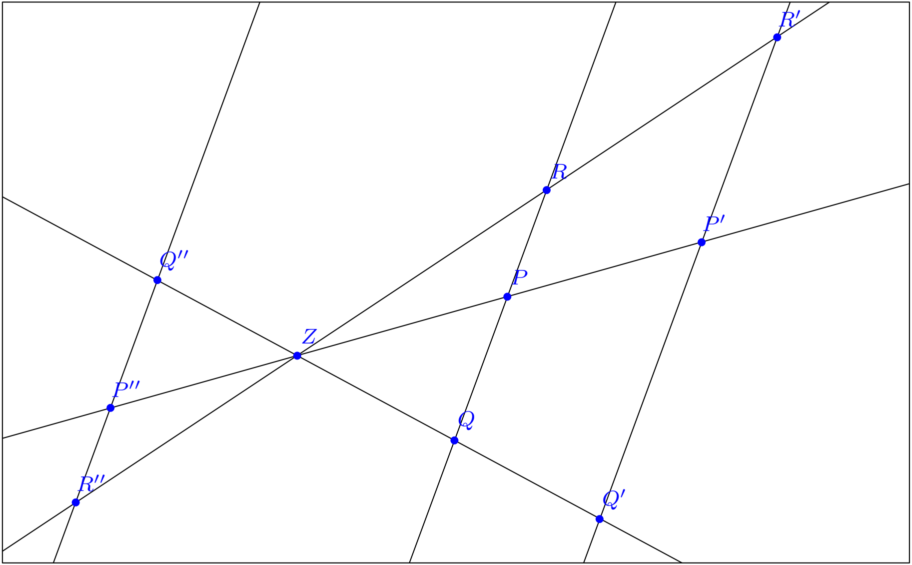
Outline

Zahlen

Leitmotiv: Zahlen sind Längenverhältnisse. Längenverhältnisse stehen in engem Zusammenhang zu Winkeln.

Strahlensätze



Ähnliche Dreiecke

Satz (Ähnlichkeitssatz „WWW“). Wenn PQR und $P'Q'R'$ Dreiecke sind mit $\angle RPQ = \angle R'P'Q'$, $\angle PQR \equiv \angle P'Q'R'$ und $\angle QRP \equiv \angle Q'R'P'$, dann ist PQR ähnlich zu $P'Q'R'$.

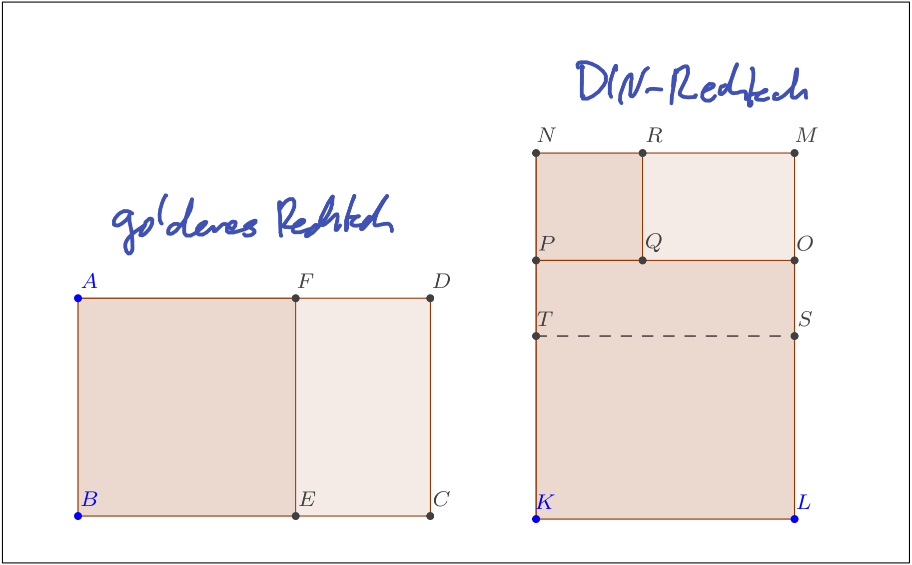
Trigonometrische Funktionen

Im Dreieck *PQR* mit $\angle PQR = \alpha$ und $\angle QRP = 90^\circ$ ist

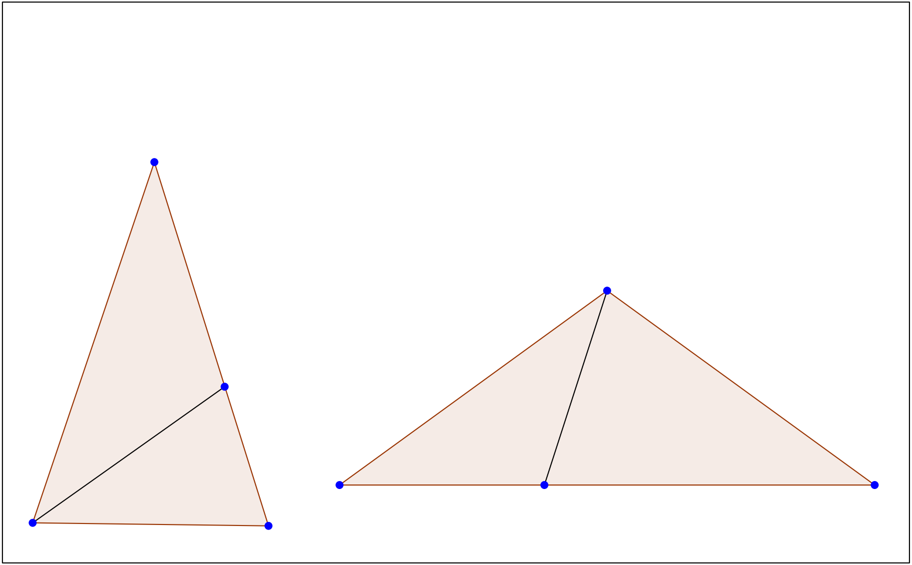
$$\sin\alpha = \frac{|PR|}{|PQ|} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$$
$$\cos\alpha = \frac{|QR|}{|PQ|} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$$
$$\tan\alpha = \frac{|PR|}{|QR|} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$90^\circ < \alpha < 180^\circ \qquad \cos(\alpha) = -\cos(\underbrace{180^\circ - \alpha}_{< 90^\circ})$

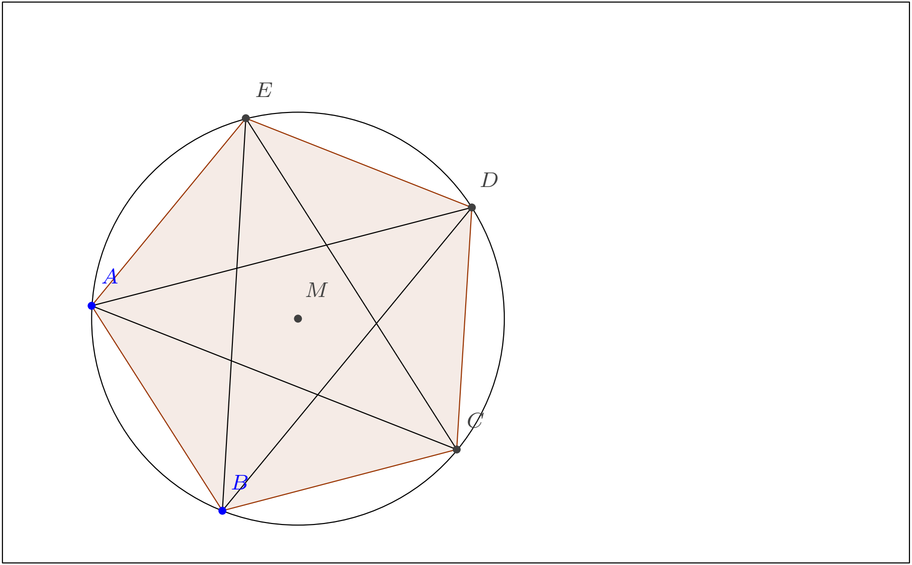
Goldener Schnitt



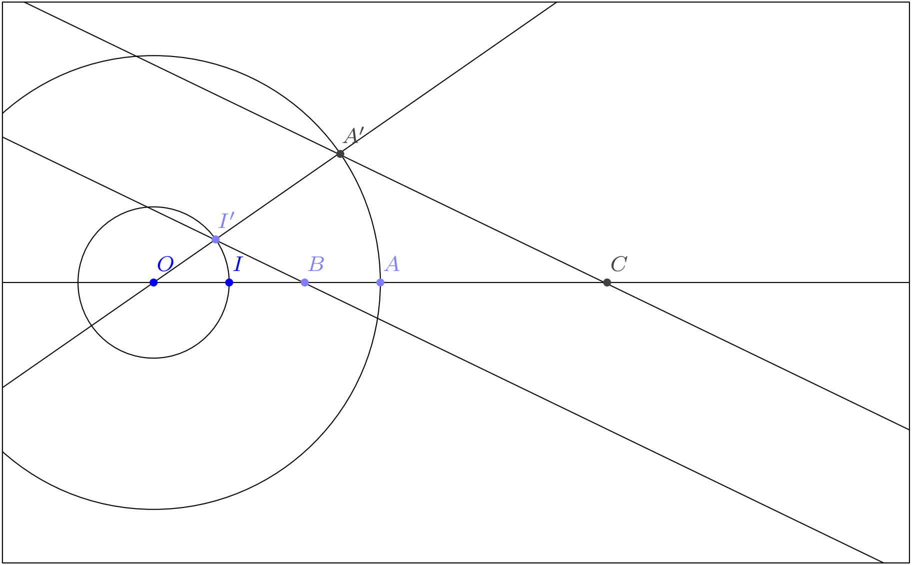
Goldene Dreiecke



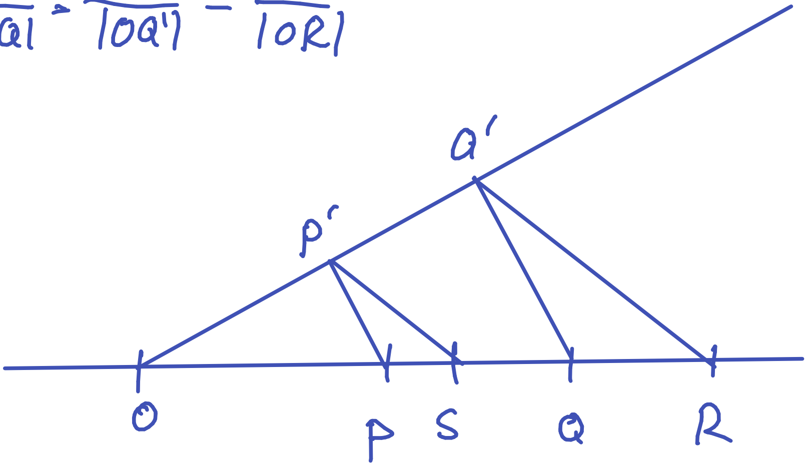
Regelmäßiges Fünfeck



Grundrechenarten konstruieren



$$\frac{|OP|}{|OQ|} = \frac{|OP'|}{|OQ'|} = \frac{|OS|}{|OR|}$$



Mult.

$$\frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OB|}{|OI|} \cdot \frac{|OA|}{|OI|}$$

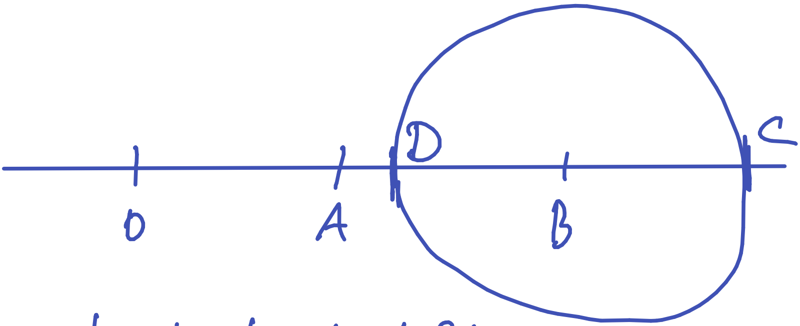
$$\Leftrightarrow \frac{|OC|}{|OI|} \cdot \frac{|OI|}{|OA|} = \frac{|OB|}{|OI|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|OC|}{|OA|} = \frac{|OB|}{|OI|}$$

Div.

$$\frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OA|}{|OI|} \cdot \frac{|OI|}{|OB|}$$

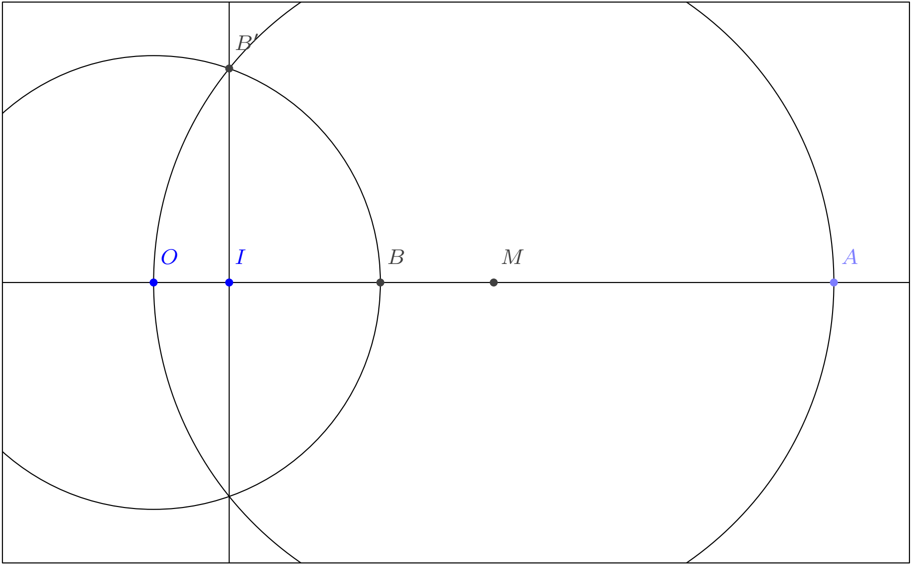
$$\Leftrightarrow \frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OA|}{|OB|}$$



$|OC| = |OA| + |OB|$

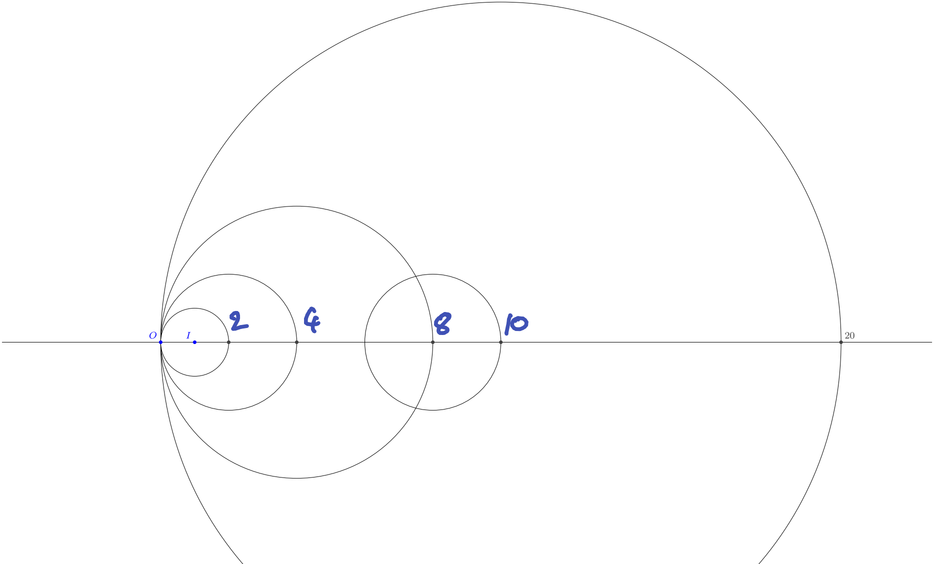
$|OD| = |OB| - |OA|$

Wurzel konstruieren



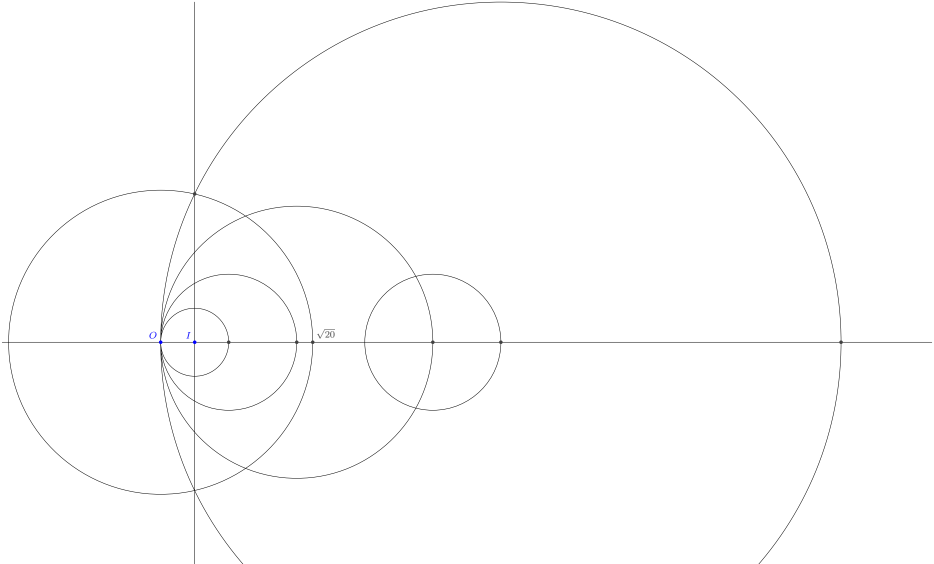
Beispiel: Winkel konstruieren

Aufgabe. Wir betrachten $|OI|$ als Einheitslänge. Nutzen Sie die Tatsache, dass $\sin(36^\circ) = \frac{\sqrt{10-\sqrt{20}}}{4}$ um einen 36°-Winkel zu konstruieren.



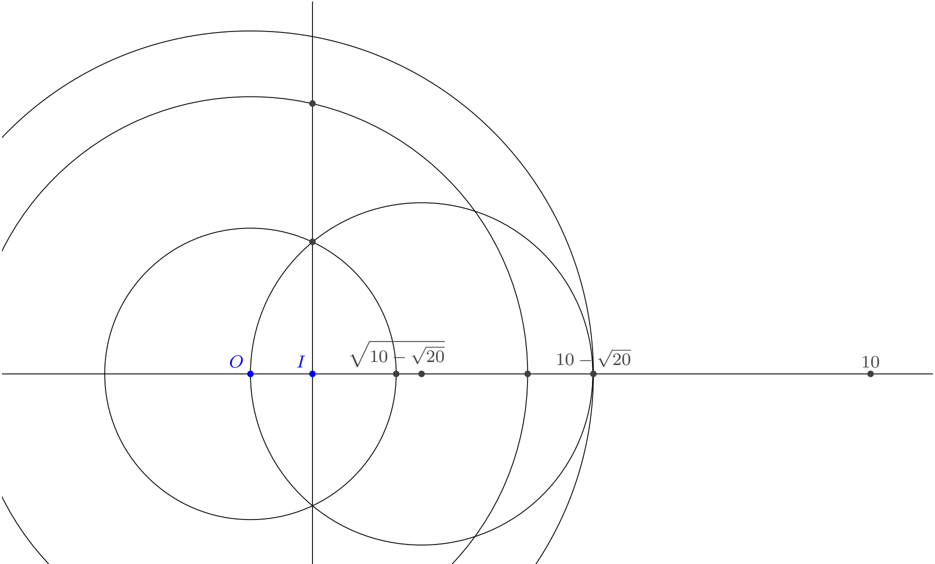
Beispiel: Winkel konstruieren

Aufgabe. Wir betrachten $|OI|$ als Einheitslänge. Nutzen Sie die Tatsache, dass $\sin(36^\circ) = \frac{\sqrt{10-\sqrt{20}}}{4}$ um einen 36°-Winkel zu konstruieren.



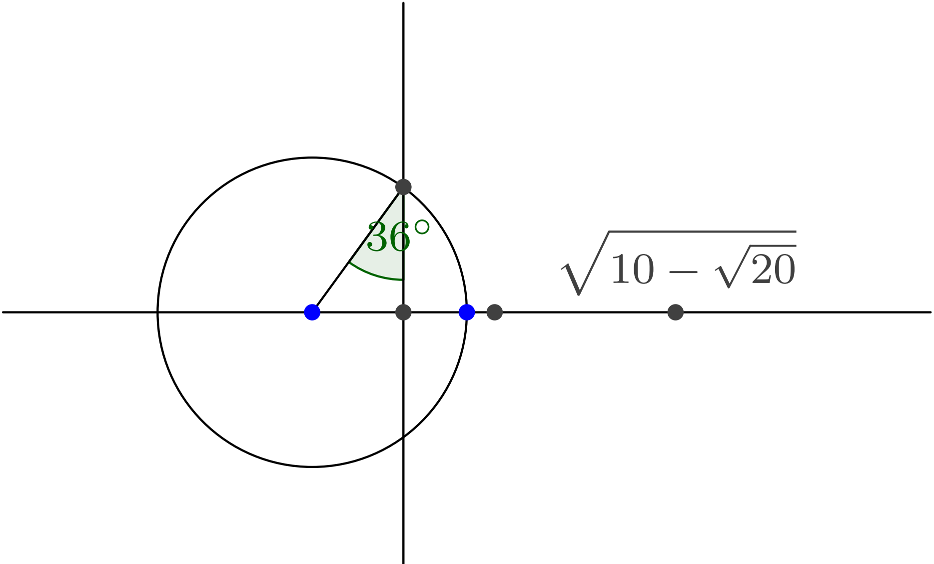
Beispiel: Winkel konstruieren

Aufgabe. Wir betrachten $|OI|$ als Einheitslänge. Nutzen Sie die Tatsache, dass $\sin(36^\circ) = \frac{\sqrt{10-\sqrt{20}}}{4}$ um einen 36°-Winkel zu konstruieren.



Beispiel: Winkel konstruieren

Aufgabe. Wir betrachten $|OI|$ als Einheitslänge. Nutzen Sie die Tatsache, dass $\sin(36^\circ) = \frac{\sqrt{10-\sqrt{20}}}{4}$ um einen 36°-Winkel zu konstruieren.



Übungsaufgaben

- Aufgabe 9.1
- Aufgabe 9.2
- Aufgabe 9.3
- Aufgabe 10.2
- Aufgabe 10.3
- Aufgabe 10.4
- Aufgabe 11.1

Outline

Schnittpunkte, Inkreis, Umkreis

Wann schneiden sich zwei Kreise (nicht)?

Durch drei Punkte geht entweder eine Gerade oder ein Kreis.

Jedes Dreieck hat einen Umkreis, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist.

Jedes Dreieck hat einen Inkreis, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist.

Zentriwinkelsatz, Thales-Satz, Peripheriewinkelsatz

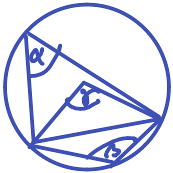
Proposition (Zentriwinkelsatz). Wenn P und Q Punkte auf einem Kreis k sind und $R \in k$ im gleichen Halbraum von PQ liegt wie der Mittelpunkt M von k, dann ist der (Zentri-)Mittelpunktswinkel $\angle PMQ$ doppelt so groß wie der Peripheriewinkel $\angle PRQ$.

Folgerung (Satz des Thales). Wenn zwei Punkte P und R auf einem Kreis k gegenüberliegen, ist für jeden Punkt $Q \in k$ der Winkel $\angle PQR$ ein rechter.

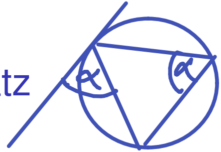
Proposition (Peripheriewinkelsatz). Wenn P und Q Punkte auf einem Kreis k sind, dann ist der Peripheriewinkel $\angle PRQ$ für alle Punkte $R \in k$ im gleichen Halbraum von PQ gleich.

$\gamma = 2\alpha$

$\alpha + \beta = 180^\circ$



Sehnen-Tangentenwinkelsatz, Sekanten-Tangenten-Satz, Sekanten-Satz

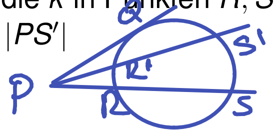


Proposition (Sehnen-Tangentenwinkelsatz). Seien A, B, D Punkte auf einem Kreis k und F ein Punkt, der auf der Tangente an k in B liegt, und zwar im Halbraum von BD, der A nicht enthält. Dann ist der Tangentenwinkel $\angle FBD$ gleich groß wie der Peripheriewinkel $\angle BAD$.

Proposition (Sekanten-Tangenten-Satz). Sei k ein Kreis und P ein Punkt außerhalb von k. Sei g eine Gerade durch P, die k in Q berührt und sei h eine Gerade durch P, die k in R und S schneidet. Dann ist $|PQ|/|PS| = |PR|/|PQ|$.

Umgekehrt: wenn $|PQ|/|PS| = |PR|/|PQ|$, dann ist Q Berührpunkt.

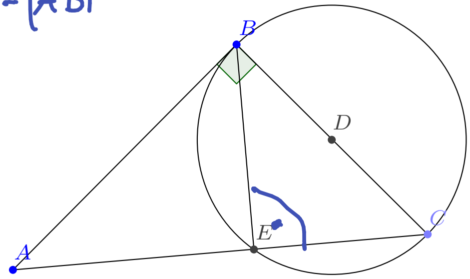
Proposition (Sekanten-Satz). Sei k ein Kreis und P ein Punkt außerhalb des Kreises. Seien h und h' Geraden durch P, die k in Punkten R, S und R', S' schneiden. Dann ist $|PR| \cdot |PS| = |PR'| \cdot |PS'|$



Beispiel: Kathetensatz aus Sekanten-Tangenten-Satz

Aufgabe. Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit $\angle ABC = 90°$. Sei D der Mittelpunkt von BC und E der Schnittpunkt von D_{BC} mit $\overline{AC}$. Zeigen Sie, dass $\angle BEC = 90°$. Leiten Sie daraus den Kathetensatz her.

$|AE| \cdot |AC| = |AB|^2$



Übungsaufgaben

- Aufgabe 1.3
- Aufgabe 1.4
- Aufgabe 5.1
- Aufgabe 5.3
- Aufgabe 11.2
- Aufgabe 11.3
- Aufgabe 11.4