

Universität Bielefeld

# Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

# Einleitung

Stefan Witzel

# Motivation

Warum sind wir hier?



# Motivation

## Warum sind wir hier?



### Kompetenzen

Die Studierenden beschreiben und erläutern elementare Formen, Konstruktionen und Symmetrien in Ebene und Raum und operieren damit materiell und mental. Sie durchdringen geometrische Aussagen argumentativ in Begründungen und Beweisen. Sie reflektieren geometrische Abbildungen (insbesondere Kongruenzabbildungen und deren Verknüpfungen), führen sie konstruktiv durch, nutzen sie beim Lösen von Konstruktionsproblemen, beschreiben Symmetrien durch Abbildungen und strukturieren diese mit dem Gruppenbegriff. Die Studierenden bestimmen Maße und ihr Invarianzverhalten durch Kongruenz- und Ähnlichkeitsargumente. Sie erklären und nutzen Verfahren der Trigonometrie. Die Studierenden nutzen neue Medien (insbesondere Software zur Darstellung ebener und räumlicher Gebilde) zur Exploration geometrischer Konstruktionen und als heuristisches Werkzeug zur Lösung geometrischer Probleme. Den Kompetenzerwerb in den Grundtechniken des mathematischen Arbeitens, die Fähigkeit zur Anwendung der Methoden, die Präsentations- und Kommunikationsfähigkeit sowie Ausdauer als mathematische Grundkompetenz weisen die Studierenden in den Übungen nach. Das Verständnis der Zusammenhänge und Begriffe wird in der Abschlussprüfung nachgewiesen.

# Motivation

Warum sind wir hier?

Ziele:

- ▶ Geometrisches Verständnis: Formen, Konstruktionen, Symmetrien
- ▶ Logisches argumentieren, systematisches Problemlösen

# Motivation

Warum sind wir hier?

Ziele:

- ▶ Geometrisches Verständnis: Formen, Konstruktionen, Symmetrien
- ▶ Logisches argumentieren, systematisches Problemlösen
- ▶ Spaß am Ausprobieren(?)

# Motivation

Warum sind wir hier?

Ziele:

- ▶ Geometrisches Verständnis: Formen, Konstruktionen, Symmetrien
- ▶ Logisches argumentieren, systematisches Problemlösen
- ▶ Spaß am Ausprobieren(?)

Mittel:

- ▶ Konstruktionen mit Zirkel und Lineal...
- ▶ ...oder GeoGebra ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org))
- ▶ Logische Beweise von Sätzen

# Motivation

Warum sind wir hier?

Ziele:

- ▶ Geometrisches Verständnis: Formen, Konstruktionen, Symmetrien
- ▶ Logisches argumentieren, systematisches Problemlösen
- ▶ Spaß am Ausprobieren(?)

Mittel:

- ▶ Konstruktionen mit Zirkel und Lineal...
- ▶ ...oder GeoGebra ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org))
- ▶ Logische Beweise von Sätzen
- ▶ Selber machen!

# Motivation

Warum sind wir hier?

Ziele:

- ▶ Geometrisches Verständnis: Formen, Konstruktionen, Symmetrien
- ▶ Logisches argumentieren, systematisches Problemlösen
- ▶ Spaß am Ausprobieren(?)

Mittel:

- ▶ Konstruktionen mit Zirkel und Lineal...
- ▶ ...oder GeoGebra ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org))
- ▶ Logische Beweise von Sätzen
- ▶ Selber machen!

„Geht's nicht ein bisschen einfacher?“ — König Ptolemäus

# Motivation

Warum sind wir hier?

Ziele:

- ▶ Geometrisches Verständnis: Formen, Konstruktionen, Symmetrien
- ▶ Logisches argumentieren, systematisches Problemlösen
- ▶ Spaß am Ausprobieren(?)

Mittel:

- ▶ Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. . .
- ▶ . . . oder GeoGebra ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org))
- ▶ Logische Beweise von Sätzen
- ▶ Selber machen!

„Geht's nicht ein bisschen einfacher?“ — König Ptolemäus

„Es gibt keinen Königsweg zur Geometrie!“ — Euklid

Übungen: selber machen

# Übungen: selber machen

- ▶ Übungen machen um zu lernen

# Übungen: selber machen

- ▶ Übungen machen um zu lernen
- ▶ Übungen machen zur Selbstkontrolle

# Übungen: selber machen

- ▶ Übungen machen um zu lernen
- ▶ Übungen machen zur Selbstkontrolle
- ▶ „Kann ich nicht“ gibt's nicht.

# Übungen: selber machen

- ▶ Übungen machen um zu lernen
- ▶ Übungen machen zur Selbstkontrolle
- ▶ „Kann ich nicht“ gibt's nicht.
- ▶ Übungsformen:
  - ▶ Präsenzübungen: Gruppenarbeit

# Übungen: selber machen

- ▶ Übungen machen um zu lernen
- ▶ Übungen machen zur Selbstkontrolle
- ▶ „Kann ich nicht“ gibt's nicht.
- ▶ Übungsformen:
  - ▶ Präsenzübungen: Gruppenarbeit
  - ▶ Tutorien: Besprechung der Hausübungen

# Übungen: selber machen

- ▶ Übungen machen um zu lernen
- ▶ Übungen machen zur Selbstkontrolle
- ▶ „Kann ich nicht“ gibt's nicht.
- ▶ Übungsformen:
  - ▶ Präsenzübungen: Gruppenarbeit
  - ▶ Tutorien: Besprechung der Hausübungen
    1. Übungsblatt: Do., 19. April
    1. Abgabe: Do., 26. April vor der Vorlesung
    1. Besprechung: 30. April bis 4. Mai

# Übungen: selber machen

- ▶ Übungen machen um zu lernen
- ▶ Übungen machen zur Selbstkontrolle
- ▶ „Kann ich nicht“ gibt's nicht.
- ▶ Übungsformen:
  - ▶ Präsenzübungen: Gruppenarbeit
  - ▶ Tutorien: Besprechung der Hausübungen
    1. Übungsblatt: Do., 19. April
    1. Abgabe: Do., 26. April vor der Vorlesung
    1. Besprechung: 30. April bis 4. Mai
- ▶ (50% der Übungspunkte berechtigen zur Klausurteilnahme)

# Vorlesung: Fragen stellen

- ▶ Wenn etwas unklar ist, fragen Sie nach!

# Vorlesung: Fragen stellen

- ▶ Wenn etwas unklar ist, fragen Sie nach!
  - ▶ Vielleicht bekommen Sie eine nützlichen Antwort,
  - ▶ in jedem Fall gewinnen Sie Zeit.

# Vorlesung: Fragen stellen

- ▶ Wenn etwas unklar ist, fragen Sie nach!
  - ▶ Vielleicht bekommen Sie eine nützlichen Antwort,
  - ▶ in jedem Fall gewinnen Sie Zeit.
- ▶ Zögern Sie nicht zu lange. . .

# Vorlesung: Fragen stellen

- ▶ Wenn etwas unklar ist, fragen Sie nach!
  - ▶ Vielleicht bekommen Sie eine nützlichen Antwort,
  - ▶ in jedem Fall gewinnen Sie Zeit.
- ▶ Zögern Sie nicht zu lange. . .
- ▶ . . . auch wenn die Frage nicht ausformuliert ist.

# Vorlesung: Fragen stellen

- ▶ Wenn etwas unklar ist, fragen Sie nach!
  - ▶ Vielleicht bekommen Sie eine nützlichen Antwort,
  - ▶ in jedem Fall gewinnen Sie Zeit.
- ▶ Zögern Sie nicht zu lange. . .
- ▶ . . . auch wenn die Frage nicht ausformuliert ist.
- ▶ Ihre Komilitoninnen werden es Ihnen danken.

generisch:  
weiblich

# Ansprechpartner

- ▶ Ihr Übungsleiter, Tutor

# Ansprechpartner

- ▶ Ihr Übungsleiter, Tutor
- ▶ Übungsleiter elementare Geometrie:  
Alexander Wallos, V4-233

# Ansprechpartner

- ▶ Ihr Übungsleiter, Tutor
- ▶ Übungsleiter elementare Geometrie:  
Alexander Wallos, V4-233
- ▶ Dozent elementare Geometrie:  
Stefan Witzel, V4-204, Do. 15:00-16:00

# Ansprechpartner

- ▶ Ihr Übungsleiter, Tutor
- ▶ Übungsleiter elementare Geometrie:  
Alexander Wallos, V4-233
- ▶ Dozent elementare Geometrie:  
Stefan Witzel, V4-204, Do. 15:00-16:00
- ▶ Tutorienzuordnung Fakultät für Mathematik:  
Jason Uhing, V4-201

# Ansprechpartner

- ▶ Ihr Übungsleiter, Tutor
- ▶ Übungsleiter elementare Geometrie:  
Alexander Wallos, V4-233
- ▶ Dozent elementare Geometrie:  
Stefan Witzel, V4-204, Do. 15:00-16:00
- ▶ Tutorienzuordnung Fakultät für Mathematik:  
Jason Uhing, V4-201
- ▶ Lernzentrum Mathematik:  
Sarah Nitsche, V3-133

# Ansprechpartner

- ▶ Ihr Übungsleiter, Tutor
- ▶ Übungsleiter elementare Geometrie:  
Alexander Wallos, V4-233
- ▶ Dozent elementare Geometrie:  
Stefan Witzel, V4-204, Do. 15:00-16:00
- ▶ Tutorienzuordnung Fakultät für Mathematik:  
Jason Uhing, V4-201
- ▶ Lernzentrum Mathematik:  
Sarah Nitsche, V3-133  
[www.math.uni-bielefeld.de/lernzentrum/](http://www.math.uni-bielefeld.de/lernzentrum/)
- ▶ Erstsemesterbetreuung/Studienberatung Fachschaft Mathematik:  
[www.math.uni-bielefeld.de/fachschaft/erstsemesterbetreuung/](http://www.math.uni-bielefeld.de/fachschaft/erstsemesterbetreuung/)

# Ansprechpartner

- ▶ Ihr Übungsleiter, Tutorin
- ▶ Übungsleiter elementare Geometrie:  
Alexander Wallos, V4-233
- ▶ Dozent elementare Geometrie:  
Stefan Witzel, V4-204, Do. 15:00-16:00
- ▶ Tutorienzuordnung Fakultät für Mathematik:  
Jason Uhing, V4-201
- ▶ Lernzentrum Mathematik:  
Sarah Nitsche, V3-133  
[www.math.uni-bielefeld.de/lernzentrum/](http://www.math.uni-bielefeld.de/lernzentrum/)
- ▶ Erstsemesterbetreuung/Studienberatung Fachschaft Mathematik:  
[www.math.uni-bielefeld.de/fachschaft/erstsemesterbetreuung/](http://www.math.uni-bielefeld.de/fachschaft/erstsemesterbetreuung/)  
[www.math.uni-bielefeld.de/fachschaft/studienberatung/](http://www.math.uni-bielefeld.de/fachschaft/studienberatung/)

# Praktisches

Website (im eKVV verlinkt):

`www.math.uni-bielefeld.de/~switzel/elementare_geometrie.html`

- ▶ Übungsblätter
- ▶ Vorlesungsskript
- ▶ Vorlesungsfolien
- ▶ aktuelle Informationen

# Praktisches

Website (im eKVV verlinkt):

`www.math.uni-bielefeld.de/~switzel/elementare_geometrie.html`

- ▶ Übungsblätter
- ▶ Vorlesungsskript
- ▶ Vorlesungsfolien
- ▶ aktuelle Informationen

Vorlesung: 10:15 Uhr – 11:50 Uhr, 5 Minuten Pause

# Praktisches

Website (im eKVV verlinkt):

`www.math.uni-bielefeld.de/~switzel/elementare_geometrie.html`

- ▶ Übungsblätter
- ▶ Vorlesungsskript
- ▶ Vorlesungsfolien
- ▶ aktuelle Informationen

Vorlesung: 10:15 Uhr – 11:50 Uhr, 5 Minuten Pause

Klausur-Termine: 9. August, 30. August

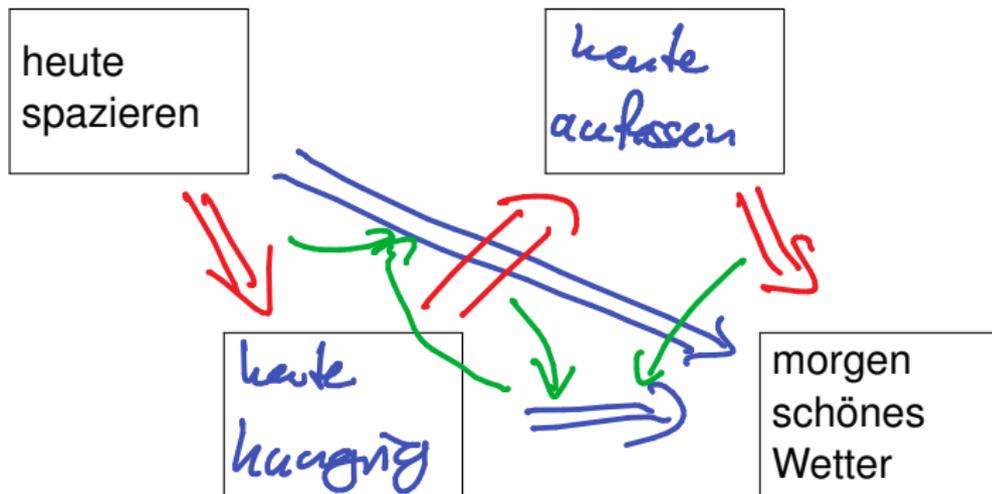
# Euklid

- ▶ Euklid v. Alexandria lebte um 300 v.Chr.
- ▶ In seinen **Elementen** entwickelt er die Geometrie der Ebene und des Raums axiomatisch:
  - ▶ Jede Aussage (**Proposition**) muss aus einigen wenigen **Axiomen bewiesen** werden.
  - ▶ Die Axiome sollen offensichtlich und unbestreitbar sein.

# Beispiel: Proposition aus Axiomen

*Proposition.* Wenn ich heute spazieren gehe, dann ist morgen schönes Wetter.

Beweis.



# Beispiel: Proposition aus Axiomen

## *Axiome.*

1. Wenn ich heute spazieren gehe, dann habe heute Hunger.
2. Wenn ich heute Hunger habe, dann esse ich heute auf.
3. Wenn ich heute aufesse, dann ist morgen schönes Wetter.

*Proposition.* Wenn ich heute spazieren gehe, dann ist morgen schönes Wetter.

*Beweis.* Angenommen ich gehe heute spazieren. Dann folgt mit Axiom 1, dass ich heute Hunger habe. Daraus schließen wir zusammen mit Axiom 2, dass ich heute aufesse. Wegen Axiom 3 gilt dann, dass morgen schönes Wetter ist. □

# Euklid

- ▶ Euklid v. Alexandria lebte um 300 v.Chr.
- ▶ In seinen **Elementen** entwickelt er die Geometrie der Ebene und des Raums axiomatisch:
  - ▶ Jede Aussage (**Proposition**) muss aus einigen wenigen **Axiomen bewiesen** werden.
  - ▶ Die Axiome sollen offensichtlich und unbestreitbar sein.
- ▶ Diese Denkweise prägt die moderne Wissenschaft. . .

# Euklid

- ▶ Euklid v. Alexandria lebte um 300 v.Chr.
- ▶ In seinen **Elementen** entwickelt er die Geometrie der Ebene und des Raums axiomatisch:
  - ▶ Jede Aussage (**Proposition**) muss aus einigen wenigen **Axiomen bewiesen** werden.
  - ▶ Die Axiome sollen offensichtlich und unbestreitbar sein.
- ▶ Diese Denkweise prägt die moderne Wissenschaft. . .
- ▶ . . . und unsere ganze Kultur.

“We hold these truths to be self-evident, that all men are created equal, that they are endowed by their Creator with certain unalienable Rights, that among these are Life, Liberty and the pursuit of Happiness.”

— Declaration of Independence

# Euklid

- ▶ Euklid v. Alexandria lebte um 300 v.Chr.
- ▶ In seinen **Elementen** entwickelt er die Geometrie der Ebene und des Raums axiomatisch:
  - ▶ Jede Aussage (**Proposition**) muss aus einigen wenigen **Axiomen bewiesen** werden.
  - ▶ Die Axiome sollen offensichtlich und unbestreitbar sein.
- ▶ Diese Denkweise prägt die moderne Wissenschaft. . .
- ▶ . . . und unsere ganze Kultur.

“The history of the present King of Great Britain is a history of repeated injuries and usurpations, all having in direct object the establishment of an absolute Tyranny over these States.

To prove this, let Facts be submitted to a candid world.”

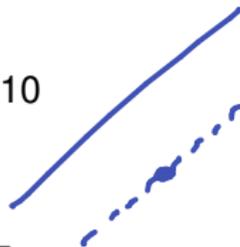
— Declaration of Independence

# Euklidische Geometrie nach Euklid

- ▶ Die logische Strenge der Elemente entspricht nicht modernen Ansprüchen.
- ▶ Formalisierung und Verständnis der Logik:
  - ▶ „Principia Mathematica“ von [Russel](#) und [Whitehead](#), 1910
  - ▶ [Gödel](#) beweist Unvollständigkeit, 1935

# Euklidische Geometrie nach Euklid

- ▶ Die logische Strenge der Elemente entspricht nicht modernen Ansprüchen.
- ▶ Formalisierung und Verständnis der Logik:
  - ▶ „Principia Mathematica“ von [Russel](#) und [Whitehead](#), 1910
  - ▶ [Gödel](#) beweist Unvollständigkeit, 1935
- ▶ Entdeckung nicht-euklidischer Geometrie:
  - ▶ Projektive Geometrie, [Kepler](#), [Desargues](#), ..., 17. Jhd.–
  - ▶ Hyperbolische Geometrie, [Lobachevsky](#), [Bolyai](#), [Gauß](#) ~1830



# Euklidische Geometrie nach Euklid

- ▶ Die logische Strenge der Elemente entspricht nicht modernen Ansprüchen.
- ▶ Formalisierung und Verständnis der Logik:
  - ▶ „Principia Mathematica“ von [Russel](#) und [Whitehead](#), 1910
  - ▶ [Gödel](#) beweist Unvollständigkeit, 1935
- ▶ Entdeckung nicht-euklidischer Geometrie:
  - ▶ Projektive Geometrie, [Kepler](#), [Desargues](#), ..., 17. Jhd.–
  - ▶ Hyperbolische Geometrie, [Lobachevsky](#), [Bolyai](#), [Gauß](#) ~1830
- ▶ Eine vollständige Axiomatisierung der Geometrie von Ebene und Raum gibt [Hilbert](#) in seinen „Grundlagen der Geometrie“, 1899

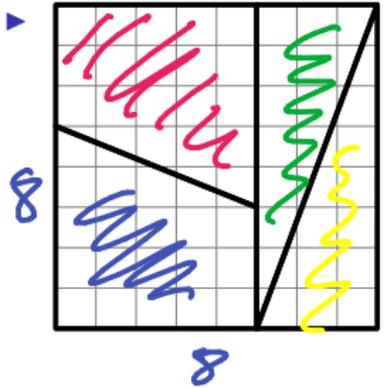
# Euklidische Geometrie nach Euklid

- ▶ Die logische Strenge der Elemente entspricht nicht modernen Ansprüchen.
- ▶ Formalisierung und Verständnis der Logik:
  - ▶ „Principia Mathematica“ von [Russel](#) und [Whitehead](#), 1910
  - ▶ [Gödel](#) beweist Unvollständigkeit, 1935
- ▶ Entdeckung nicht-euklidischer Geometrie:
  - ▶ Projektive Geometrie, [Kepler](#), [Desargues](#), . . . , 17. Jhd.–
  - ▶ Hyperbolische Geometrie, [Lobachevsky](#), [Bolyai](#), [Gauß](#) ~1830
- ▶ Eine vollständige Axiomatisierung der Geometrie von Ebene und Raum gibt [Hilbert](#) in seinen „Grundlagen der Geometrie“, 1899

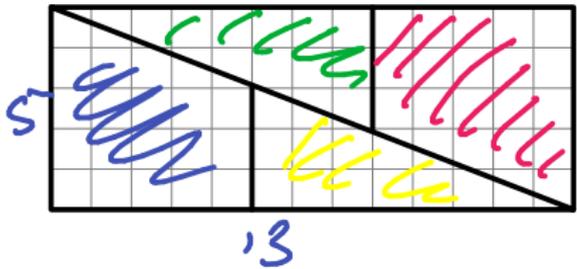
Trotzdem ist Euklid nach über 2000 Jahren noch sehr lesenswert!

# Ebene Geometrie: offensichtlich?

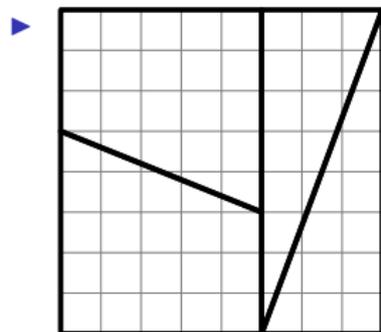
64



65

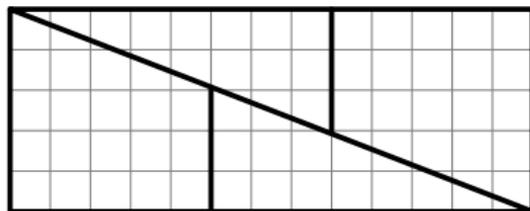
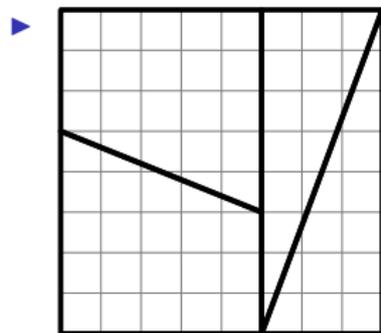


## Ebene Geometrie: offensichtlich?

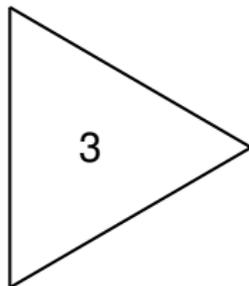


- ▶ Johann Gustav Hermes beschreibt 1894 nach zehnjähriger Arbeit auf 200 Seiten die Konstruktion eines regelmäßigen 65537-Ecks:

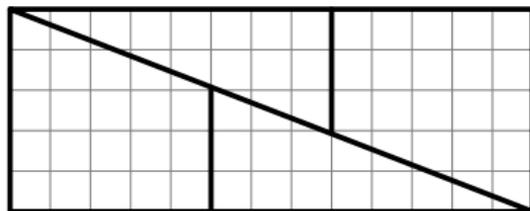
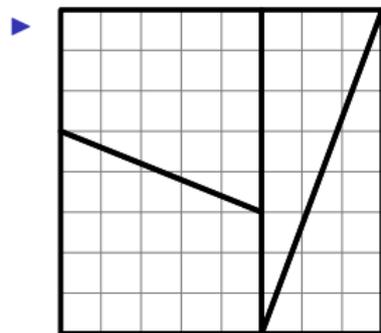
## Ebene Geometrie: offensichtlich?



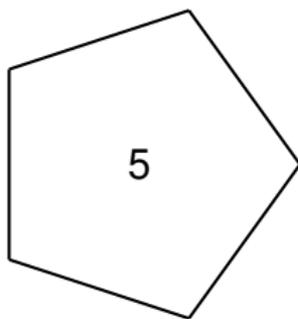
- ▶ Johann Gustav Hermes beschreibt 1894 nach zehnjähriger Arbeit auf 200 Seiten die Konstruktion eines regelmäßigen 65537-Ecks:



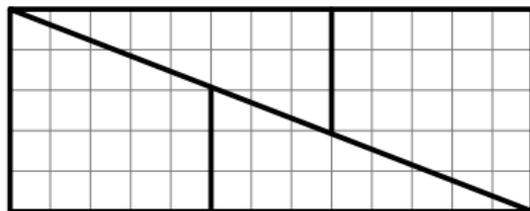
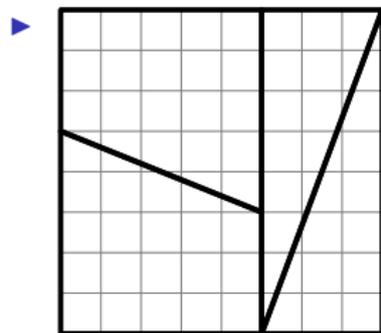
## Ebene Geometrie: offensichtlich?



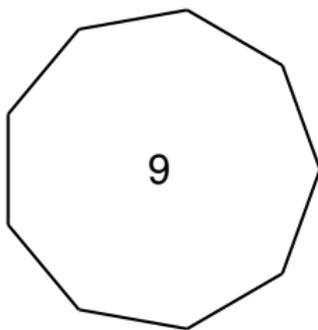
- ▶ Johann Gustav Hermes beschreibt 1894 nach zehnjähriger Arbeit auf 200 Seiten die Konstruktion eines regelmäßigen 65537-Ecks:



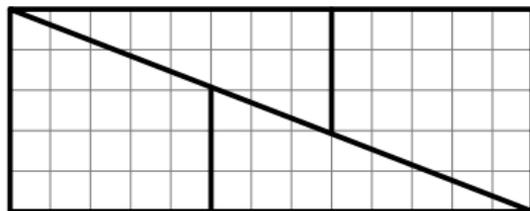
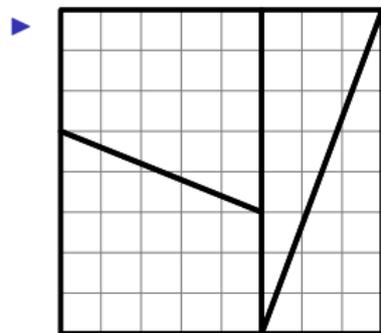
## Ebene Geometrie: offensichtlich?



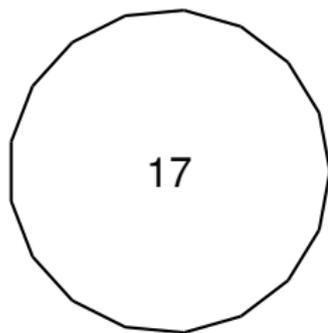
- ▶ Johann Gustav Hermes beschreibt 1894 nach zehnjähriger Arbeit auf 200 Seiten die Konstruktion eines regelmäßigen 65537-Ecks:



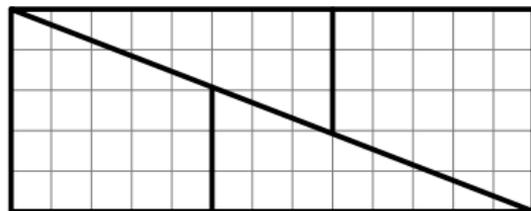
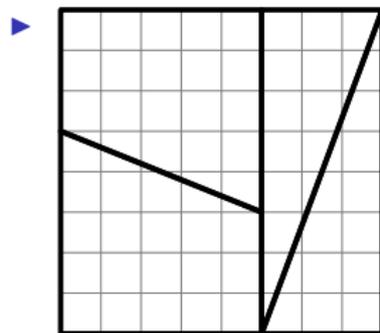
## Ebene Geometrie: offensichtlich?



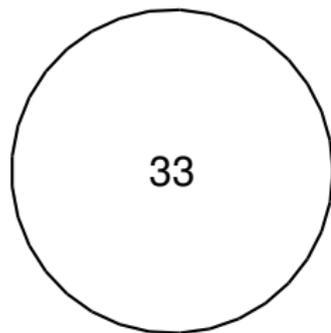
- ▶ Johann Gustav Hermes beschreibt 1894 nach zehnjähriger Arbeit auf 200 Seiten die Konstruktion eines regelmäßigen 65537-Ecks:



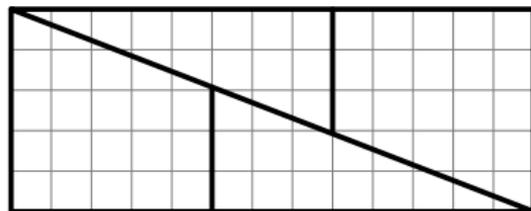
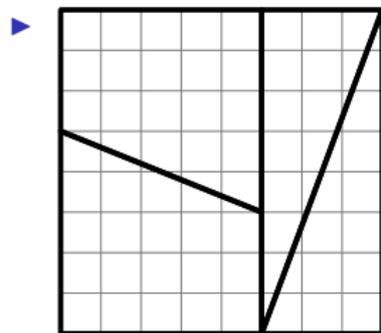
## Ebene Geometrie: offensichtlich?



- ▶ Johann Gustav Hermes beschreibt 1894 nach zehnjähriger Arbeit auf 200 Seiten die Konstruktion eines regelmäßigen 65537-Ecks:



## Ebene Geometrie: offensichtlich?



- ▶ Johann Gustav Hermes beschreibt 1894 nach zehnjähriger Arbeit auf 200 Seiten die Konstruktion eines regelmäßigen 65537-Ecks:

