

Universität Bielefeld

# Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

# Rückblick

Stefan Witzel

# Outline

Grundlagen, Axiome

Euklid I

Bewegungen

Verhältnisse, Ähnlichkeiten

Kreise

# Fundamentale Objekte und Eigenschaften

## Objekte:

- ▶ Punkte, Abstand
- ▶ Geraden, Segmente, Strahlen, Halbräume
- ▶ Kreise
- ▶ Winkel (geometrisch und algebraisch)
- ▶ Dreiecke,  $n$ -Ecke
- ▶ Bewegungen: Spiegelungen, Drehungen, Verschiebungen, Gleitspiegelungen

## Eigenschaften:

- ▶ Schnittpunkte (Anzahl, Lage)
- ▶ Parallelität
- ▶ Kongruenz
- ▶ Ähnlichkeit

# Eindeutigkeit von Bewegungen

*Satz.* Zwei Dreiecke werden durch höchstens eine Bewegung ineinander überführt.

*Proposition.* Die Fixpunktmenge einer Bewegung ist ein Unterraum.

*Proposition.* Ein Unterraum ist leer, ein einzelner Punkt, eine Gerade, oder die ganze Ebene.

# Existenz von Bewegungen

*Satz (Kongruenzsätze).* Es existiert eine Bewegung, die  $PQR$  in  $P'Q'R'$  überführt, genau dann, wenn. . . SSS, SWS, WSW, WWS.

*Proposition.* Segmente sind kongruent wenn sie gleich lang sind.

# Winkel

*Proposition (Nebenwinkelsatz).* Nebenwinkeln von kongruenten Winkeln sind kongruent.

*Proposition (Gegenwinkelsatz).* Gegenwinkel sind zueinander kongruent.

Winkelmaß

*Proposition (Winkelsumme).* Die Winkelsumme im Dreieck ist  $180^\circ$ .

# Elementare Konstruktionen

- ▶ Mittelsenkrechte (Mittelpunkt)
- ▶ Winkelhalbierende
- ▶ Lot (Senkrechte durch Punkt)
- ▶ Winkel übertragen

# Outline

Grundlagen, Axiome

Euklid I

Bewegungen

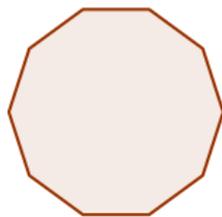
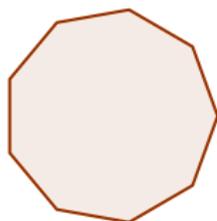
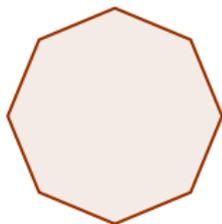
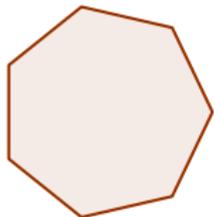
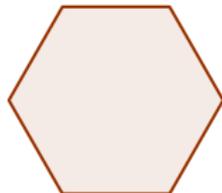
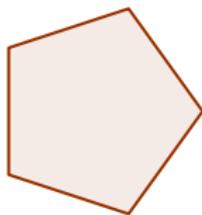
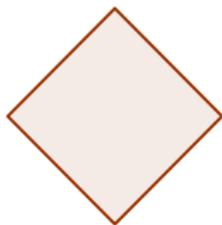
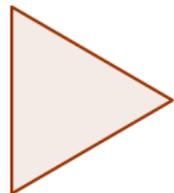
Verhältnisse, Ähnlichkeiten

Kreise

# Vierecke

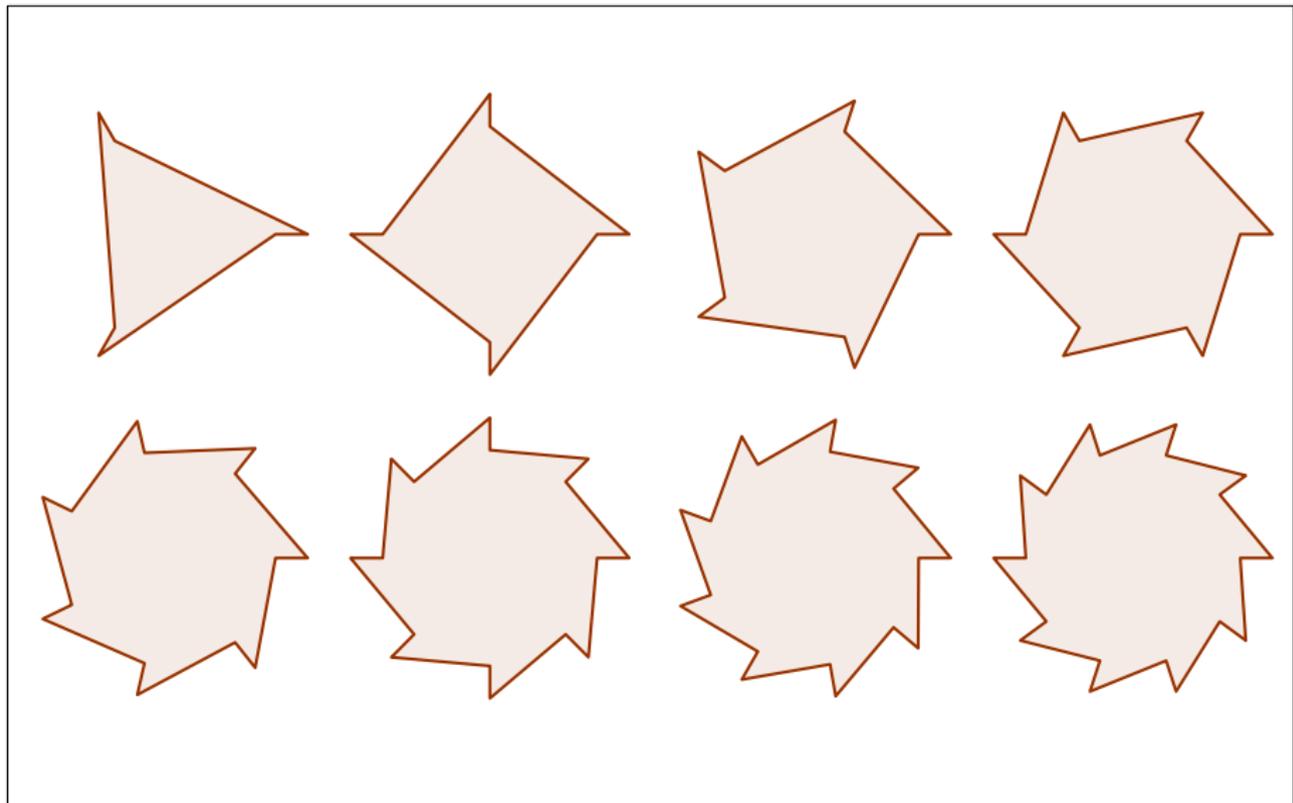
- ▶ Viereck
- ▶ Trapez
- ▶ Drachenviereck
- ▶ Parallelogramm
- ▶ Raute
- ▶ Rechteck
- ▶ Quadrat

## regelmäßige $n$ -Ecke



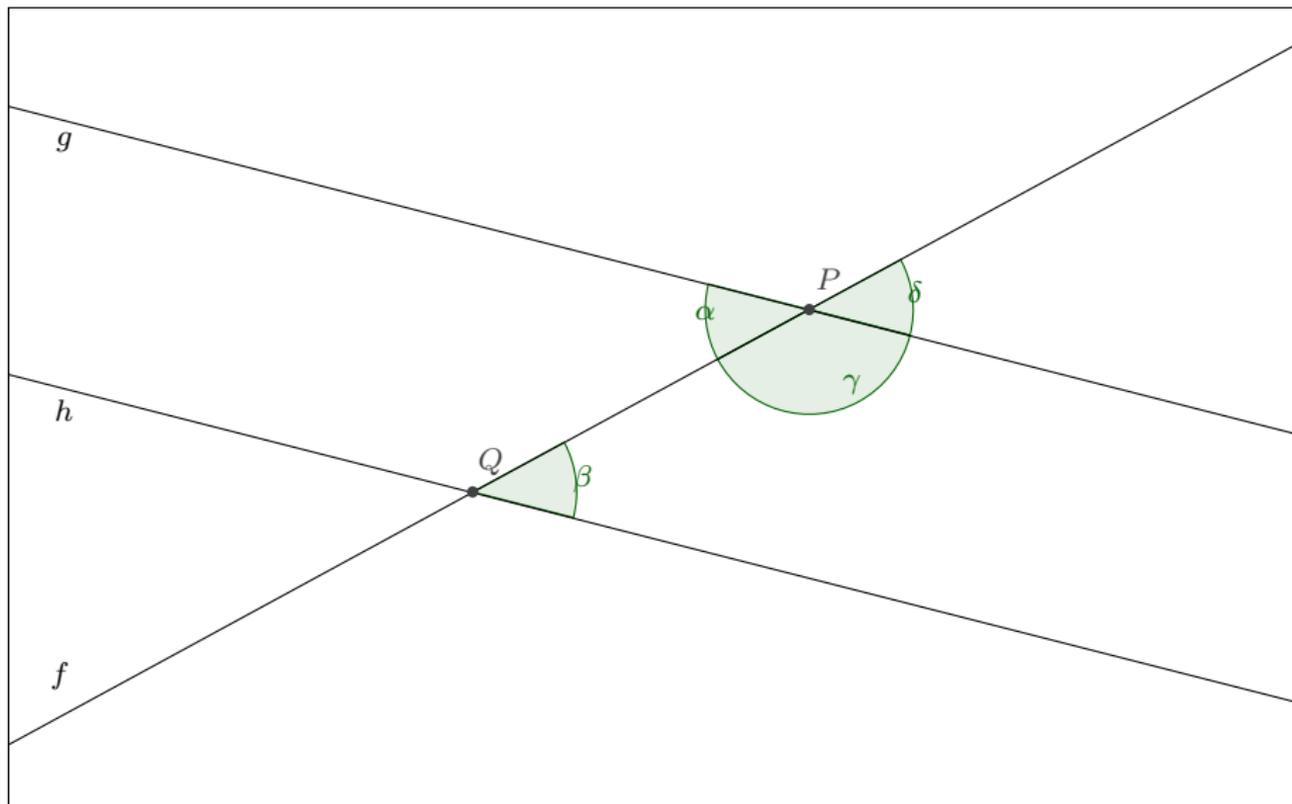
Symmetriegruppe:  $D_n$ .

## regelmäßige Sägeblätter

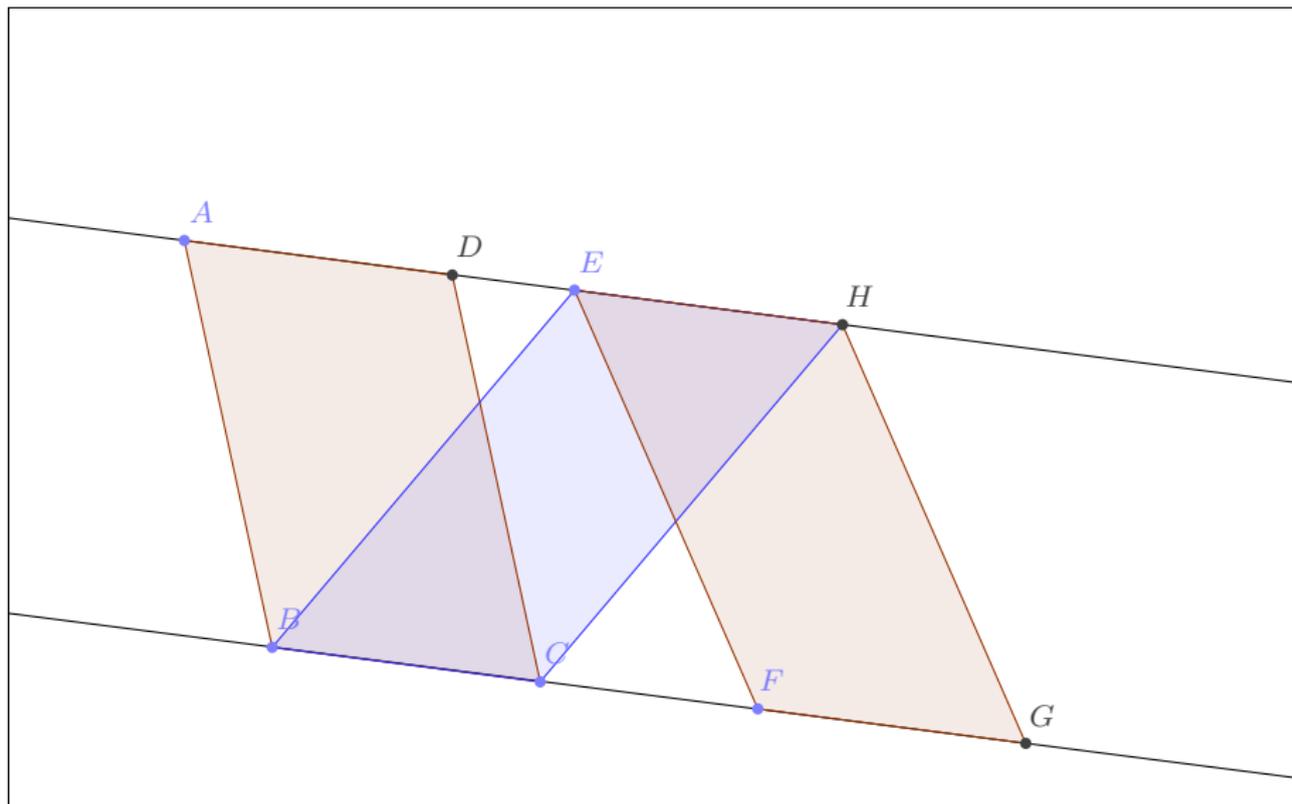


Symmetriegruppe:  $C_n$ .

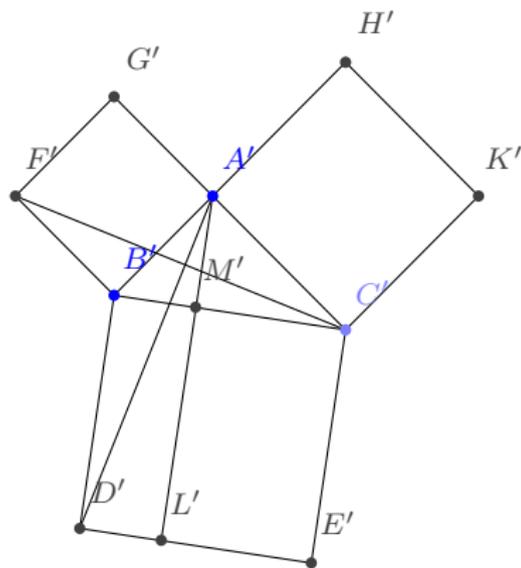
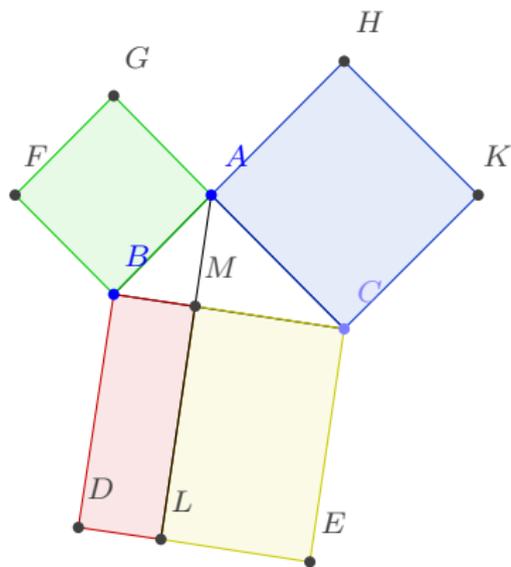
# Parallelen und Winkel



# Flächeninhalt von Dreieck und Parallelogramm



# Kathetensatz, Satz des Pythagoras



# Übungsaufgaben

- ▶ Aufgabe 4.4
- ▶ Aufgabe 5.1
- ▶ Aufgabe 5.2

- ▶ Aufgabe 5.3
- ▶ Aufgabe 5.4
- ▶ Aufgabe 6.4

# Outline

Grundlagen, Axiome

Euklid I

**Bewegungen**

Verhältnisse, Ähnlichkeiten

Kreise

# Komposition, Konjugation von Bewegungen, Involutionen

Wenn  $\varphi$  eine ... ist und  $\psi$  eine ..., dann ist  $\varphi \circ \psi$  eine ....

- ▶  $\varphi =$  Spiegelung,  $\psi =$  Spiegelung
- ▶  $\varphi =$  Verschiebung,  $\psi =$  Verschiebung
- ▶  $\varphi =$  Verschiebung,  $\psi =$  Drehung (oder umgekehrt)

Wenn  $\varphi$  eine Bewegung ist und  $\psi$  eine ..., dann ist  $\varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1}$  eine ... und die Parameter sind  $\varphi$  (Parameter von  $\psi$ ).

Jede Spiegelung  $\sigma$  ist eine Involution, also ist  $\sigma^{-1} = \sigma$ .

# Gerade, ungerade Bewegungen, Parität

Jede Bewegung  $\varphi$  hat eine Parität  $\text{par } \varphi \in \{0, 1\}$ , die beschreibt, ob sie gerade oder ungerade ist.

Gerade  $\circ$  gerade = gerade, ungerade  $\circ$  gerade = ungerade, ...

**Satz.** Wenn  $\ell$  eine Gerade ist und  $\varphi$  eine Bewegung, dann ist  $\varphi \circ \sigma_\ell^{\text{par } \varphi}$  eine gerade Bewegung.

# Gerade Bewegungen, Drehwinkel

Jeder gerade Bewegung  $\varphi$  hat einen Drehwinkel  $\text{ang } \varphi$  (ein algebraischer Winkel).

*Proposition.*  $\text{ang}(\varphi \circ \psi) = \text{ang } \varphi + \text{ang } \psi$ .

*Satz.* Wenn  $P$  ein Punkt ist und  $\varphi$  eine gerade Bewegung, dann ist  $\varphi \circ \rho_{P, \text{ang } \varphi}^{-1}$  eine Verschiebung.

# Verschiebungen, Vektoren

Jeder Verschiebung  $\tau$  hat einen Verschiebungsvektor  $\text{vec } \tau$ .

Zwei Verschiebungen sind gleich, wenn sie gleichen Verschiebungsvektor haben.

*Proposition.*  $\text{vec}(\varphi \circ \psi) = \text{vec } \varphi + \text{vec } \psi$ .

Vektoren können addiert und subtrahiert werden indem man Parallelogramme konstruiert.

# Klassifikation von Bewegungen

Typ	Fixpunktmenge	Komposition von ... Spiegelungen	gerade/ ungerade
Identität	Ebene	0	gerade
Spiegelung	Gerade	1	ungerade
echte Drehung	Punkt	2	gerade
echte Verschiebung	leer	2	gerade
echte Gleitspiegelung	leer	3	ungerade

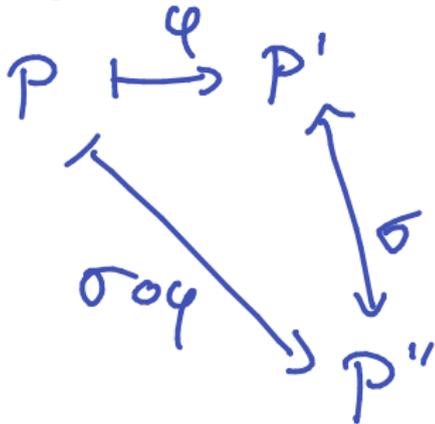
## Beispiel: Bewegung konstruieren

*Aufgabe.* Die Gleitspiegelung  $\varphi$  bildet  $P$  auf  $P'$  ab und  $Q$  auf  $Q'$ .

Konstruieren Sie  $\varphi(R)$ .

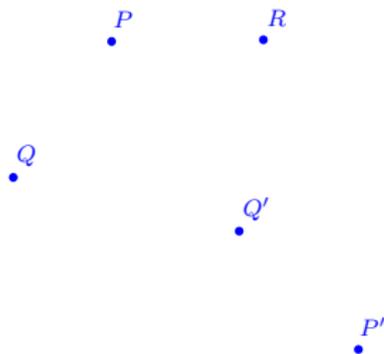
Idee: sei  $\sigma$  eine Spiegelung (z.B. an  $PQ$ ). Dann ist  $\sigma \circ \varphi$  eine gerade

Bewegung. Konstruiere erst  $R'' = \sigma(\varphi(R))$ . Dann ist  $\varphi(R) = \sigma(R'')$ .



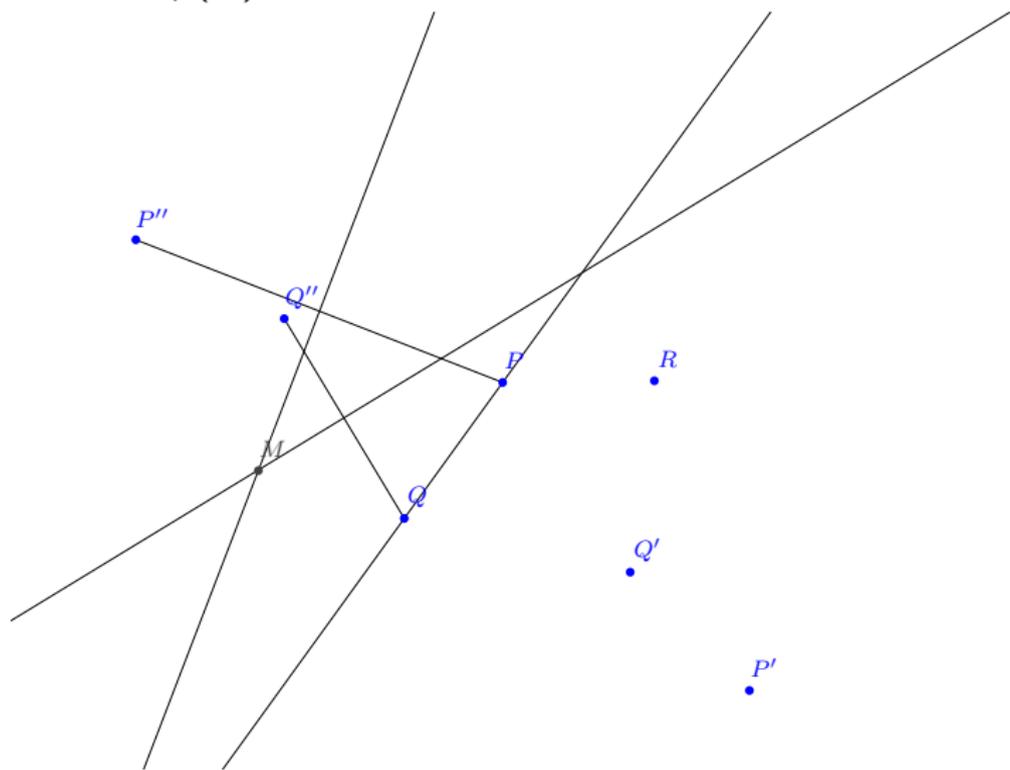
## Beispiel: Bewegung konstruieren

*Aufgabe.* Die Gleitspiegelung  $\varphi$  bildet  $P$  auf  $P'$  ab und  $Q$  auf  $Q'$ .  
Konstruieren Sie  $\varphi(R)$ .



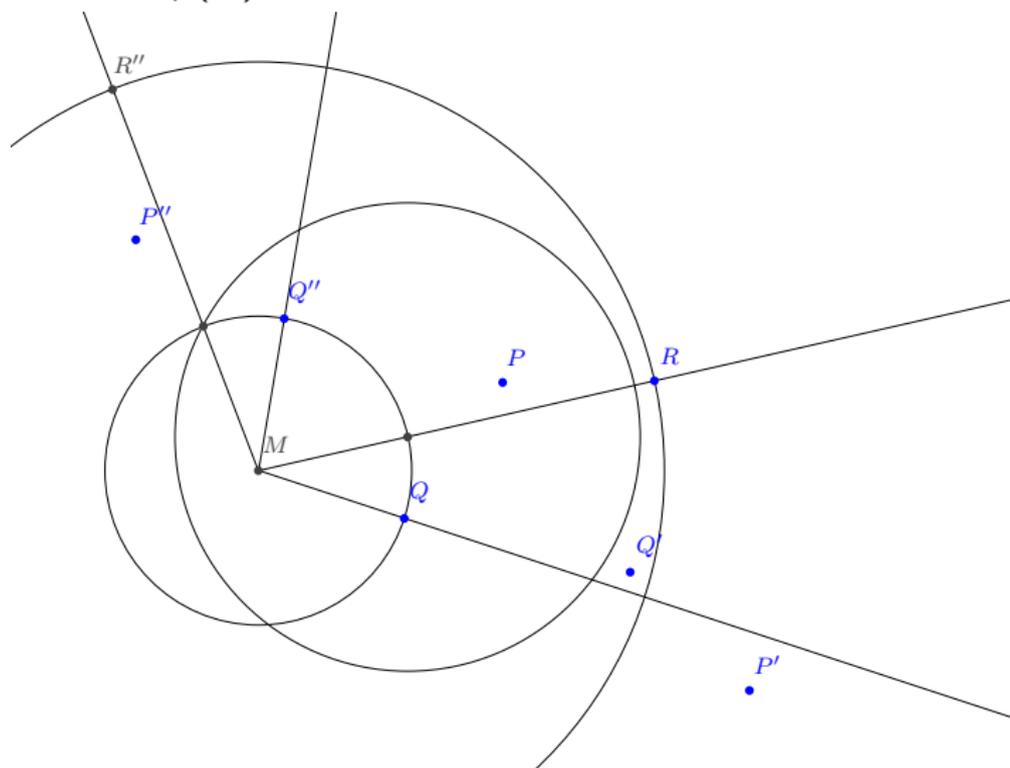
## Beispiel: Bewegung konstruieren

*Aufgabe.* Die Gleitspiegelung  $\varphi$  bildet  $P$  auf  $P'$  ab und  $Q$  auf  $Q'$ .  
Konstruieren Sie  $\varphi(R)$ .



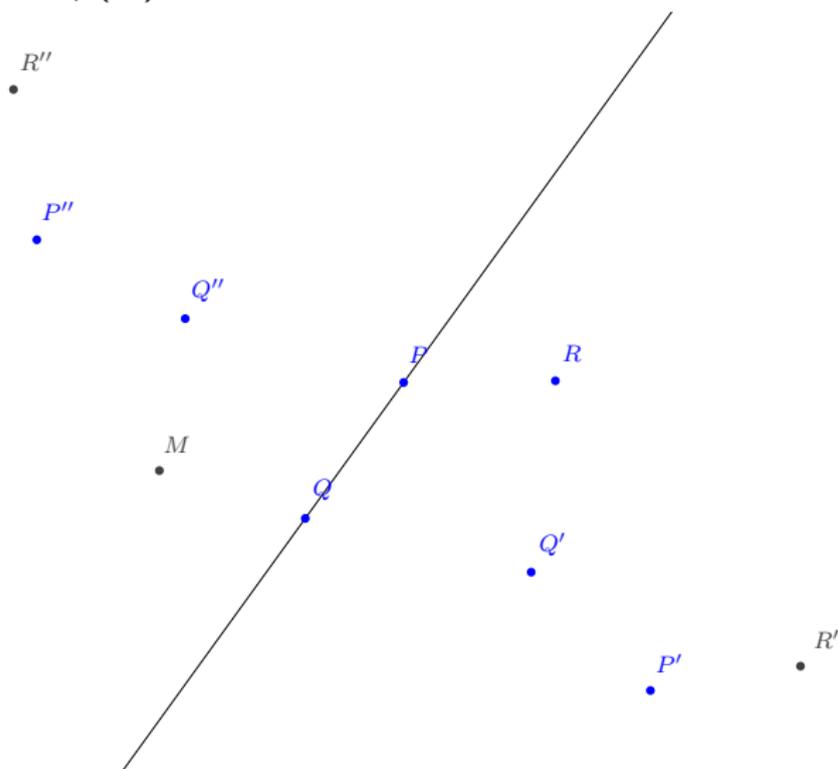
## Beispiel: Bewegung konstruieren

*Aufgabe.* Die Gleitspiegelung  $\varphi$  bildet  $P$  auf  $P'$  ab und  $Q$  auf  $Q'$ . Konstruieren Sie  $\varphi(R)$ .



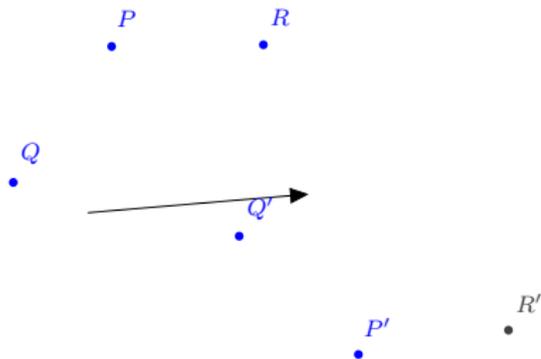
## Beispiel: Bewegung konstruieren

*Aufgabe.* Die Gleitspiegelung  $\varphi$  bildet  $P$  auf  $P'$  ab und  $Q$  auf  $Q'$ .  
Konstruieren Sie  $\varphi(R)$ .



## Beispiel: Bewegung konstruieren

*Aufgabe.* Die Gleitspiegelung  $\varphi$  bildet  $P$  auf  $P'$  ab und  $Q$  auf  $Q'$ .  
Konstruieren Sie  $\varphi(R)$ .



# Übungsaufgaben

- ▶ Aufgabe 2.1
- ▶ Aufgabe 2.2
- ▶ Aufgabe 2.3
- ▶ Aufgabe 2.4
- ▶ Aufgabe 3.3
- ▶ Aufgabe 4.1
- ▶ Aufgabe 6.1
- ▶ Aufgabe 6.2
- ▶ Aufgabe 7.1
- ▶ Aufgabe 7.2
- ▶ Aufgabe 8.2
- ▶ Aufgabe 8.3
- ▶ Aufgabe 8.4
- ▶ Aufgabe 9.4