

Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

Grundlagen

Stefan Witzel

Punkte, Abstand

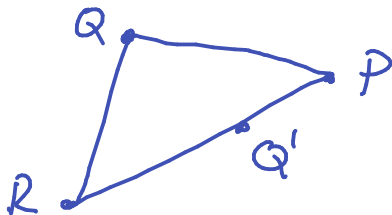
Die Euklidische Ebene $\mathbb{E}^2$ besteht aus **Punkten**.

Zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{E}^2$ haben einen **Abstand** $|PQ| \geq 0$.

Axiome (Abstand). Für Punkte $P, Q, R \in \mathbb{E}^2$ gilt:

1. $|PQ| = 0$ genau dann, wenn $P = Q$,
2. $|PQ| = |QP|$,
3. $|PQ| + |QR| \geq |PR|$ (Dreiecksungleichung).

Der Punkt Q liegt **zwischen** P und R wenn $|PQ| + |QR| = |PR|$.



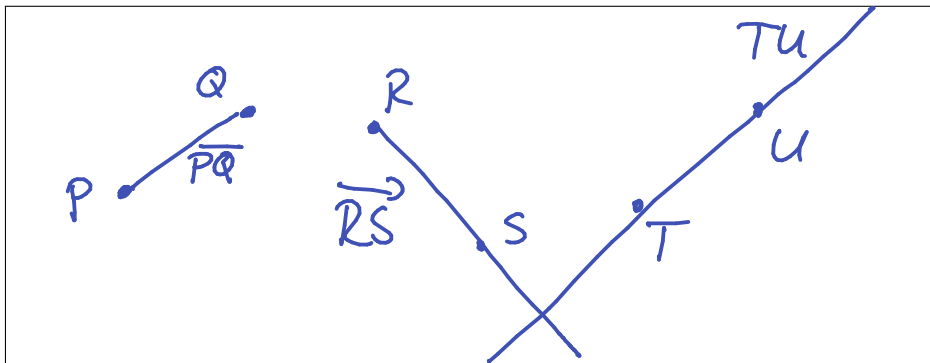
Segmente, Strahlen, Geraden

Seien P und Q verschiedene Punkte.

Das **Segment** $\overline{PQ}$ besteht aus Punkten zwischen P und Q .

Der **Strahl** $\overrightarrow{PQ}$ besteht aus Punkten R mit $R \in \overline{PQ}$ oder $Q \in \overline{PR}$.

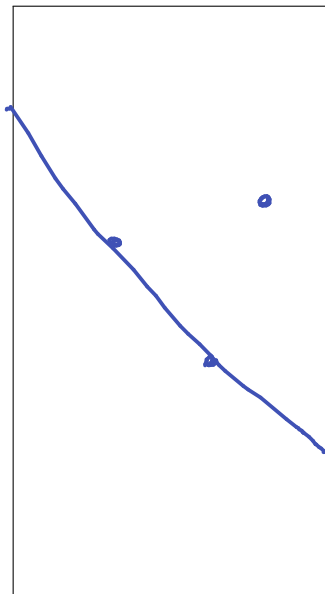
Die **Gerade** PQ besteht aus Punkten R , so dass einer von P, Q, R zwischen den anderen beiden liegt.



Axiome zu Punkten und Geraden

Axiome (Punkte und Geraden).

1. Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.



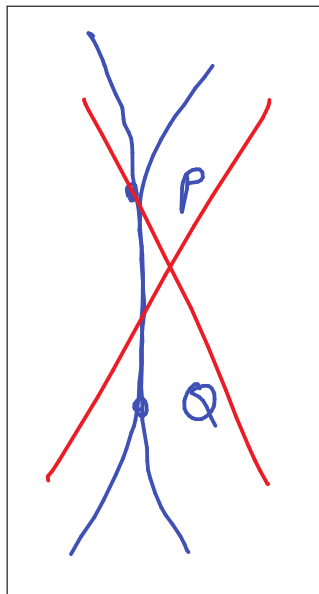
Axiome zu Punkten und Geraden

Axiome (Punkte und Geraden).

1. Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Für zwei verschiedene Punkte P und Q gilt:

2. Es gibt nur eine einzige Gerade, die durch P und Q geht.



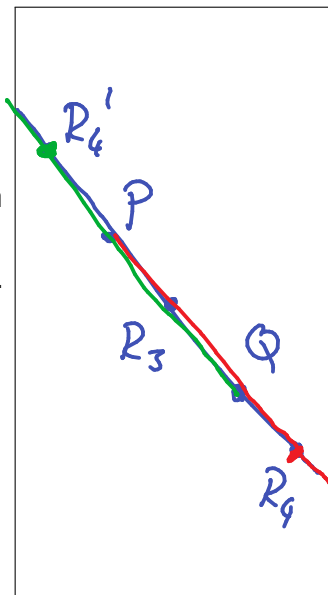
Axiome zu Punkten und Geraden

Axiome (Punkte und Geraden).

1. Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Für zwei verschiedene Punkte P und Q gilt:

2. Es gibt nur eine einzige Gerade, die durch P und Q geht.
3. Es gibt in $\overline{PQ}$ einen Punkt außer P und Q .
4. Es gibt auf dem Strahl $\overrightarrow{PQ}$ einen Punkt außerhalb von $\overline{PQ}$.



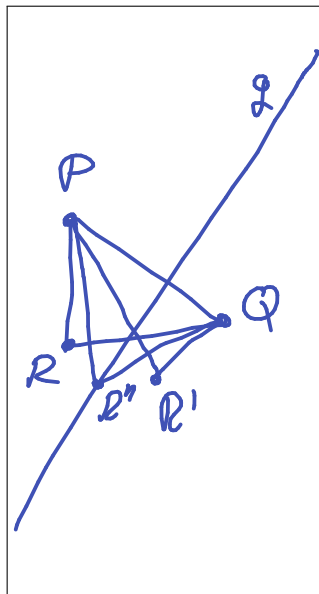
Axiome zu Punkten und Geraden

Axiome (Punkte und Geraden).

1. Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Für zwei verschiedene Punkte P und Q gilt:

2. Es gibt nur eine einzige Gerade, die durch P und Q geht.
3. Es gibt in $\overline{PQ}$ einen Punkt außer P und Q .
4. Es gibt auf dem Strahl $\overrightarrow{PQ}$ einen Punkt außerhalb von $\overline{PQ}$.
5. Wenn eine Gerade g das Segment $\overline{PQ}$ trifft und R ein weiterer Punkt ist, dann trifft g auch $\overline{PR}$ oder $\overline{QR}$.



Axiome zu Punkten und Geraden

Axiome (Punkte und Geraden).

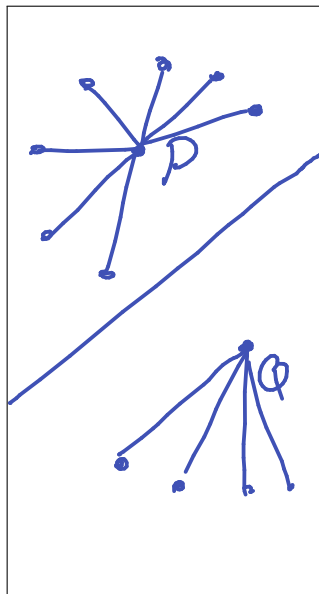
1. Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Für zwei verschiedene Punkte P und Q gilt:

2. Es gibt nur eine einzige Gerade, die durch P und Q geht.
3. Es gibt in $\overline{PQ}$ einen Punkt außer P und Q .
4. Es gibt auf dem Strahl $\overrightarrow{PQ}$ einen Punkt außerhalb von $\overline{PQ}$.
5. Wenn eine Gerade g das Segment $\overline{PQ}$ trifft und R ein weiterer Punkt ist, dann trifft g auch $\overline{PR}$ oder $\overline{QR}$.

Proposition.

Jede Gerade teilt die Ebene in zwei Hälften.

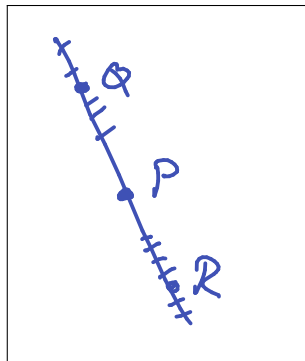
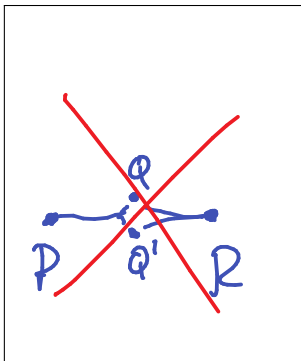
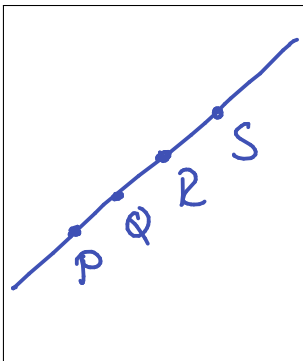


Folgerungen zu Punkten und Geraden

Proposition. Vier Punkte auf einer Geraden können so mit P, Q, R, S benannt werden, dass $Q, R \in \overline{PS}$, $Q \in \overline{PR}$ und $R \in \overline{QS}$.

Folgerung. Wenn $Q, Q' \in \overline{PR}$, dann liegt $Q \in \overline{PQ'}$ und $Q' \in \overline{QR}$ oder es liegt $Q' \in \overline{PQ}$ und $Q \in \overline{Q'R}$.

Folgerung. Jeder Punkt auf einer Geraden teilt die Gerade in zwei Hälften.

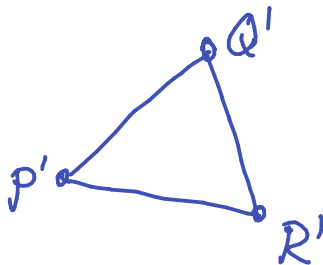
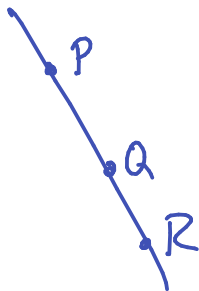


Dreiecke

Seien P, Q, R Punkte.

Wenn alle drei Punkte auf einer Geraden liegen, d.h. wenn $PQ = QR = PR$, dann heißen sie **kollinear**.

Wenn sie nicht kollinear sind, bilden sie ein **Dreieck**, dessen **Ecken** sie sind und dessen **Kanten** die Segmente $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{PR}$ sind.

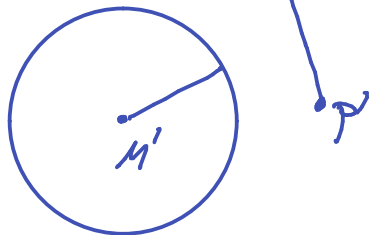
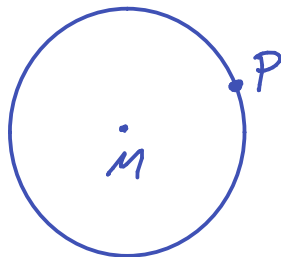


Kreise

Seien M, P, Q Punkte.

Der **Kreis** M_P besteht aus Punkten die den gleichen Abstand zu M haben, wie P .

Der **Kreis** M_{PQ} besteht aus Punkten die den gleichen Abstand zu M haben, wie P zu Q .



Konstruktionen: gleichseitiges Dreieck, Kreis

Problem. Gegeben Punkte P , Q , konstruiere ein Dreieck PQR mit $|PQ| = |QR| = |PR|$.

Konstruktionen: gleichseitiges Dreieck, Kreis

Problem. Gegeben Punkte P , Q , konstruiere ein Dreieck PQR mit $|PQ| = |QR| = |PR|$.

Problem. Gegeben Punkte M , P , Q , konstruiere den Kreis M_{PQ} und verwende dazu nur Kreise der Form X_Y .

Konstruktionen: gleichseitiges Dreieck, Kreis

Problem. Gegeben Punkte P , Q , konstruiere ein Dreieck PQR mit $|PQ| = |QR| = |PR|$.

Konstruktion. Wähle R als einen Schnittpunkt von P_Q und Q_P .



Problem. Gegeben Punkte M , P , Q , konstruiere den Kreis M_{PQ} und verwende dazu nur Kreise der Form X_Y .

Konstruktionen: gleichseitiges Dreieck, Kreis

Problem. Gegeben Punkte P, Q , konstruiere ein Dreieck PQR mit $|PQ| = |QR| = |PR|$.

Konstruktion. Wähle R als einen Schnittpunkt von P_Q und Q_P . ◇

Beweis. Weil $R \in P_Q$, ist $|PR| = |PQ|$. Weil $R \in Q_P$, ist $|QR| = |PQ|$. □

Problem. Gegeben Punkte M, P, Q , konstruiere den Kreis M_{PQ} und verwende dazu nur Kreise der Form X_Y .

Konstruktionen: gleichseitiges Dreieck, Kreis

Problem. Gegeben Punkte P, Q , konstruiere ein Dreieck PQR mit $|PQ| = |QR| = |PR|$.

Konstruktion. Wähle R als einen Schnittpunkt von P_Q und Q_P . ◇

Beweis. Weil $R \in P_Q$, ist $|PR| = |PQ|$. Weil $R \in Q_P$, ist $|QR| = |PQ|$. □

Problem. Gegeben Punkte M, P, Q , konstruiere den Kreis M_{PQ} und verwende dazu nur Kreise der Form X_Y , nicht der Form X_{YZ} .

Konstruktion. Konstruiere A , so dass AMP ein gleichseitiges Dreieck ist. Wähle B als Schnittpunkt von $\overrightarrow{AP}$ und P_Q . Wähle C als Schnittpunkt von A_B und $\overrightarrow{AM}$. Dann ist $M_C = M_{PQ}$. ◇

Beweis. Es ist $|AM| = |AP|$ weil AMP ein gleichseitiges Dreieck ist. Weil C auf A_B liegt, ist $|AC| = |AB|$. Weil $B \in P_Q$, ist $|PB| = |PQ|$. Man sieht, dass $|AB| = |AP| + |PB|$ und $|AC| = |AM| + |MC|$. Also ist $|MC| = |AC| - |AM| = |AB| - |AP| = |PB| = |PQ|$. □

Übungsaufgaben

Aufgabe. Gegeben Punkte P, Q , konstruiere ein Dreieck PQR mit $|PQ| = |QR| = |PR|$.

Konstruktionsbeschreibung.

Wähle R als einen Schnittpunkt von P_Q und Q_P .



Begründung. Weil $R \in P_Q$, ist $|PR| = |PQ|$. Weil $R \in Q_P$, ist $|QR| = |PQ|$.



Aufgabe. Gegeben Punkte M, P, Q , konstruiere den Kreis M_{PQ} und verwende dazu nur Kreise der Form X_Y .

Konstruktionsbeschreibung. Konstruiere A , so dass AMP ein gleichseitiges Dreieck ist. Wähle B als Schnittpunkt von $\overrightarrow{AP}$ und P_Q . Wähle C als Schnittpunkt von A_B und $\overrightarrow{AM}$. Dann ist $M_C = M_{PQ}$.



Begründung. Es ist $|AM| = |AP|$ weil AMP ein gleichseitiges Dreieck ist. Weil C auf A_B liegt, ist $|AC| = |AB|$. Weil $B \in P_Q$, ist $|PB| = |PQ|$. Man sieht, dass $|AB| = |AP| + |PB|$ und $|AC| = |AM| + |MC|$. Also ist $|MC| = |AC| - |AM| = |AB| - |AP| = |PB| = |PQ|$.



Schnittpunkte

Wähle R als einen Schnittpunkt von P_Q und Q_P .

Schnittpunkte

Wähle R als einen Schnittpunkt von P_Q und Q_P .

Warum sollten sich die beiden Kreise schneiden?

Schnittpunkte

Wähle R als einen Schnittpunkt von P_Q und Q_P .

Warum sollten sich die beiden Kreise schneiden?

„ . . . “
— Euklid

Schnittpunkte

Wähle R als einen Schnittpunkt von P_Q und Q_P .

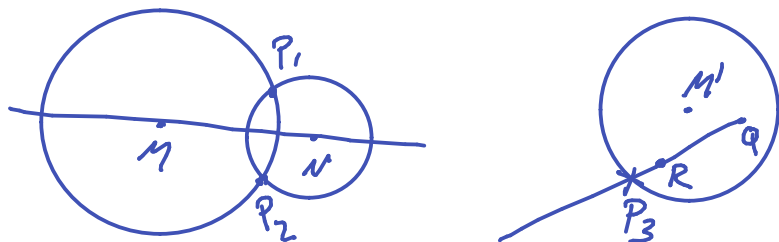
Warum sollten sich die beiden Kreise schneiden?

„ . . . “
— Euklid

Axiome (Kreis-Schnittpunkte).

1. Seien M_P und N_Q Kreise. Wenn M_P mindestens einen Punkt innerhalb von N_Q und einen Punkt außerhalb davon, dann haben M_P und N_Q in jedem Halbraum von MN einen eindeutigen Schnittpunkt.
2. Sei M_P ein Kreis und $\overrightarrow{QR}$ ein Strahl. Wenn Q im Innern von M_P liegt, dann haben M_P und $\overrightarrow{QR}$ einen eindeutigen Schnittpunkt.

Schnittpunkte



Axiome (Kreis-Schnittpunkte).

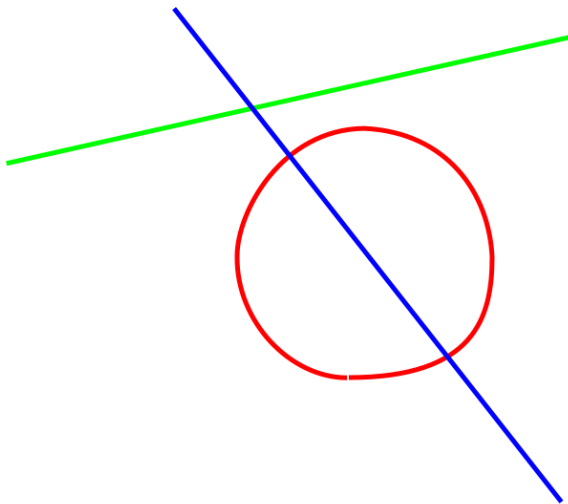
1. Seien M_P und N_Q Kreise. Wenn M_P mindestens einen Punkt innerhalb von N_Q und einen Punkt außerhalb davon, dann haben M_P und N_Q in jedem Halbraum von MN einen eindeutigen Schnittpunkt.
2. Sei M_P ein Kreis und $\overrightarrow{QR}$ ein Strahl. Wenn Q im Innern von M_P liegt, dann haben M_P und $\overrightarrow{QR}$ einen eindeutigen Schnittpunkt.

Exkurs: diskontinuierliche Geometrie

Warum muss man so etwas explizit fordern? Ist das nicht klar?

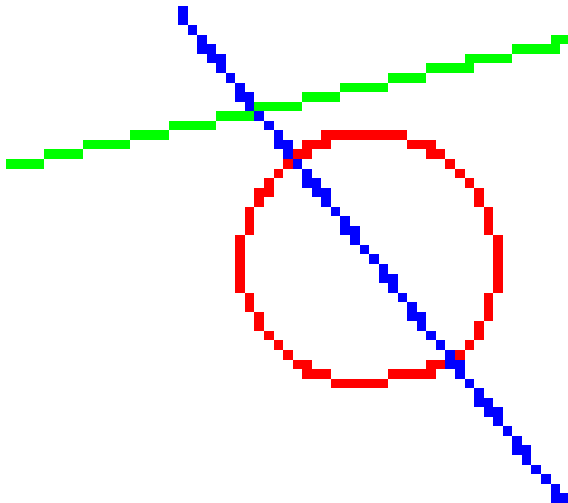
Exkurs: diskontinuierliche Geometrie

Warum muss man so etwas explizit fordern? Ist das nicht klar?



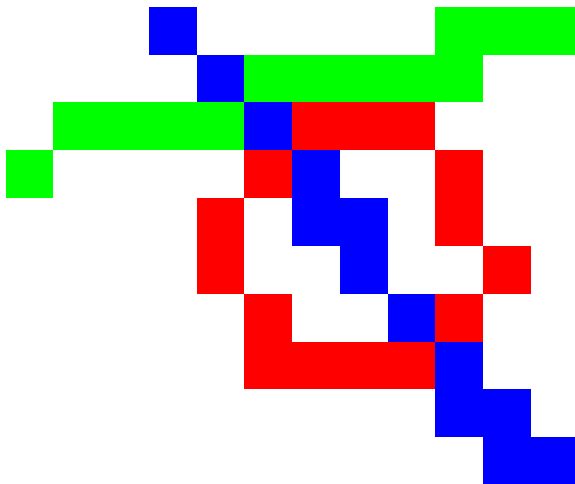
Exkurs: diskontinuierliche Geometrie

Warum muss man so etwas explizit fordern? Ist das nicht klar?



Exkurs: diskontinuierliche Geometrie

Warum muss man so etwas explizit fordern? Ist das nicht klar?

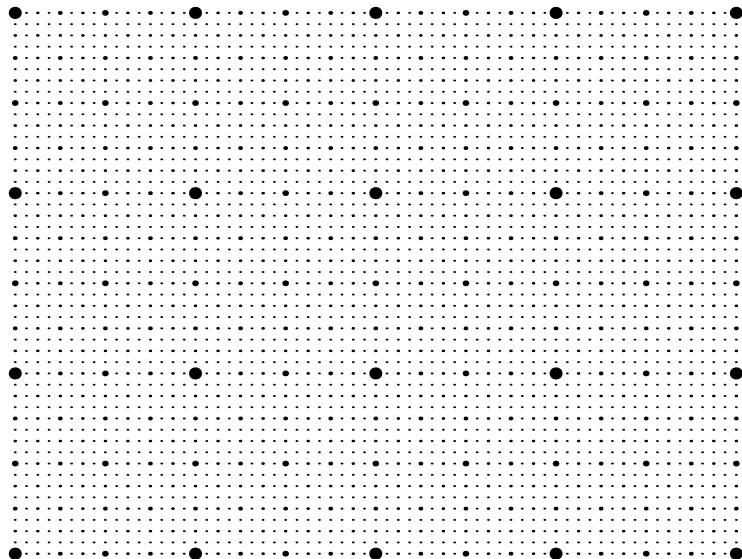


Exkurs: diskontinuierliche Geometrie

Warum muss man so etwas explizit fordern? Ist das nicht klar – wenn es unendlich viele Punkte gibt?

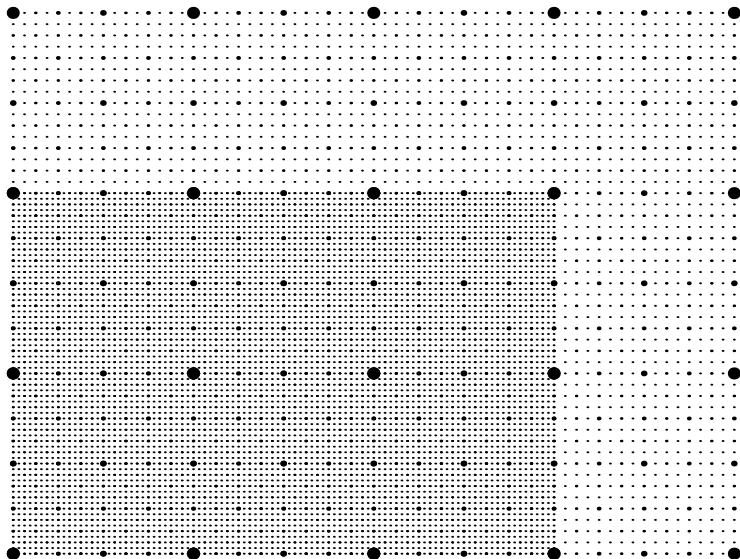
Exkurs: diskontinuierliche Geometrie

Warum muss man so etwas explizit fordern? Ist das nicht klar – wenn es unendlich viele Punkte gibt?



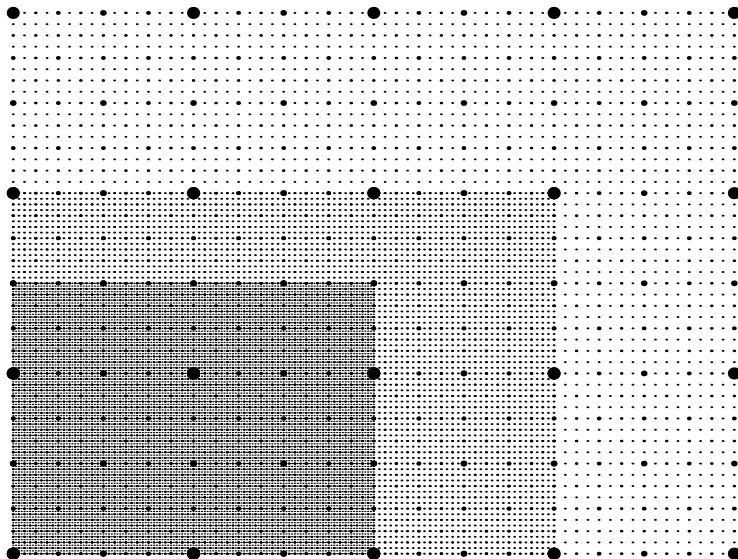
Exkurs: diskontinuierliche Geometrie

Warum muss man so etwas explizit fordern? Ist das nicht klar – wenn es unendlich viele Punkte gibt?



Exkurs: diskontinuierliche Geometrie

Warum muss man so etwas explizit fordern? Ist das nicht klar – wenn es unendlich viele Punkte gibt?



Geraden-Schnittpunkte

Erinnerung:

Axiom. Durch zwei verschiedene Punkte geht höchstens eine Gerade.

Geraden-Schnittpunkte

Erinnerung:

Axiom. Durch zwei verschiedene Punkte geht höchstens eine Gerade.

Anders ausgedrückt: Seien P und Q Punkte und g und h Geraden.

Wenn g und h durch P und Q gehen...

- ▶ und P und Q verschieden sind, dann sind g und h gleich.

Geraden-Schnittpunkte

Erinnerung:

Axiom. Durch zwei verschiedene Punkte geht höchstens eine Gerade.

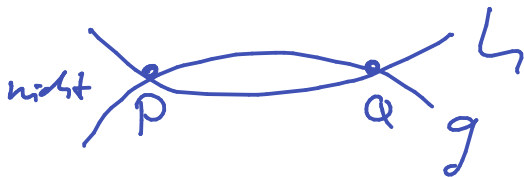
Anders ausgedrückt: Seien P und Q Punkte und g und h Geraden.

Wenn g und h durch P und Q gehen...

- ▶ und P und Q verschieden sind, dann sind g und h gleich.
- ▶ dann ist g und h gleich oder P und Q gleich.

$P=Q$:

PQ strabs,
aber wir
können über
irgendwelche
Geraden durch
 P und Q



Geraden-Schnittpunkte

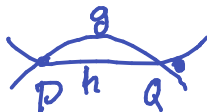
Erinnerung:

Axiom. Durch zwei verschiedene Punkte geht höchstens eine Gerade.

Anders ausgedrückt: Seien P und Q Punkte und g und h Geraden.

Wenn g und h durch P und Q gehen...

- ▶ und P und Q verschieden sind, dann sind g und h gleich.
- ▶ dann ist g und h gleich oder P und Q gleich.
- ▶ und g und h sind verschieden, dann sind P und Q gleich.



Geraden-Schnittpunkte

Erinnerung:

Axiom. Durch zwei verschiedene Punkte geht höchstens eine Gerade.

Anders ausgedrückt: Seien P und Q Punkte und g und h Geraden.

Wenn g und h durch P und Q gehen...

- ▶ und P und Q verschieden sind, dann sind g und h gleich.
- ▶ dann ist g und h gleich oder P und Q gleich.
- ▶ und g und h sind verschieden, dann sind P und Q gleich.

Folgerung. Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in höchstens einem Punkt.



Meta: Umkehrschluss (Kontraposition)

Aussage: Wenn A, dann B

Meta: Umkehrschluss (Kontraposition)

Aussage: Wenn A, dann B

Beispiel. A = der Wecker klingelt, B = ich wache auf

Wenn der Wecker klingelt, dann wache ich auf

Meta: Umkehrschluss (Kontraposition)

Aussage: Wenn A, dann B

Umkehrschluss: Wenn B, dann A?

Beispiel. A = der Wecker klingelt, B = ich wache auf

Wenn der Wecker klingelt, dann wache ich auf

Meta: Umkehrschluss (Kontraposition)

Aussage: Wenn A, dann B

Umkehrschluss: Wenn B, dann A?

Beispiel. A = der Wecker klingelt, B = ich wache auf

Wenn der Wecker klingelt, dann wache ich auf

Wenn ich aufwache, dann klingelt der Wecker

Meta: Umkehrschluss (Kontraposition)

Aussage: Wenn A, dann B

Umkehrschluss: Wenn nicht B, dann nicht A!

Beispiel. A = der Wecker klingelt, B = ich wache auf

Wenn der Wecker klingelt, dann wache ich auf

Wenn ich nicht aufwache, dann klingelt der Wecker nicht

Meta: Umkehrschluss (Kontraposition)

Aussage: Wenn A, dann B

Umkehrschluss: Wenn nicht B, dann nicht A!

Beispiel. A = der Wecker klingelt, B = ich wache auf

Wenn der Wecker klingelt, dann wache ich auf

Wenn ich nicht aufwache, dann klingelt der Wecker nicht

... denn wenn der Wecker klingeln würde, würde ich ja aufwachen.

Meta: Umkehrschluss (Kontraposition)

Aussage: Wenn A, dann B

Umkehrschluss: Wenn nicht B, dann nicht A!

Beispiel. A = der Wecker klingelt, B = ich wache auf

Wenn der Wecker klingelt, dann wache ich auf

Wenn ich weiter schlafe, dann klingelt der Wecker nicht

... denn wenn der Wecker klingeln würde, würde ich ja aufwachen.

Beispiel. A = g und h schneiden sich in mindestens zwei Punkten

B = g und h sind gleich

Wenn g und h sich in mindestens zwei Punkten schneiden, dann
sind g und h gleich.

Meta: Umkehrschluss (Kontraposition)

Aussage: Wenn A, dann B

Umkehrschluss: Wenn nicht B, dann nicht A!

Beispiel. A = der Wecker klingelt, B = ich wache auf

Wenn der Wecker klingelt, dann wache ich auf

Wenn ich weiter schlafe, dann klingelt der Wecker nicht

... denn wenn der Wecker klingeln würde, würde ich ja aufwachen.

Beispiel. A = g und h schneiden sich in mindestens zwei Punkten

B = g und h sind gleich

Wenn g und h sich in mindestens zwei Punkten schneiden, dann
sind g und h gleich.

Meta: Umkehrschluss (Kontraposition)

Aussage: Wenn A, dann B

Umkehrschluss: Wenn nicht B, dann nicht A!

Beispiel. A = der Wecker klingelt, B = ich wache auf

Wenn der Wecker klingelt, dann wache ich auf

Wenn ich weiter schlafe, dann klingelt der Wecker nicht

... denn wenn der Wecker klingeln würde, würde ich ja aufwachen.

Beispiel. A = g und h schneiden sich in mindestens zwei Punkten

B = g und h sind gleich

Wenn g und h sich in mindestens zwei Punkten schneiden, dann
sind g und h gleich.

Wenn g und h nicht gleich sind,

dann schneiden sich g und h nicht in mindestens zwei Punkten.

Meta: Umkehrschluss (Kontraposition)

Aussage: Wenn A, dann B

Umkehrschluss: Wenn nicht B, dann nicht A!

Beispiel. A = der Wecker klingelt, B = ich wache auf

Wenn der Wecker klingelt, dann wache ich auf

Wenn ich weiter schlafe, dann klingelt der Wecker nicht

... denn wenn der Wecker klingeln würde, würde ich ja aufwachen.

Beispiel. A = g und h schneiden sich in mindestens zwei Punkten

B = g und h sind gleich

Wenn g und h sich in mindestens zwei Punkten schneiden, dann
sind g und h gleich.

Wenn g und h verschieden sind,

dann schneiden sich g und h nicht in mindestens zwei Punkten.

Meta: Umkehrschluss (Kontraposition)

Aussage: Wenn A, dann B

Umkehrschluss: Wenn nicht B, dann nicht A!

Beispiel. A = der Wecker klingelt, B = ich wache auf

Wenn der Wecker klingelt, dann wache ich auf

Wenn ich weiter schlafe, dann klingelt der Wecker nicht

... denn wenn der Wecker klingeln würde, würde ich ja aufwachen.

Beispiel. A = g und h schneiden sich in mindestens zwei Punkten

B = g und h sind gleich

Wenn g und h sich in mindestens zwei Punkten schneiden, dann
sind g und h gleich.

Wenn g und h verschieden sind,

dann schneiden sich g und h in höchstens einem Punkten.

Geraden-Schnittpunkte

Erinnerung:

Axiom. Durch zwei verschiedene Punkte geht höchstens eine Gerade.

Anders ausgedrückt: Seien P und Q Punkte und g und h Geraden.

Wenn g und h durch P und Q gehen...

- ▶ und P und Q verschieden sind, dann sind g und h gleich.
- ▶ dann ist g und h gleich oder P und Q gleich.
- ▶ und g und h sind verschieden, dann sind P und Q gleich.

Folgerung. Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in höchstens einem Punkt.



Geraden-Schnittpunkte

Erinnerung:

Axiom. Durch zwei verschiedene Punkte geht höchstens eine Gerade.

Anders ausgedrückt: Seien P und Q Punkte und g und h Geraden.

Wenn g und h durch P und Q gehen...

- ▶ und P und Q verschieden sind, dann sind g und h gleich.
- ▶ dann ist g und h gleich oder P und Q gleich.
- ▶ und g und h sind verschieden, dann sind P und Q gleich.

Folgerung. Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in höchstens einem Punkt.

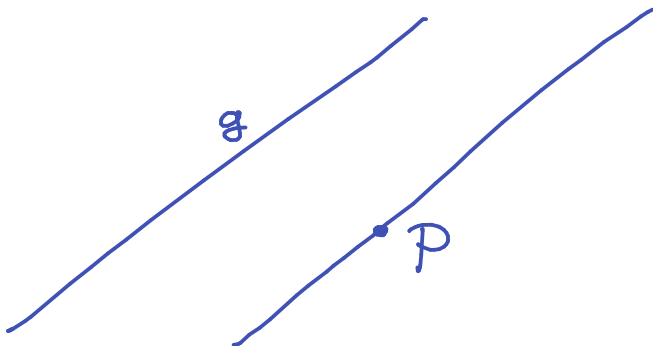
Zwei Geraden sind **parallel** wenn sie gleich sind oder keinen Schnittpunkt haben.

Parallelen-Axiom

Axiom (Parallelen-Axiom). Wenn g eine Gerade ist und P ein Punkt, dann existiert genau eine Gerade, die parallel zu g ist und durch P geht.

Mit anderen Worten:

Wenn P nicht auf g liegt, gibt es genau eine Gerade, die P enthält und g nicht schneidet.



Konstruktion von Parallelen

Problem. Gegeben eine Gerade g und einen Punkt P , der nicht auf g liegt, konstruiere die Gerade parallel zu g durch P .

Konstruktion von Parallelen

Problem. Gegeben eine Gerade g und einen Punkt P , der nicht auf g liegt, konstruiere die Gerade parallel zu g durch P .

Konstruktion. Wähle $A \in g$ beliebig. Sei B ein Schnittpunkt von AP mit g . Sei C der Schnittpunkt von P_A und B_A , der von A verschieden ist. Dann ist $h := PC$ die gewünschte Gerade. ◇

Konstruktion von Parallelen

Problem. Gegeben eine Gerade g und einen Punkt P , der nicht auf g liegt, konstruiere die Gerade parallel zu g durch P .

Konstruktion. Wähle $A \in g$ beliebig. Sei B ein Schnittpunkt von AP mit g . Sei C der Schnittpunkt von P_A und B_A , der von A verschieden ist. Dann ist $h := PC$ die gewünschte Gerade. ◇

Beweisversuch. Angenommen g und h würden sich in einem Punkt D schneiden. Dann wäre APD ein Dreieck mit einer Winkelsumme echt größer als 180° . Aber über Winkel haben wir noch nicht geredet... □

Exkurs: nicht-euklidische Geometrie

- ▶ Euklid versuchte zu zeigen, dass das Parallelen-Axiom aus den anderen Axiomen folgt,

Exkurs: nicht-euklidische Geometrie

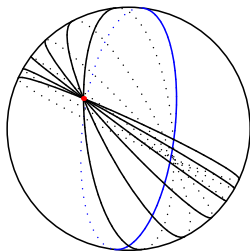
- ▶ Euklid versuchte zu zeigen, dass das Parallelen-Axiom aus den anderen Axiomen folgt, was ihm nicht gelang.

Exkurs: nicht-euklidische Geometrie

- ▶ Euklid versuchte zu zeigen, dass das Parallelen-Axiom aus den anderen Axiomen folgt, was ihm nicht gelang.
- ▶ Heute wissen wir, dass es Geometrien gibt, die verschiedenen Varianten des Parallelen-Axioms genügen:

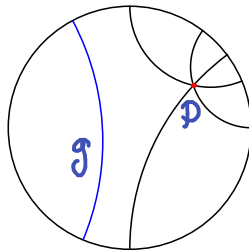
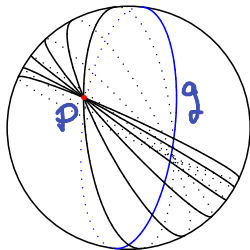
Exkurs: nicht-euklidische Geometrie

- ▶ Euklid versuchte zu zeigen, dass das Parallelen-Axiom aus den anderen Axiomen folgt, was ihm nicht gelang.
- ▶ Heute wissen wir, dass es Geometrien gibt, die verschiedenen Varianten des Parallelen-Axioms genügen:
 - ▶ Jede Gerade durch P schneidet $g \rightsquigarrow$ projektive Geometrie.



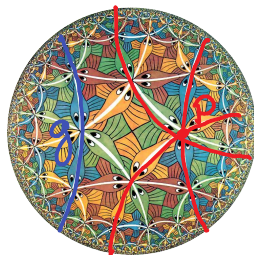
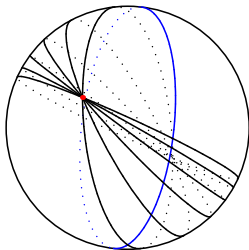
Exkurs: nicht-euklidische Geometrie

- ▶ Euklid versuchte zu zeigen, dass das Parallelen-Axiom aus den anderen Axiomen folgt, was ihm nicht gelang.
- ▶ Heute wissen wir, dass es Geometrien gibt, die verschiedenen Varianten des Parallelen-Axioms genügen:
 - ▶ Jede Gerade durch P schneidet $g \rightsquigarrow$ projektive Geometrie.
 - ▶ Unendlich viele Geraden durch P schneiden g nicht $\rightsquigarrow$ hyperbolische Geometrie.



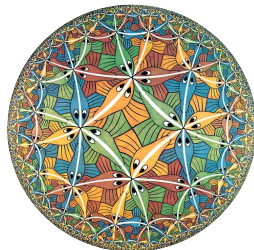
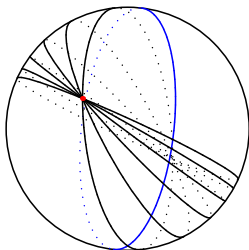
Exkurs: nicht-euklidische Geometrie

- ▶ Euklid versuchte zu zeigen, dass das Parallelen-Axiom aus den anderen Axiomen folgt, was ihm nicht gelang.
- ▶ Heute wissen wir, dass es Geometrien gibt, die verschiedenen Varianten des Parallelen-Axioms genügen:
 - ▶ Jede Gerade durch P schneidet $g \rightsquigarrow$ projektive Geometrie.
 - ▶ Unendlich viele Geraden durch P schneiden g nicht $\rightsquigarrow$ hyperbolische Geometrie.



Exkurs: nicht-euklidische Geometrie

- ▶ Euklid versuchte zu zeigen, dass das Parallelen-Axiom aus den anderen Axiomen folgt, was ihm nicht gelang.
- ▶ Heute wissen wir, dass es Geometrien gibt, die verschiedenen Varianten des Parallelen-Axioms genügen:
 - ▶ Jede Gerade durch P schneidet $g \rightsquigarrow$ projektive Geometrie.
 - ▶ Unendlich viele Geraden durch P schneiden g nicht $\rightsquigarrow$ hyperbolische Geometrie.
- ▶ Es ist also unmöglich, dass Parallelen-Axiom aus den anderen Axiomen abzuleiten, und zeugt von Euklids logischer Strenge.



Definiere $\varphi^{-1}(y)$:

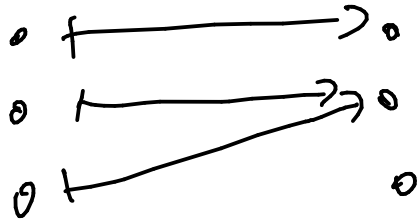
Surjektivität: es existiert ein $x \in X$ mit
 $\varphi(x) = y$.

Setze $\varphi^{-1}(y) = x$.

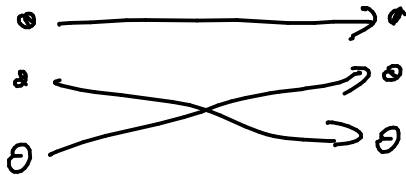
Injektivität: garantiert, dass x eindeutig
bestimmt ist.

$\varphi(x) = y$ genau dann, wenn $\varphi^{-1}(y) = x$.
 $\underline{\underline{\quad}}$

Bsp. weder injektiv, noch surjektiv:



Bsp. bijektiv

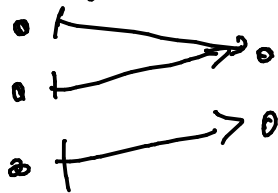


bijektiv $\Leftrightarrow$ injektiv u. surjectiv

$\Leftrightarrow$ für jedes $y \in Y$ existiert genau ein $x \in X$ mit $\varphi(x) = y$

Dann existiert $\varphi^{-1}: Y \rightarrow X$ mit $\varphi^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = \varphi(x)$ 

Bsp. surj., aber nicht bij.



Bsp. inj., aber nicht bij.

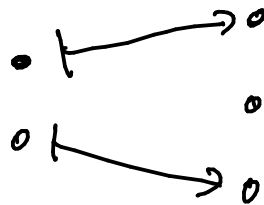
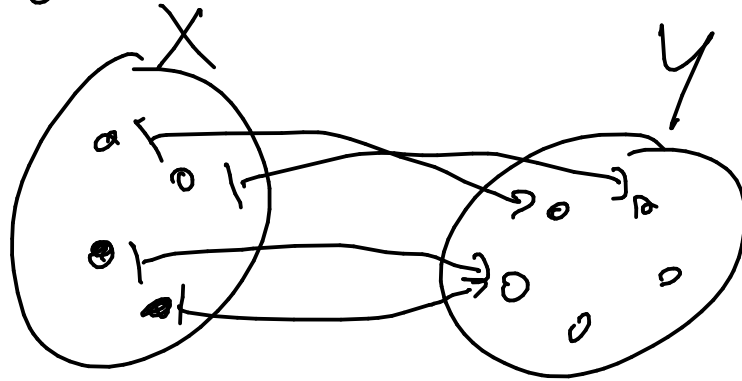


Abbildung: $\varphi: X \rightarrow Y$



injektiv: nicht $\varphi(x) = \varphi(x')$
für $x \neq x'$

Wenn $x \neq x'$, dann $\varphi(x) \neq \varphi(x')$

surjektiv:

→ für jedes $y \in Y$ existiert
ein $x \in X$ mit $\varphi(x) = y$

Bewegungen

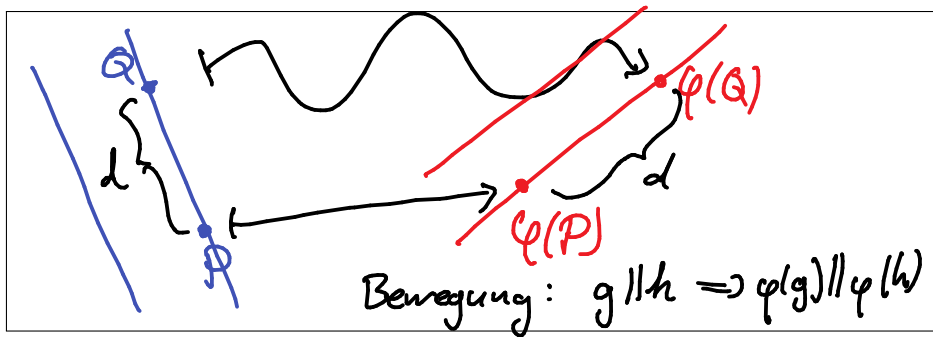
Eine *Bewegung* ist eine bijektive Abbildung $\varphi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ die den Abstand erhält: $|\varphi(P)\varphi(Q)| = |PQ|$.

Bewegungen bilden (parallele) Geraden auf (parallele) Geraden und Kreise auf Kreise ab.

Ein Punkt P heißt *Fixpunkt* von φ wenn er invariant ist: $\varphi(P) = P$.

Die Menge aller Fixpunkte einer Bewegung φ ist seine *Fixpunktmenge*.

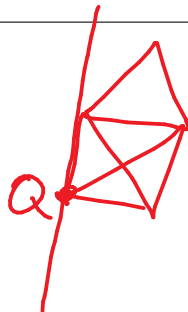
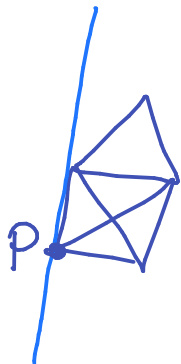
Die *Identität* id lässt jeden Punkt wo er ist: alle Punkte sind Fixpunkte.



Verschiebungen

Eine *Translation* (Verschiebung) ist eine Bewegung, die keinen Fixpunkt hat und jede Gerade auf eine parallele Gerade abbildet. Per Definition ist auch die Identität eine Translation.

Axiom. Gegeben zwei Punkte P und Q existiert genau eine Translation τ mit $\tau(P) = Q$.



Translation: $g' \parallel \tau(g)$

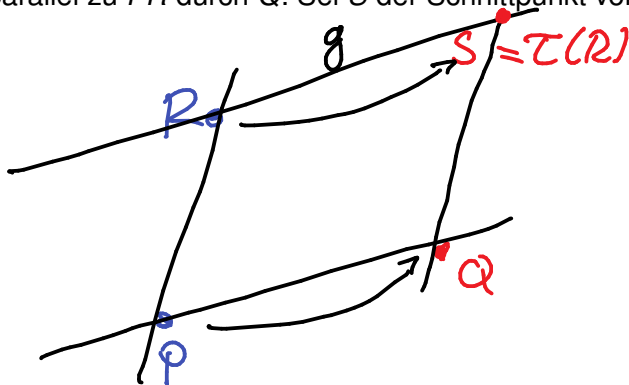
Konstruktion von Verschiebungen

Problem. Gegeben Punkte P , Q und R , die nicht kollinear sind.
Konstruiere $S := \tau(R)$ wobei τ die Translation ist, die P auf Q abbildet.

Konstruktion von Verschiebungen

Problem. Gegeben Punkte P , Q und R , die nicht kollinear sind.
Konstruiere $S := \tau(R)$ wobei τ die Translation ist, die P auf Q abbildet.

Konstruktion. Sei g die Gerade parallel zu PQ durch R und h die Gerade parallel zu PR durch Q . Sei S der Schnittpunkt von g und h . ◇



Konstruktion von Verschiebungen

Problem. Gegeben Punkte P , Q und R , die nicht kollinear sind.
Konstruiere $S := \tau(R)$ wobei τ die Translation ist, die P auf Q abbildet.

Konstruktion. Sei g die Gerade parallel zu PQ durch R und h die Gerade parallel zu PR durch Q . Sei S der Schnittpunkt von g und h . ◇

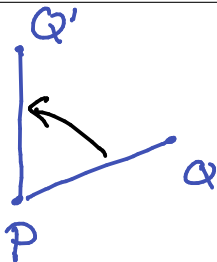
Beweis. Da τ eine Verschiebung ist, ist $\tau(PQ) \parallel PQ$. Diese beiden parallelen Geraden schneiden sich aber in $\tau(P) = Q$, sind also gleich. Es folgt, dass auch g auf eine parallele Gerade abgebildet wird: weil τ eine Bewegung ist und $g \parallel PQ$, ist $\tau(g) \parallel \tau(PQ)$, also $g \parallel PQ = \tau(PQ) \parallel \tau(g)$. Tatsächlich wird g auf sich selbst abgebildet, weil τ sonst einen Fixpunkt hätte [Abkürzung]. Weil τ eine Bewegung ist, wird außerdem PR auf die dazu parallele Gerade durch $\tau(P) = Q$ abgebildet, also auf h . Damit der Schnittpunkt R von g und PR auf den Schnittpunkt S von g und h abgebildet. □

$g = \tau g$

Drehungen

Eine Bewegung ist eine *Rotation* (Drehung) sie genau einen Fixpunkt hat. Wieder gilt auch die Identität als Rotation.

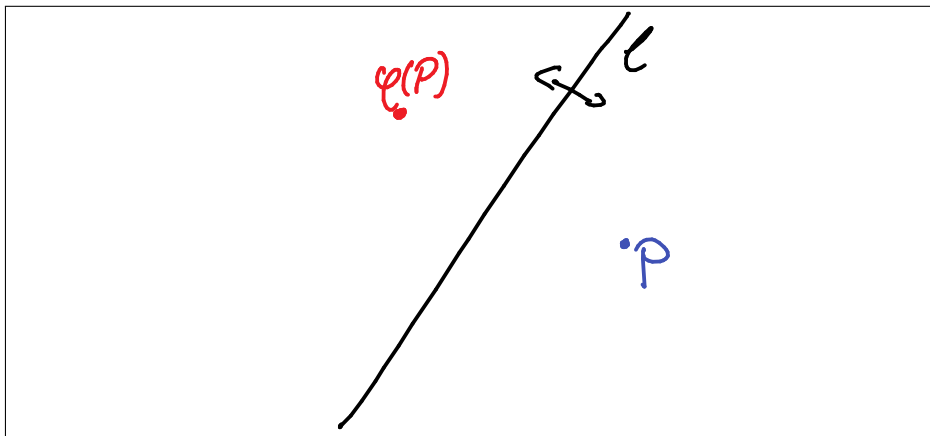
Axiom. Gegeben drei Punkte P , Q und Q' mit $|PQ| = |PQ'|$ existiert genau eine Rotation ρ mit $\rho(P) = P$ und $\rho(Q) = Q'$.



Spiegelungen

Eine Bewegung ist eine *Reflektion* (Spiegelung) es eine Gerade gibt, wenn ihre Fixpunktmenge eine Gerade ist.

Axiom. Gegeben eine Gerade ℓ gibt es genau eine Spiegelung σ , deren Fixpunktmenge die Gerade ℓ ist.



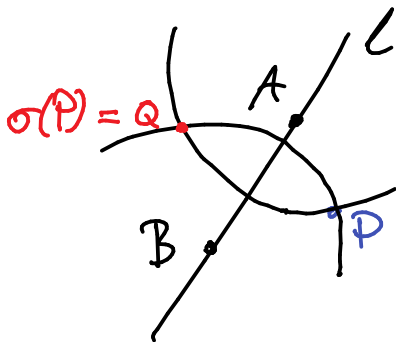
Konstruktion von Spiegelungen

Problem. Gegeben eine Gerade ℓ und einen Punkt P . Konstruiere $Q := \sigma(P)$ wobei σ die Spiegelung an ℓ ist.

Konstruktion von Spiegelungen

Problem. Gegeben eine Gerade ℓ und einen Punkt P . Konstruiere $Q := \sigma(P)$ wobei σ die Spiegelung an ℓ ist.

Konstruktion. Seien A und B auf ℓ beliebig aber verschieden. Sei Q der von P verschiedene (oder der einzige) Schnittpunkt von A_P und B_P . $\diamond$

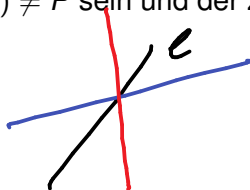


Konstruktion von Spiegelungen

Problem. Gegeben eine Gerade ℓ und einen Punkt P . Konstruiere $Q := \sigma(P)$ wobei σ die Spiegelung an ℓ ist.

Konstruktion. Seien A und B auf ℓ beliebig aber verschieden. Sei Q der von P verschiedene (oder der einzige) Schnittpunkt von A_P und B_P . $\diamond$

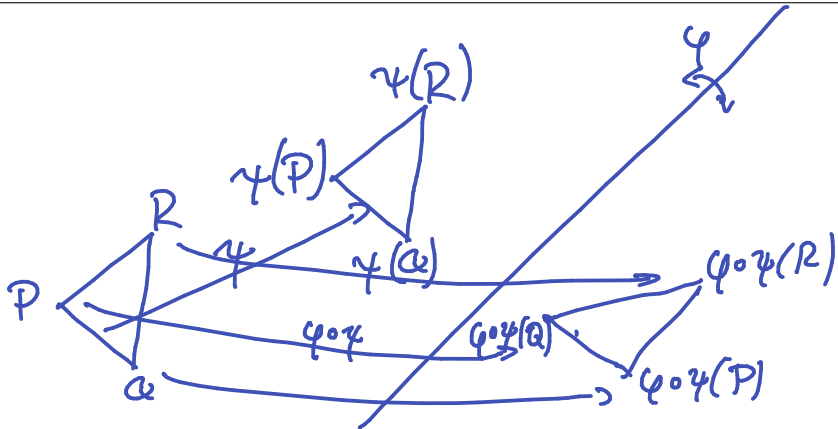
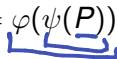
Beweis. Da σ eine Isometrie ist und A und B Fixpunkte, muss $|\sigma(P)\sigma(A)| = |\sigma(P)A| = |PA|$ sein und analog für Q . Also ist $\sigma(P)$ ein Schnittpunkt von A_P und B_P . Wenn $P \in \ell$ ist P ein Fixpunkt von σ und der einzige Schnittpunkt von A_P und B_P . Andernfalls ist P kein Fixpunkt von σ , also muss $\sigma(P) \neq P$ sein und der zweite Schnittpunkt der beiden Kreise. $\square$



Verknüpfung von Bewegungen (Komposition)

Die Verknüpfung von zwei Bewegungen $\varphi \circ \psi$ führt erst die eine aus, dann die andere: $(\varphi \circ \psi)(P) = \varphi(\psi(P))$.

" φ nach ψ "

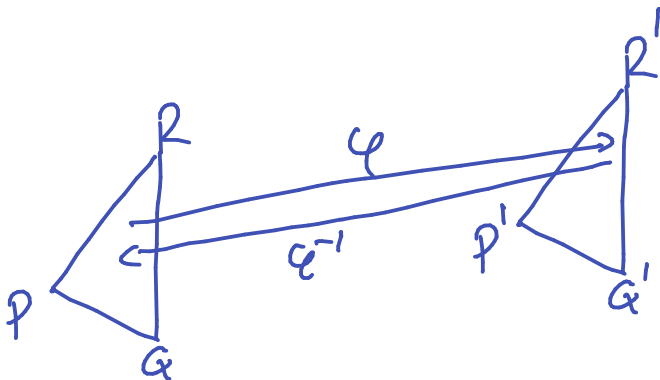


Verknüpfung von Bewegungen

Die *Verknüpfung* von zwei Bewegungen $\varphi \circ \psi$ führt erst die eine aus, dann die andere: $(\varphi \circ \psi)(P) = \varphi(\psi(P))$.

Jede Bewegung φ hat eine *Inverse* φ^{-1} die ihre Wirkung rückgängig macht: $\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{id} = \varphi^{-1} \circ \varphi$.

$$\varphi(\varphi^{-1}(P)) = P$$



Proposition. $(\varphi \circ \psi)^{-1} = \psi^{-1} \circ \varphi^{-1}$

Bew. $(\psi^{-1} \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi) = \psi^{-1} \circ \underbrace{(\varphi^{-1} \circ \varphi)}_{=id} \circ \psi$

$$= \psi^{-1} \circ id \circ \psi$$

$$= \psi^{-1} \circ \psi$$

$$= id$$

$$(\varphi \circ \psi) \circ (\psi^{-1} \circ \varphi^{-1}) = \varphi \circ (\psi \circ \psi^{-1}) \circ \varphi^{-1}$$

$$= \varphi \circ \varphi^{-1}$$

$$= id$$

□

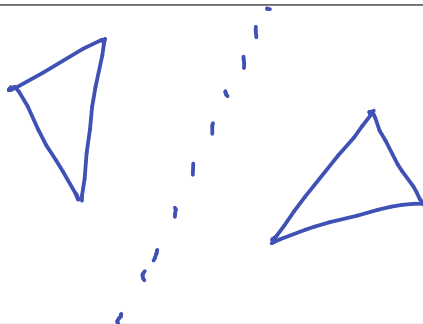
Kongruenz

Zwei Figuren (Segmente, Dreiecke, Vierecke, Winkel, Kreise, ...)

f und f' sind **kongruent**, geschrieben $f \equiv f'$, wenn es eine Bewegung φ gibt, die f auf f' abbildet: $\varphi(f) = f'$.

Dann gibt es auch eine Bewegung, die f' auf f abbildet, nämlich φ^{-1} .

Wenn f und f' kongruent sind (durch die Abbildung φ) und f' und f'' kongruent sind (durch die Abbildung ψ), dann sind f und f'' kongruent (durch die Abbildung $\psi \circ \varphi$).



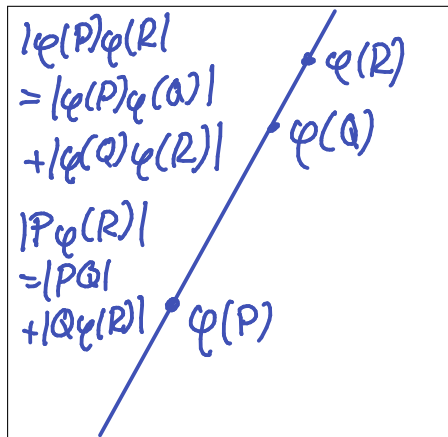
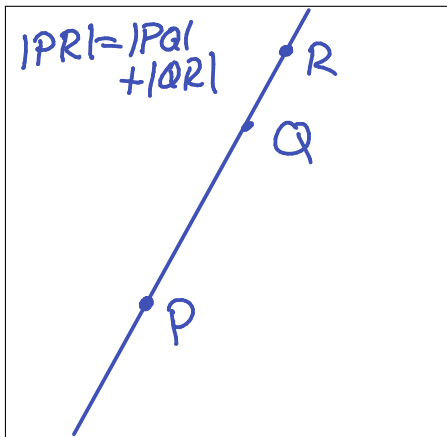
Eindeutigkeit von Bewegungen

Proposition. Die Fixpunktmenge einer Bewegung φ ist entweder leer, ein einziger Punkt, eine Gerade, oder die ganze Ebene.

Eindeutigkeit von Bewegungen

Proposition. Die Fixpunktmenge einer Bewegung φ ist entweder leer, ein einziger Punkt, eine Gerade, oder die ganze Ebene.

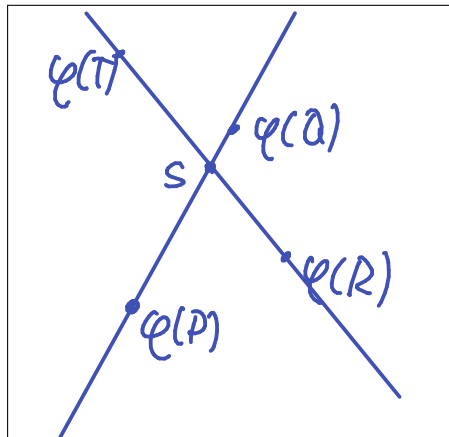
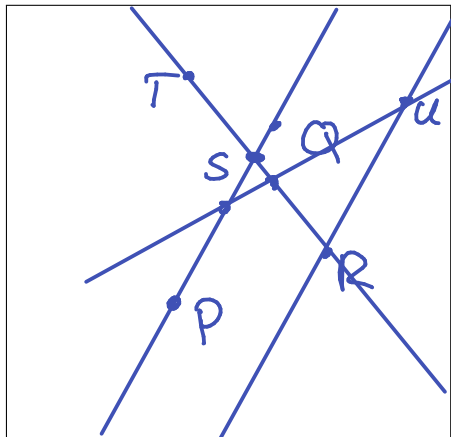
Beweis. Schritt 1: wenn P und Q Fixpunkte von φ sind, dann ist jeder Punkt auf PQ ein Fixpunkt.



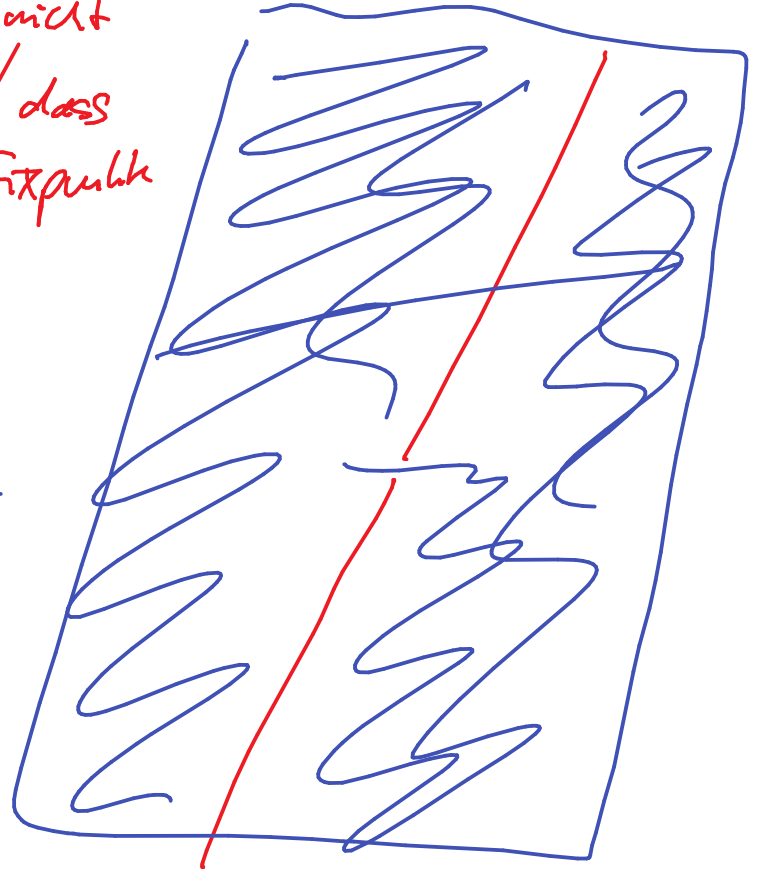
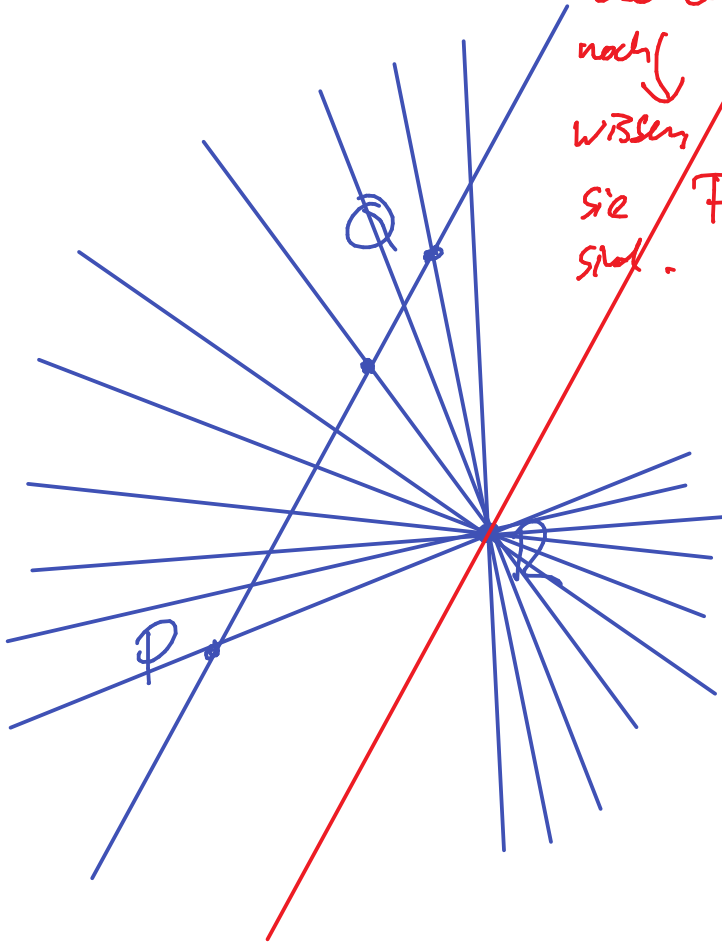
Eindeutigkeit von Bewegungen

Proposition. Die Fixpunktmenge einer Bewegung φ ist entweder leer, ein einziger Punkt, eine Gerade, oder die ganze Ebene.

Beweis. Schritt 2: wenn alle Punkte auf PQ und außerdem R Fixpunkte von φ sind, dann ist jeder Punkt ein Fixpunkt. □



Punkte von
denen wir
noch nicht
wissen, dass
sie Fixpunkte
sind.



Bewegungen und Dreiecke I

Folgerung. Wenn PQR ein Dreieck ist und φ und ψ Bewegungen mit $\varphi(P) = \psi(P)$, $\varphi(Q) = \psi(Q)$, $\varphi(R) = \psi(R)$, dann ist $\varphi = \psi$.

Bewegungen und Dreiecke I

Folgerung. Wenn PQR ein Dreieck ist und φ und ψ Bewegungen mit $\varphi(P) = \psi(P)$, $\varphi(Q) = \psi(Q)$, $\varphi(R) = \psi(R)$, dann ist $\varphi = \psi$.

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= \psi(P) \\ \psi^{-1}(\varphi(P)) &= \psi^{-1}(\psi(P)) = P \\ (\psi^{-1} \circ \varphi)(P) &= P\end{aligned}$$

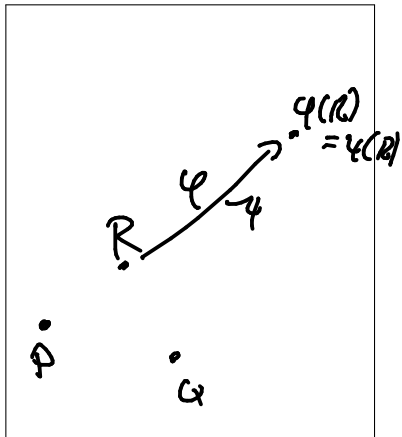
Beweis. Die Bewegung $\psi^{-1} \circ \varphi$ hat drei nicht kollineare Fixpunkte P, Q, R .

Nach der Proposition ist jeder Punkt ein Fixpunkt.

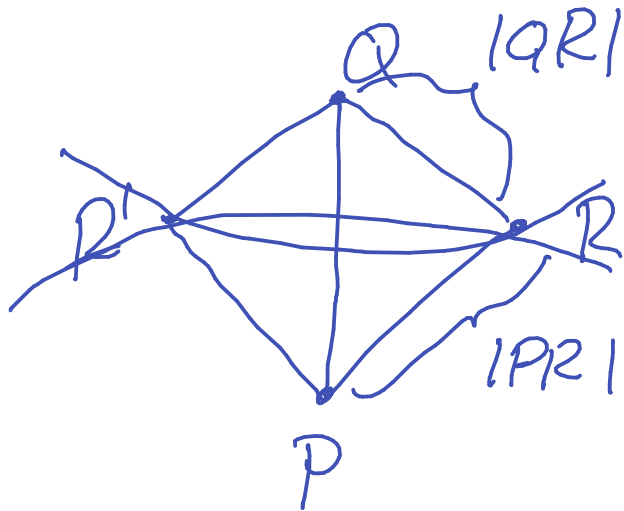
Also $\psi^{-1} \circ \varphi = \text{id}$, das heißt $\psi = \varphi$. $\square$

$$\psi^{-1} \circ \varphi = \text{id}$$

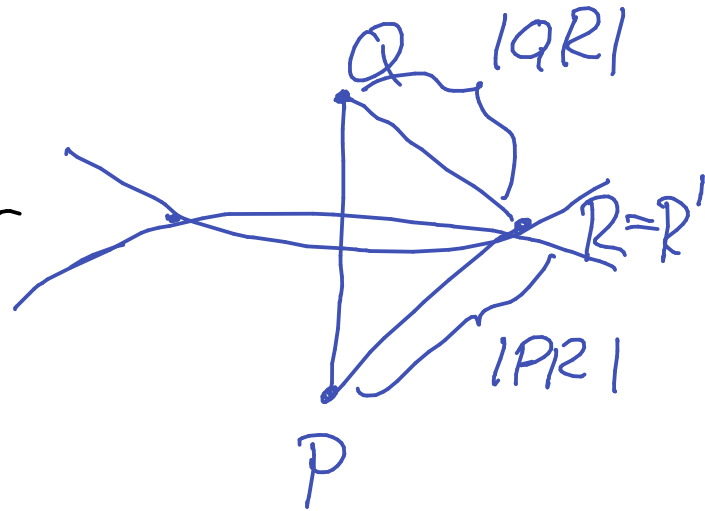
$$\varphi = \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi = \psi \circ \text{id} = \psi$$



Nach Verschiebung und Drehung



oder



(P_R und Q_R schneiden sich in zwei Punkten).

Bewegungen und Dreiecke II

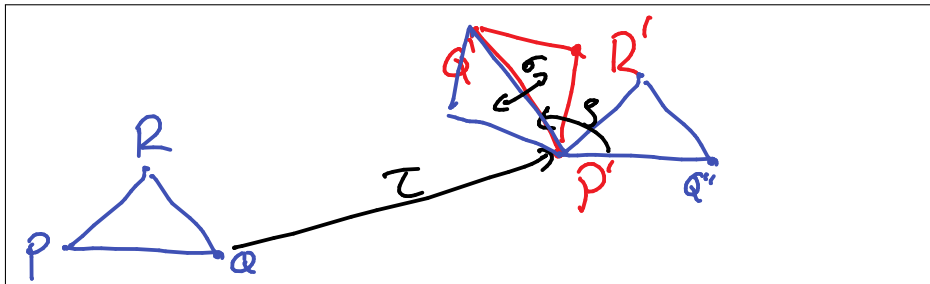
Satz (Kongruenzsatz „SSS“). Wenn PQR und $P'Q'R'$ Dreiecke sind, so dass $|PQ| = |P'Q'|$, $|QR| = |Q'R'|$ und $|PR| = |P'R'|$, dann existiert eine Bewegung φ mit $\varphi(PQR) = P'Q'R'$. Das heißt, PQR und $P'Q'R'$ sind kongruent.

Beweis. Sei τ eine Translation, die P auf P' abbildet.

Sei ρ eine Rotation, die P' fest hält und $\tau(Q)$ auf Q' abbildet.

Sei σ die Spiegelung an $P'Q'$ falls $\rho(\tau(R)) \neq R'$. Falls nicht, sei $\sigma = \text{id}$.

Dann funktioniert $\varphi = \sigma \circ \rho \circ \tau$. □



Bewegungen und Dreiecke II

Satz (Kongruenzsatz „SSS“). Wenn PQR und $P'Q'R'$ Dreiecke sind, so dass $|PQ| = |P'Q'|$, $|QR| = |Q'R'|$ und $|PR| = |P'R'|$, dann existiert eine Bewegung φ mit $\varphi(PQR) = P'Q'R'$. Das heißt, PQR und $P'Q'R'$ sind kongruent.

Folgerung. Zwei Segmente $\overline{PQ}$ und $\overline{P'Q'}$ sind kongruent genau dann, wenn $|PQ| = |P'Q'|$.

Beweis. Dass kongruente Segmente die gleiche Länge haben müssen, ist klar. Umgekehrt zeigt der Satz, dass gleich lange Segmente kongruent sind. □

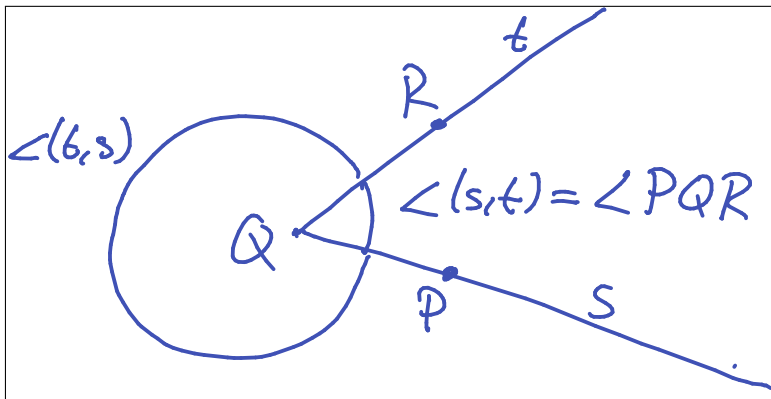
$$\overline{PQ} \equiv \overline{P'Q'} \quad \text{sagt das gleiche } |PQ| = |P'Q'|$$

Winkel

Ein *Winkel* $\angle(s, t)$ besteht aus zwei Strahlen s und t , die denselben Ausgangspunkt Q haben.

Die Strahlen s und t heißen *Schenkel*, der Punkt Q *Scheitel* des Winkels.

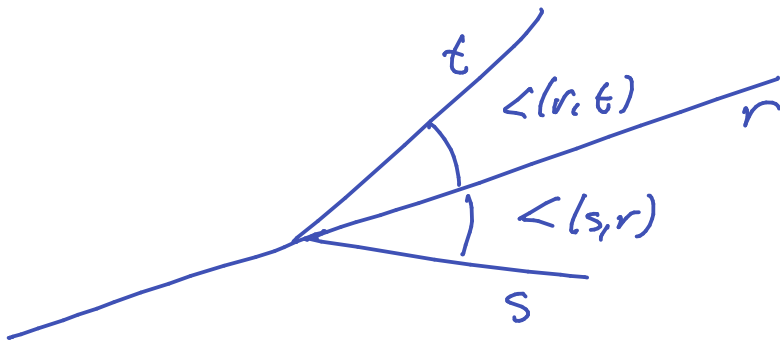
Wenn $s = \overrightarrow{QP}$ und $t = \overrightarrow{QR}$ schreiben wir auch $\angle PQR = \angle(s, t)$.



Winkelhalbierende

Problem. Gegeben einen Winkel $\angle(s, t)$, konstruiere einen Strahl r , so dass $\angle(s, r) = \angle(r, t)$ und $\angle(r, t)$ kongruent sind.

Die Gerade, die r enthält, ist die Winkelhalbierende von $\angle(s, t)$.



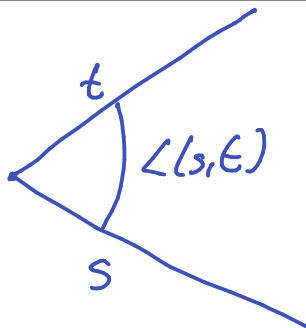
Winkelhalbierende

Problem. Gegeben einen Winkel $\angle(s, t)$, konstruiere einen Strahl r , so dass $\angle(s, r) = \angle(r, t)$ und $\angle(r, t)$ kongruent sind.

Die Gerade, die r enthält, ist die *Winkelhalbierende* von $\angle(s, t)$.

Folgerung. Die Winkel $\angle(s, t)$ und $\angle(t, s)$ sind kongruent zueinander.

Beweis. Die Spiegelung an der Winkelhalbierenden bildet $\angle(s, t)$ auf $\angle(t, s)$ ab. □

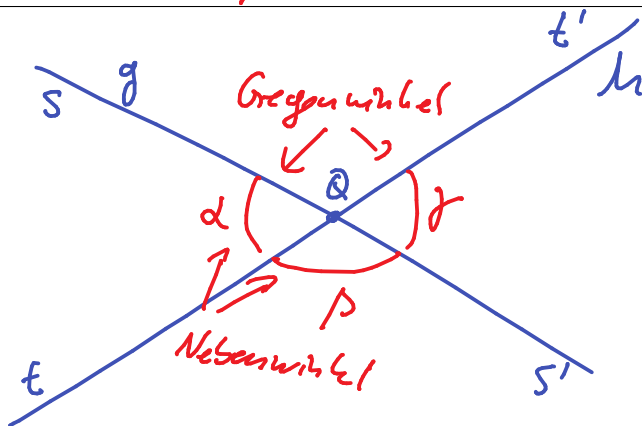


Nebenwinkel, Gegenwinkel

Seien g und h Geraden, die sich in einem Punkt Q schneiden. Seien s und s' die Strahlen ab Q in g . Seien t und t' die Strahlen ab Q in h .

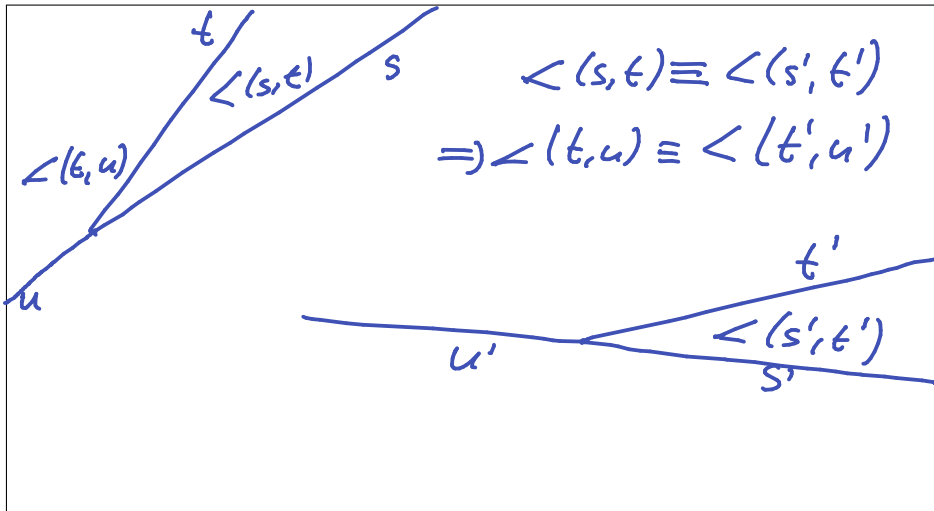
Die Winkel $\angle(s, t)$ und $\angle(t, s')$ sind *Nebenwinkel*.

Die Winkel $\angle(s, t)$ und $\angle(s', t')$ sind *Gegenwinkel*.



Nebenwinkel

Proposition. Nebenwinkel von kongruenten Winkeln sind kongruent.



Nebenwinkel

Proposition. Nebenwinkel von kongruenten Winkeln sind kongruent.

Beweis. Seien $\angle(s, t)$ und $\angle(s', t')$ kongruente Winkel.

Sei φ eine Bewegung, die $\angle(s, t)$ auf $\angle(s', t')$ abbildet.

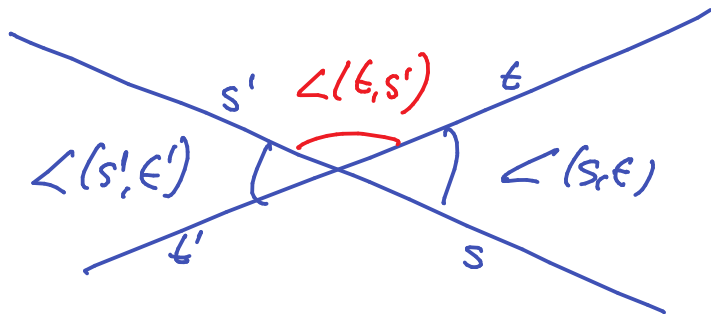
Sei u der zu s komplementäre Strahl und u' der zu s' komplementäre.

Dann bildet φ den eindeutigen zu s komplementären Strahl u auf den eindeutigen zu s' komplementären Strahl u' ab: $\varphi(u) = u'$.

Also bildet φ den Winkel $\angle(t, u)$ auf $\angle(t', u')$ ab. □

Gegenwinkel

Folgerung. Gegenwinkel sind zueinander kongruent.



$$\angle(s, t) \equiv \angle(s', t')$$

Gegenwinkel

Folgerung. Gegenwinkel sind zueinander kongruent.

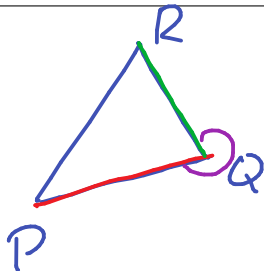
Beweis. Seien $\angle(s, t)$ und $\angle(s', t')$ Gegenwinkel.

Die Winkel $\angle(t, s')$ und $\angle(t, s')$ sind Nebenwinkel dieser Winkel.

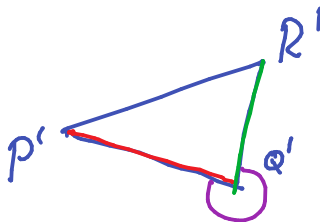
Sie sind zueinander kongruent, also sind auch ihre Gegenwinkel kongruent. □

Zweiter Kongruenzsatz

Satz (Kongruenzsatz „SWS“). Wenn PQR und $P'Q'R'$ Dreiecke sind mit $|PQ| = |P'Q'|$ und $|QR| = |Q'R'|$ und wenn $\angle PQR$ kongruent ist zu $\angle P'Q'R'$, dann ist PQR kongruent zu $P'Q'R'$.



es ex. Bewegung
 $\overrightarrow{QP} \rightarrow \overrightarrow{Q'P'}$
 $\overrightarrow{QR} \rightarrow \overrightarrow{Q'R'}$



Zweiter Kongruenzsatz

Satz (Kongruenzsatz „SWS“). Wenn PQR und $P'Q'R'$ Dreiecke sind mit $|PQ| = |P'Q'|$ und $|QR| = |Q'R'|$ und wenn $\angle PQR$ kongruent ist zu $\angle P'Q'R'$, dann ist PQR kongruent zu $P'Q'R'$.

Beweis. Sei φ eine Bewegung, die $\angle PQR$ auf $\angle P'Q'R'$ abbildet. Dann bildet φ den Punkt P auf P' ab:

P ist der eindeutigen Punkt auf $\overrightarrow{QP}$ mit Abstand $|QP|$ von Q ;

P' ist der eindeutige Punkt auf $\overrightarrow{Q'P'}$ mit Abstand $|Q'P'| = |QP|$ von Q' .

Ein analoges Argument zeigt, dass $\varphi(R) = R'$. □

Weitere Kongruenzsätze

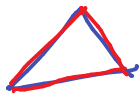
Satz (Kongruenzsätze). Wenn PQR und $P'Q'R'$ Dreiecke sind mit

(WSW) $|PQ| = |P'Q'|$, $\angle QPR \equiv \angle Q'P'R'$ und $\angle PQR \equiv \angle P'Q'R'$ oder

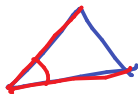
(WWS) $|PQ| = |P'Q'|$, $\angle QPR \equiv \angle Q'P'R'$ und $\angle QRP \equiv \angle Q'R'P'$ oder

~~(WSS) $|PQ| = |P'Q'|$, $|QR| = |Q'R'|$ und $\angle QPR \equiv \angle Q'P'R'$~~

dann ist PQR kongruent zu $P'Q'R'$.



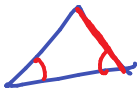
SSS



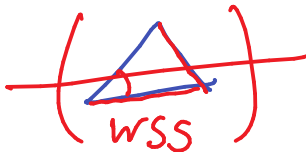
SWS



WSW



WSW

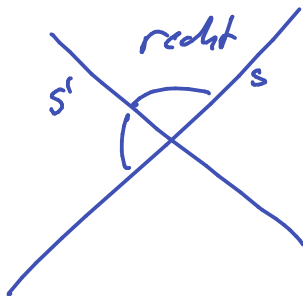
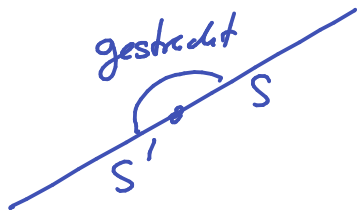


~~WSS~~

Gestreckte und rechte Winkel

Der Winkel $\angle(s, s')$ zwischen zwei Strahlen s und s' die eine Gerade bilden ist ein *gestreckter Winkel*.

Ein Winkel der kongruent zu einem Nebenwinkel ist, ist ein *rechter Winkel*.



Gestreckte und rechte Winkel

Der Winkel $\angle(s, s')$ zwischen zwei Strahlen s und s' die eine Gerade bilden ist ein *gestreckter Winkel*.

Ein Winkel der kongruent zu einem Nebenwinkel ist, ist ein *rechter Winkel*.

Aus der Eindeutigkeit von Spiegelungen folgt:

Proposition. Rechte Winkel sind kongruent zueinander.

Winkel messen

Wir ordnen Winkeln eine Gradzahl zwischen 0° und 180° zu:

Ein trivialer Winkel $\angle(s, s)$ misst 0° .

Ein rechter Winkel misst 90° .

Ein gestreckter Winkel misst 180° .

Winkel messen

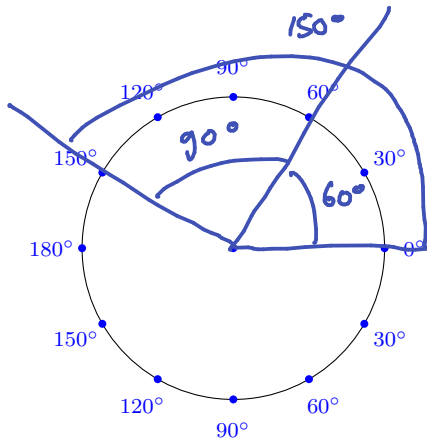
Wir ordnen Winkeln eine Gradzahl zwischen 0° und 180° zu:

Ein trivialer Winkel $\angle(s, s)$ misst 0° .

Ein rechter Winkel misst 90° .

Ein gestreckter Winkel misst 180° .

Die Summe von zwei Winkeln,
die x° und y° messen, misst $(x + y)^\circ$,
vorausgesetzt $x + y \leq 180$.



Winkel messen

Wir ordnen Winkeln eine Gradzahl zwischen 0° und 180° zu:

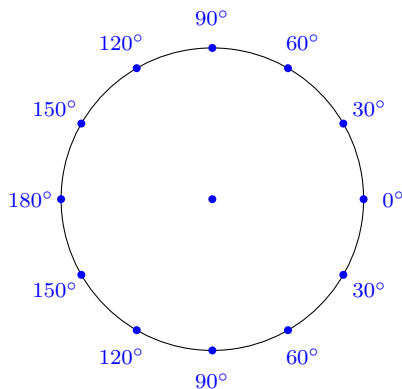
Ein trivialer Winkel $\angle(s, s)$ misst 0° .

Ein rechter Winkel misst 90° .

Ein gestreckter Winkel misst 180° .

Die Summe von zwei Winkeln,
die x° und y° messen, misst $(x + y)^\circ$,
vorausgesetzt $x + y \leq 180$.

Kleinere Winkel messen
kleinere Gradzahlen.



Winkel messen

Wir ordnen Winkeln eine Gradzahl zwischen 0° und 180° zu:

Ein trivialer Winkel $\angle(s, s)$ misst 0° .

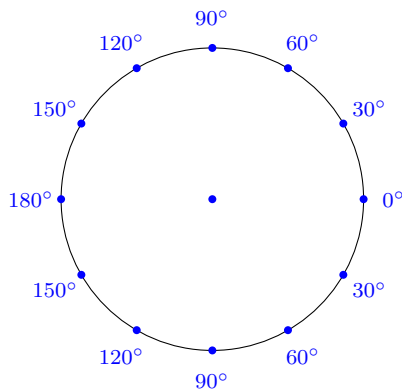
Ein rechter Winkel misst 90° .

Ein gestreckter Winkel misst 180° .

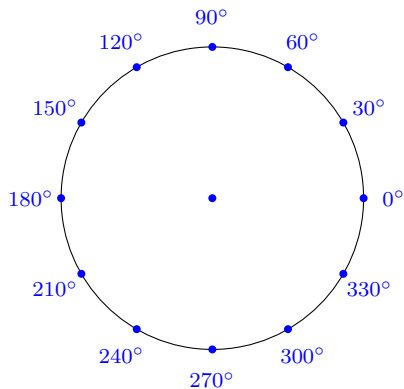
Die Summe von zwei Winkeln,
die x° und y° messen, misst $(x + y)^\circ$,
vorausgesetzt $x + y \leq 180$.

Kleinere Winkel messen
kleinere Gradzahlen.

Wir schreiben einfach $\angle(s, t) = x^\circ$.

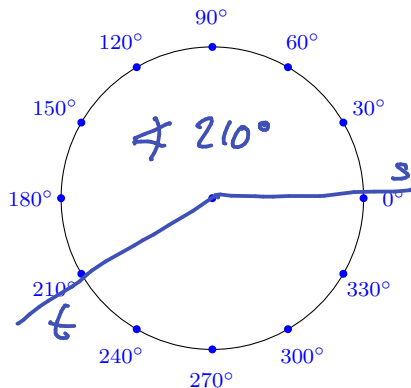


Winkel messen (algebraisch)



Winkel messen (algebraisch)

Wenn wir den Winkel zwischen zwei Strahlen s und t im Gegenurzeigersinn messen, können wir ihm eine Zahl zwischen 0° und 360° zuordnen.

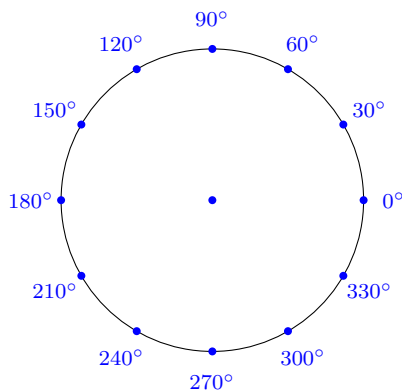


Winkel messen (algebraisch)

Wenn wir den Winkel zwischen zwei Strahlen s und t im Gegenurzeigersinn messen, können wir ihm eine Zahl zwischen 0° und 360° zuordnen.

$\dots - 720^\circ = -360^\circ = 0^\circ = 360^\circ = 720^\circ \dots$

Wir schreiben dann $\sphericalangle(s, t) = x^\circ$.



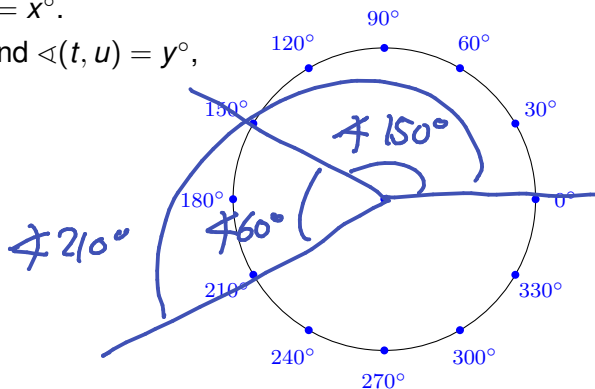
Winkel messen (algebraisch)

Wenn wir den Winkel zwischen zwei Strahlen s und t im Gegenurzeigersinn messen, können wir ihm eine Zahl zwischen 0° und 360° zuordnen.

$\dots - 720^\circ = -360^\circ = 0^\circ = 360^\circ = 720^\circ \dots$

Wir schreiben dann $\sphericalangle(s, t) = x^\circ$.

Vorteil: wenn $\sphericalangle(s, t) = x^\circ$ und $\sphericalangle(t, u) = y^\circ$,
dann $\sphericalangle(s, u) = (x + y)^\circ$.



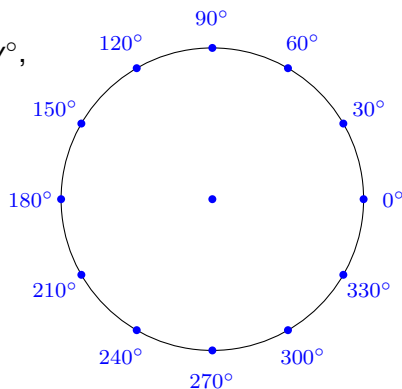
Winkel messen (algebraisch)

Wenn wir den Winkel zwischen zwei Strahlen s und t im Gegenurzeigersinn messen, können wir ihm eine Zahl zwischen 0° und 360° zuordnen.

$\dots - 720^\circ = -360^\circ = 0^\circ = 360^\circ = 720^\circ \dots$

Wir schreiben dann $\sphericalangle(s, t) = x^\circ$.

Vorteil: wenn $\sphericalangle(s, t) = x^\circ$ und $\sphericalangle(t, u) = y^\circ$,
dann $\sphericalangle(s, u) = (x + y)^\circ$.



Winkel messen (algebraisch)

Wenn wir den Winkel zwischen zwei Strahlen s und t im Gegenurzeigersinn messen, können wir ihm eine Zahl zwischen 0° und 360° zuordnen.

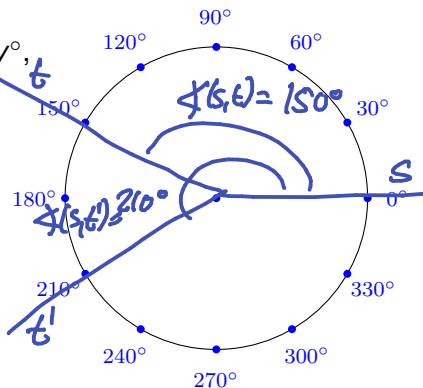
$\dots - 720^\circ = -360^\circ = 0^\circ = 360^\circ = 720^\circ \dots$

Wir schreiben dann $\sphericalangle(s, t) = x^\circ$.

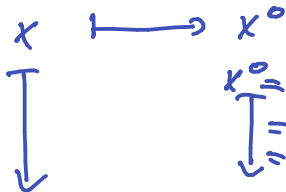
Vorteil: wenn $\sphericalangle(s, t) = x^\circ$ und $\sphericalangle(t, u) = y^\circ$,
dann $\sphericalangle(s, u) = (x + y)^\circ$.

Nachteil: $\sphericalangle(s, t)$ ist nicht invariant unter Kongruenz!

Die Winkel $\angle(s, t)$ und $\angle(s', t')$ können kongruent sein, aber $\sphericalangle(s, t) = -\sphericalangle(s', t')$.



Meta: Zahlen und Relationen



$$x^\circ = (x + 360)^\circ$$

$$= (x + 720)^\circ$$

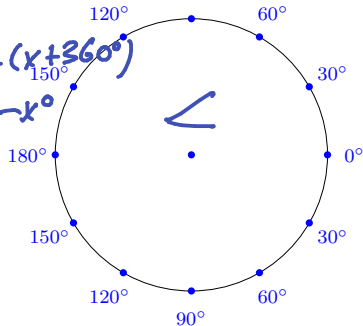
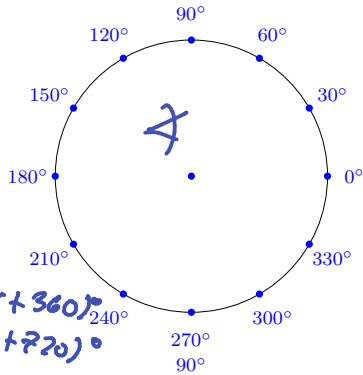
$$= \dots$$

$$|x| = |0x| \mapsto x^\circ = (x + 360)^\circ$$

$$= -x^\circ$$

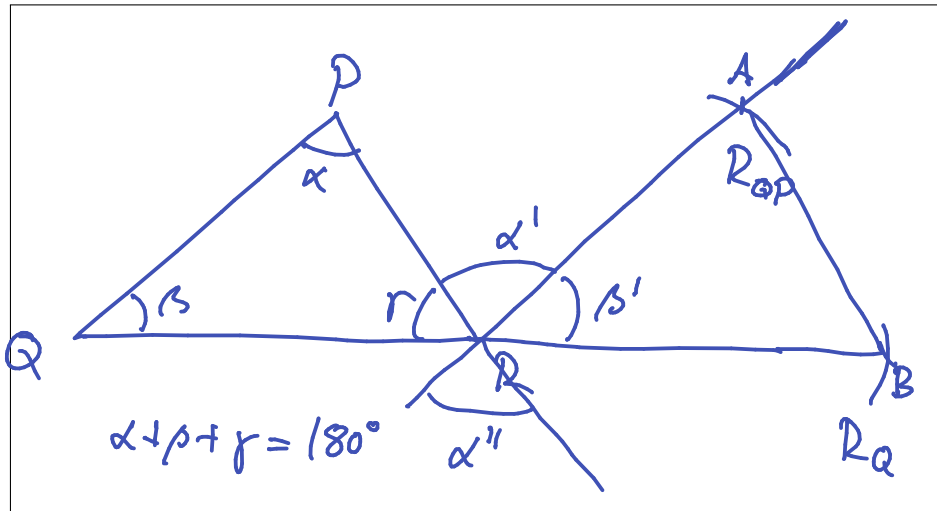


$$|x| = |-x|$$



Winkelsumme

Proposition. Die Winkelsumme im Dreieck ist 180° . Das heißt, ist PQR ein beliebiges Dreieck, dann ist die Summe von $\angle PQR$, $\angle QRP$ und $\angle RPQ$ gerade 180° .



Winkelsumme

Proposition. Die Winkelsumme im Dreieck ist 180° . Das heißt, ist PQR ein beliebiges Dreieck, dann ist die Summe von $\angle PQR$, $\angle QRP$ und $\angle RPQ$ gerade 180° .

Beweis. Sei g die zu PQ parallele Gerade durch R . Sei A der Schnittpunkt von R_{QP} mit g der im selben Halbraum von QR liegt, wie P . Sei B der von Q verschiedene Schnittpunkt von R_Q und QR .

Wir wollen zeigen, dass $\angle QPR \equiv \angle ARP$ und $\angle PQR \equiv \angle ARB$.

Sei τ_{QR} die Translation, die Q auf P abbildet. Es ist $\tau_P Q(\angle PQR) = \angle ARB$. QR

Sei τ_{PR} die Translation, die P auf R abbildet. Der Winkel $\tau_{PR}(\angle QPR)$ ist ein Gegenwinkel von $\angle ARP$, also $\angle QPR \equiv \angle ARP$. □