Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

# Konstruktion von Zahlen

Stefan Witzel

# Konstruierbare Zahlen

*Satz.* Jede Zahl, die man (aus 0 und 1) durch die Grundrechenarten und Wurzelziehen erhalten kann lässt sich mit Zirkel und Lineal konstruieren.

Umgekehrt lässt sich jede Zahl, die man mit Zirkel und Lineal konstruieren kann durch die Grundrechenarten und Wurzelziehen erhalten.

Die erste Aussage folgt aus dem gesagten.
Die zweite Aussage wird mit sogenannter „Galois-Theorie“ bewiesen.

# Konstruierbare Zahlen

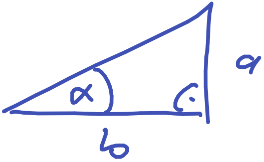
*Satz.* Jede Zahl, die man (aus 0 und 1) durch die Grundrechenarten und Wurzelziehen erhalten kann lässt sich mit Zirkel und Lineal konstruieren.

Umgekehrt lässt sich jede Zahl, die man mit Zirkel und Lineal konstruieren kann durch die Grundrechenarten und Wurzelziehen erhalten.

*Folgerung.* Ein regelmäßiges $n$-Eck kann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden genau dann, wenn man $\sin(180°/n)$ durch die Grundrechenarten und Wurzelziehen erhalten kann.

Beweis. Ein regelmäßiges $n$-Eck ist konstruierbar genau dann, wenn ein Winkel von $360°/n$ konstruierbar ist genau dann, wenn das Verhältnis $\sin(180°/n)$ konstruierbar ist. $\square$

$\sin \alpha = \frac{a}{b}$



# Konstruierbare Zahlen

*Satz.* Jede Zahl, die man (aus 0 und 1) durch die Grundrechenarten und Wurzelziehen erhalten kann lässt sich mit Zirkel und Lineal konstruieren.

Umgekehrt lässt sich jede Zahl, die man mit Zirkel und Lineal konstruieren kann durch die Grundrechenarten und Wurzelziehen erhalten.

*Folgerung.* Ein regelmäßiges $n$-Eck kann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden genau dann, wenn man $\sin(180^\circ/n)$ durch die Grundrechenarten und Wurzelziehen erhalten kann.

*Beispiel.* Ein regelmäßiges 17-Eck ist konstruierbar weil

$$\sin\left(\frac{180^\circ}{17}\right) = \frac{1}{8}\sqrt{2}\sqrt{\bar{\varepsilon}^2 - \sqrt{2}(\alpha + \bar{\varepsilon})}$$

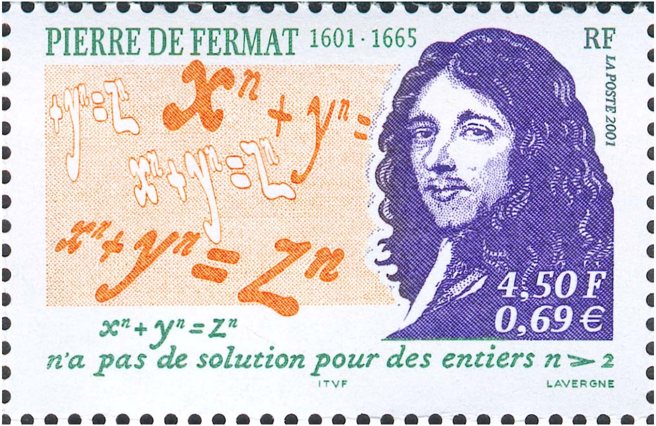
mit

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{17 + \sqrt{17}} \\ \bar{\varepsilon} &= \sqrt{17 - \sqrt{17}} \\ \alpha &= \sqrt{34 + 6\sqrt{17} + 2\sqrt{2}(\sqrt{17} - 1)\bar{\varepsilon} - 8\sqrt{2}\varepsilon}. \end{aligned}$$

# Konstruierbare $n$-Ecke und Fermat-Primzahlen

Eine Fermat-Primzahl ist eine Primzahl der Form $2^{2^n}+1$. Zum Beispiel

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $2^n$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 |
| $2^{2^n}+1$ | 3 | 5 | 17 | 257 | 65537 | $4294967297 = 641 \cdot 6700417$ |



# Konstruierbare $n$-Ecke und Fermat-Primzahlen

Eine Fermat-Primzahl ist eine Primzahl der Form $2^{2^n}+1$. Zum Beispiel

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $2^n$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 |
| $2^{2^n}+1$ | 3 | 5 | 17 | 257 | 65537 | $4294967297 = 641 \cdot 6700417$ |

*Satz (Gauß).* Ein regelmäßiges $n$-Eck ist konstruierbar genau dann, wenn $n = 2^k \cdot p_1 \cdots p_\ell$ ist, wobei die $p_i$ Fermat-Primzahlen sind.

# Konstruierbare *n*-Ecke und Fermat-Primzahlen

Eine Fermat-Primzahl ist eine Primzahl der Form $2^{2^n} + 1$. Zum Beispiel

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $2^n$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 |
| $2^{2^n}+1$ | 3 | 5 | 17 | 257 | 65537 | $4294967297 = 641 \cdot 6700417$ |

*Satz (Gauß).* Ein regelmäßiges *n*-Eck ist konstruierbar genau dann, wenn $n = 2^k \cdot p_1 \cdots p_\ell$ ist, wobei die $p_i$ Fermat-Primzahlen sind.

Also ist ein regelmäßiges *n*-Eck konstruierbar wenn

$$n = 2^k \cdot 3^{\varepsilon_3} \cdot 5^{\epsilon_5} \cdot 17^{\epsilon_{17}} \cdot 257^{\epsilon_{257}} \cdot 65537^{\epsilon_{65537}}$$

mit $k \geq 0$ und $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$.

Es ist nicht bekannt, ob es außer den obigen Beispielen noch weitere Fermat-Primzahlen gibt.