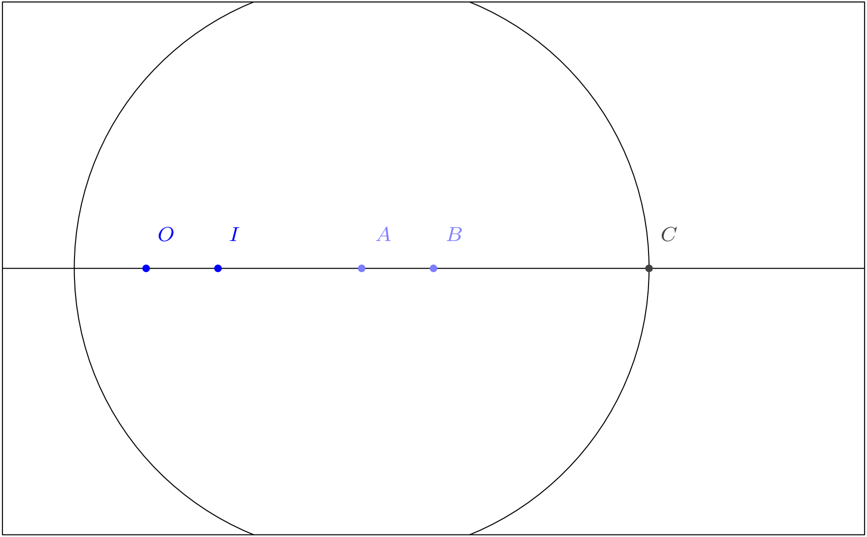
Konstruiere AB' und die Parallele ℓ durch I'.

Dann ist $\{C\} = \ell \cap OI$.

Addition

Problem. Gegeben Punkte $A, B \in \overrightarrow{OI}$ konstruiere $C \in \overrightarrow{OI}$ mit $\frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OA|}{|OI|} + \frac{|OB|}{|OI|}$.

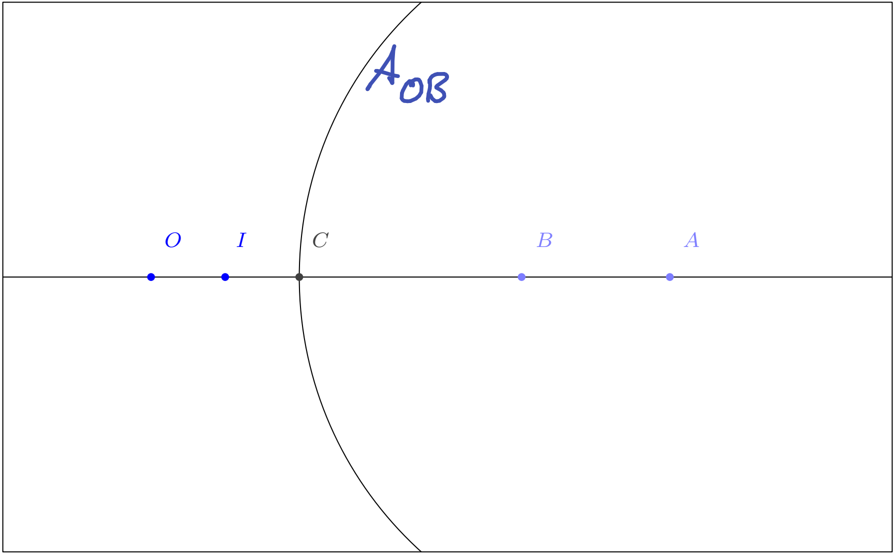
$|OC| = |OA| + |OB|$ $\quad$ $A_{OB} \cap OI$



Subtraktion

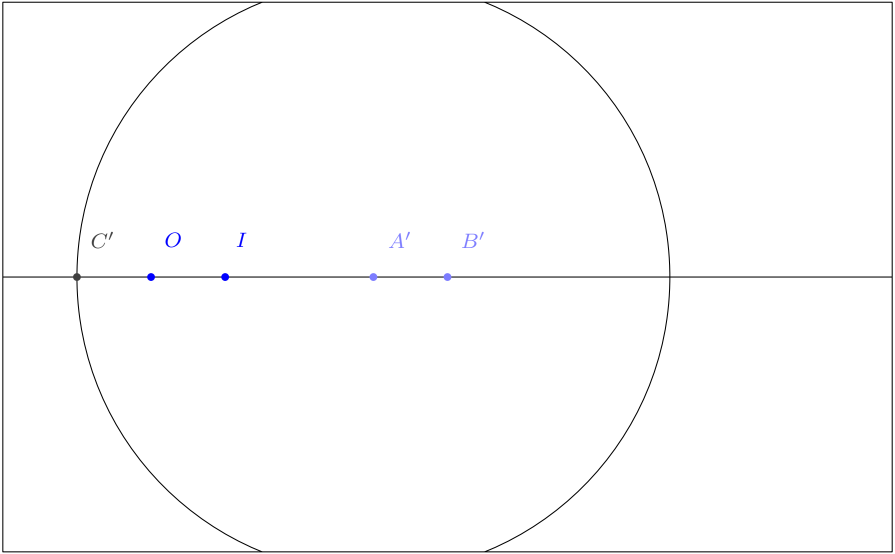
Problem. Gegeben Punkte $A, B \in \overrightarrow{OI}$ mit $B \in \overline{OA}$ konstruiere $C \in \overrightarrow{OI}$ mit $\frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OA|}{|OI|} - \frac{|OB|}{|OI|}$.

$|OC| = |OA| - |OB|$



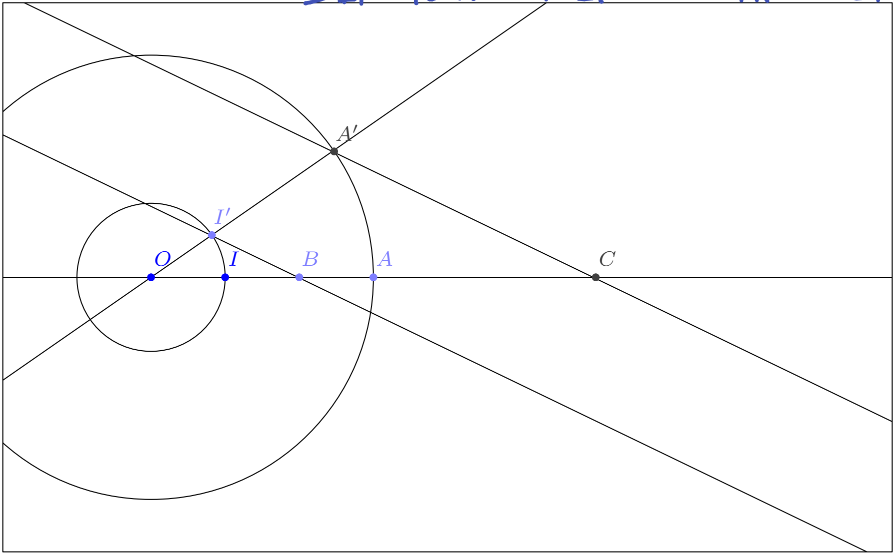
Subtraktion

Problem. Gegeben Punkte $A, B \in \overrightarrow{OI}$ mit $B \in \overline{OA}$ konstruiere $C \in \overrightarrow{OI}$ mit $\frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OA|}{|OI|} - \frac{|OB|}{|OI|}$.



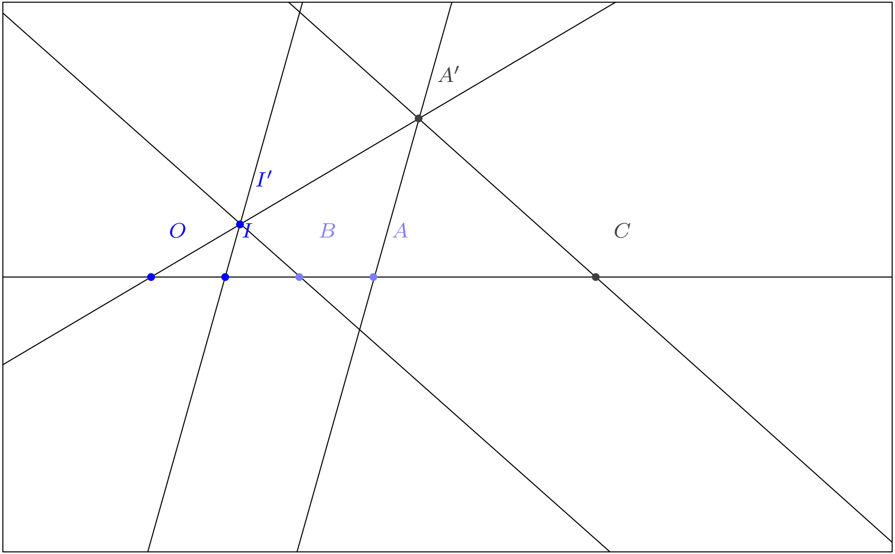
Multiplikation

Problem. Gegeben Punkte $A, B \in \overrightarrow{OI}$ konstruiere $C \in \overrightarrow{OI}$ mit $\frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OA|}{|OI|} \cdot \frac{|OB|}{|OI|}$. $\Leftrightarrow$ $\frac{|OC|}{\cancel{|OI|}} \cdot \frac{\cancel{|OI|}}{|OA|} = \frac{|OB|}{|OI|} \Leftrightarrow \frac{|OC|}{|OA|} = \frac{|OB|}{|OI|}$



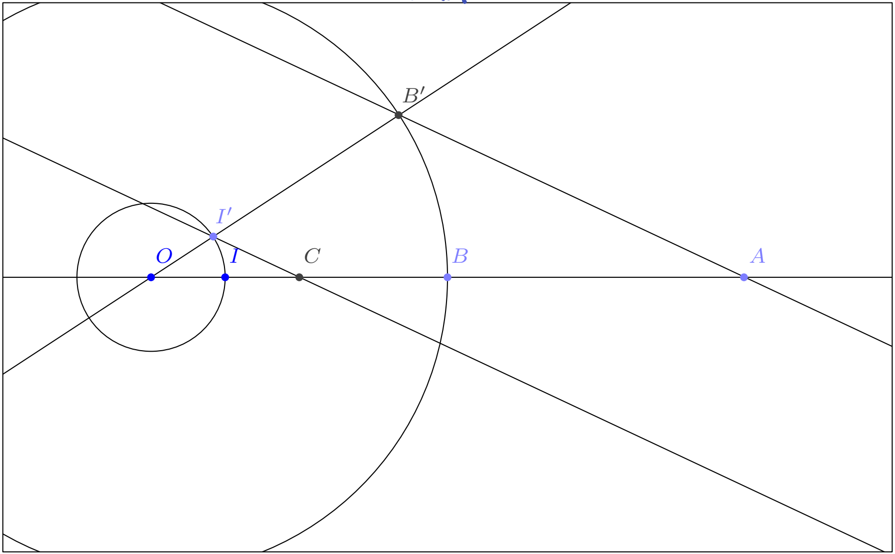
Multiplikation

Problem. Gegeben Punkte $A, B \in \overrightarrow{OI}$ konstruiere $C \in \overrightarrow{OI}$ mit
$\frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OA|}{|OI|} \cdot \frac{|OB|}{|OI|}$.



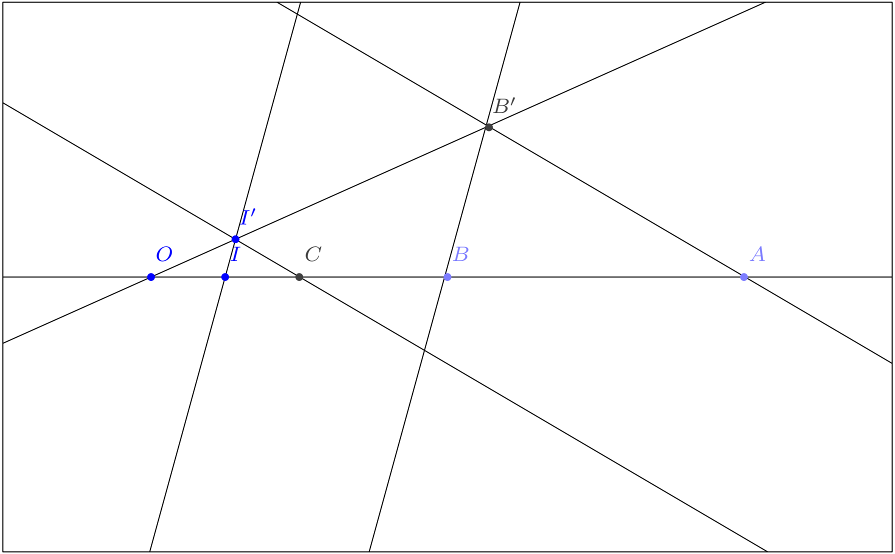
Division

Problem. Gegeben Punkte $A, B \in \overrightarrow{OI}$ mit $B \neq O$ konstruiere C mit
$\frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OA|}{|OI|} \cdot \frac{|OI|}{|OB|}$. $\Leftrightarrow \frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OA|}{|OB|}$



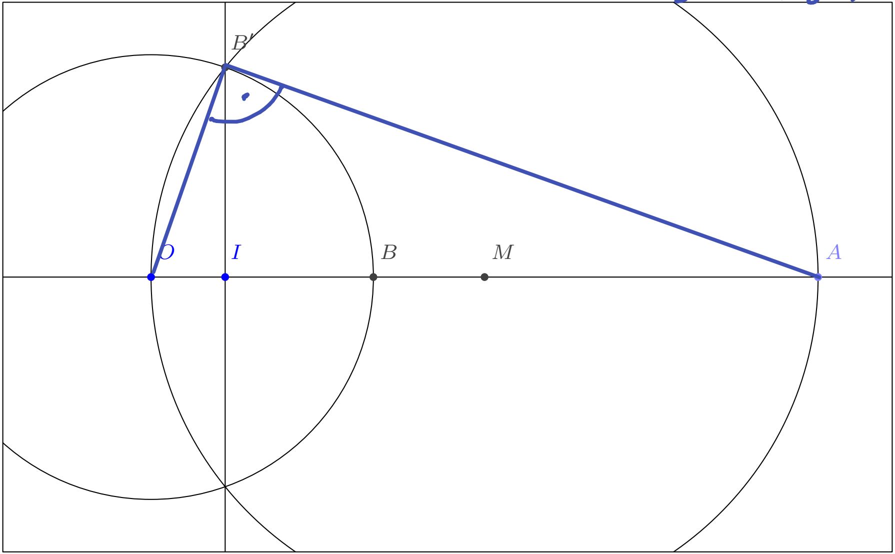
Division

Problem. Gegeben Punkte $A, B \in \overrightarrow{OI}$ mit $B \neq O$ konstruiere C mit $\frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OA|}{|OI|} \cdot \frac{|OI|}{|OB|}$.



Wurzel

Problem (Wurzeln). Gegeben Punkte $A \in \overrightarrow{OI}$, konstruiere $B \in \overrightarrow{OI}$ mit $\frac{|OB|}{|OI|} = \sqrt{\frac{|OA|}{|OI|}}$. $\Leftrightarrow |OB|^2 = |OI| \cdot |OA| \quad \left(\frac{|OB|^2}{|OI|^2} = \frac{|OA|}{|OI|} \right)$



Wurzel

Problem (Wurzeln). Gegeben Punkte $A \in \overrightarrow{OI}$, konstruiere $B \in \overrightarrow{OI}$ mit $\frac{|OB|}{|OI|} = \sqrt{\frac{|OA|}{|OI|}}$.

Konstruktion. Sei M der Mittelpunkt von $\overline{OA}$. Sei $k = M_A$. Sei g das die Senkrechte zu OI durch I. Sei B' der Schnittpunkt von k und g. Der Schnittpunkt B von $O_{B'}$ und $\overrightarrow{OI}$ ist der gesuchte Punkt. $\Diamond$

Beweis. Da M der Mittelpunkt von $\overline{OA}$ ist, geht k durch O. Das Dreieck $OB'A$ ist also nach dem Satz des Thales rechtwinklig. Aus dem Kathetensatz folgt $|OB'|^2 = |OA| \cdot |OI|$. Teilen durch $|OI|^2$ ergibt $(|OB|/|OI|)^2 = |OA|/|OI|$. $\square$