

Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

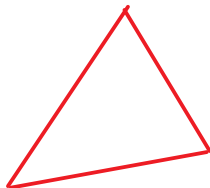
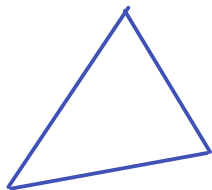
Grundlagen

Bewegungen: Intuition und Handhabung

Stefan Witzel

Warum Bewegungen?

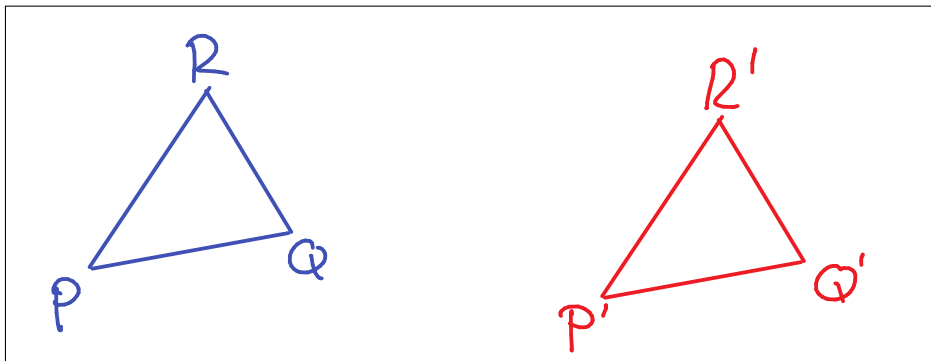
Zwei Dreiecke sind **kongruent** (deckungsgleich) wenn es eine Bewegung gibt, die das eine in das andere überführt.



Warum Bewegungen?

Zwei Dreiecke sind **kongruent** (deckungsgleich) wenn es eine Bewegung gibt, die das eine in das andere überführt.

Formal: die Dreiecke PQR und $P'Q'R'$ sind deckungsgleich wenn es eine Bewegung φ gibt mit $\varphi(PQR) = P'Q'R'$.

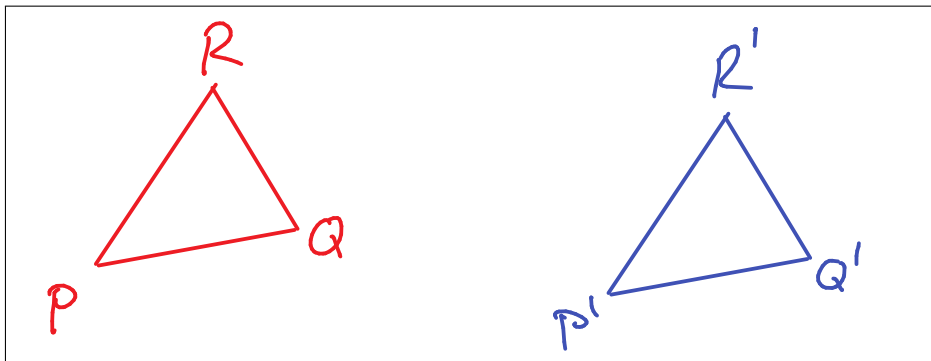


Warum Bewegungen?

Zwei Dreiecke sind **kongruent** (deckungsgleich) wenn es eine Bewegung gibt, die das eine in das andere überführt.

Formal: die Dreiecke PQR und $P'Q'R'$ sind deckungsgleich wenn es eine Bewegung φ gibt mit $\varphi(PQR) = P'Q'R'$.

Die **inverse** (umgekehrte) Bewegung überführt dann $P'Q'R'$ in PQR :
 $\varphi^{-1}(P'Q'R') = PQR$.



Abbildungen praktisch

Eine **Abbildung** $\varphi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ bedeutet:

Für jeden Punkt $P \in \mathbb{E}^2$ gibt es einen Punkt $Q = \varphi(P) \in \mathbb{E}^2$.

$$P_1 \quad Q_1 = \varphi(P_1)$$

$$P_2 \quad Q_2 = \varphi(P_2)$$

$$P_3 \quad Q_3 = \varphi(P_3)$$

$$P_4 \quad Q_4 = \varphi(P_4)$$

Abbildungen praktisch

Eine **Abbildung** $\varphi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ bedeutet:

Für jeden Punkt $P \in \mathbb{E}^2$ gibt es einen Punkt $Q = \varphi(P) \in \mathbb{E}^2$.

Die Abbildung ist **bijektiv**, wenn es eine **Inverse** $\varphi^{-1}: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ gibt.

Für eine Inverse gilt:

- ▶ für jeden Punkt P ist $\varphi^{-1}(\varphi(P)) = P$,
- ▶ für jeden Punkt Q ist $\varphi(\varphi^{-1}(Q)) = Q$.

Abbildungen praktisch

Eine **Abbildung** $\varphi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ bedeutet:

Für jeden Punkt $P \in \mathbb{E}^2$ gibt es einen Punkt $Q = \varphi(P) \in \mathbb{E}^2$.

Die Abbildung ist **bijektiv**, wenn es eine **Inverse** $\varphi^{-1}: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ gibt.

Für eine Inverse gilt:

- ▶ für jeden Punkt P ist $\varphi^{-1}(\varphi(P)) = P$,
- ▶ für jeden Punkt Q ist $\varphi(\varphi^{-1}(Q)) = Q$.

Das heißt, $\varphi^{-1}(Q)$ ist die Lösung der Gleichung $\varphi(?) = Q$.

Abbildungen praktisch

Eine **Abbildung** $\varphi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ bedeutet:

Für jeden Punkt $P \in \mathbb{E}^2$ gibt es einen Punkt $Q = \varphi(P) \in \mathbb{E}^2$.

Die Abbildung ist **bijektiv**, wenn es eine **Inverse** $\varphi^{-1}: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ gibt.

Für eine Inverse gilt:

- ▶ für jeden Punkt P ist $\varphi^{-1}(\varphi(P)) = P$,
- ▶ für jeden Punkt Q ist $\varphi(\varphi^{-1}(Q)) = Q$.

Das heißt, $\varphi^{-1}(Q)$ ist die Lösung der Gleichung $\varphi(?) = Q$.

Es ist $\varphi(P) = Q$ genau dann, wenn $P = \varphi^{-1}(Q)$.

Abbildungen praktisch

Eine **Abbildung** $\varphi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ bedeutet:

Für jeden Punkt $P \in \mathbb{E}^2$ gibt es einen Punkt $Q = \varphi(P) \in \mathbb{E}^2$.

Die Abbildung ist **bijektiv**, wenn es eine **Inverse** $\varphi^{-1}: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ gibt.

Für eine Inverse gilt:

- ▶ für jeden Punkt P ist $\varphi^{-1}(\varphi(P)) = P$,
- ▶ für jeden Punkt Q ist $\varphi(\varphi^{-1}(Q)) = Q$.

Das heißt, $\varphi^{-1}(Q)$ ist die Lösung der Gleichung $\varphi(?) = Q$.

Es ist $\varphi(P) = Q$ genau dann, wenn $P = \varphi^{-1}(Q)$.

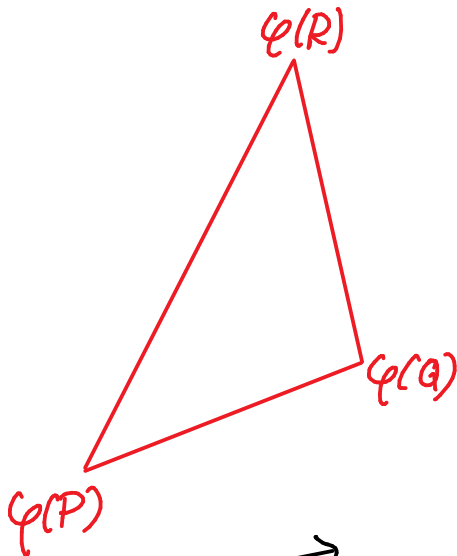
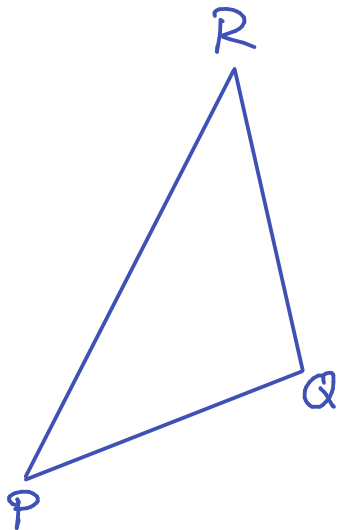
Die inverse Abbildung der inversen Abbildung ist die ursprüngliche Abbildung: $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$:

$$\varphi(P) = Q$$

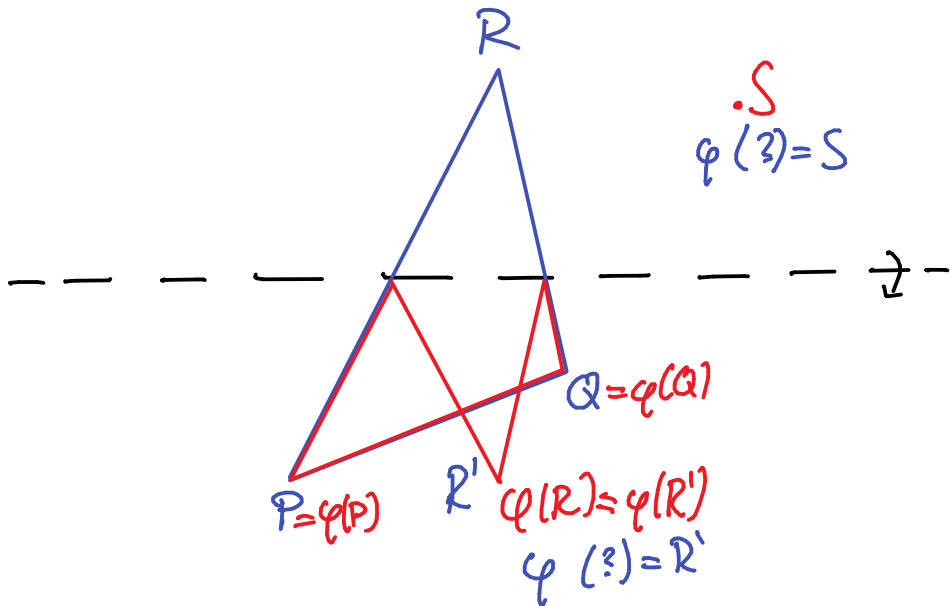
$$P = \varphi^{-1}(Q)$$

$$(\varphi^{-1})^{-1}(P) = Q$$

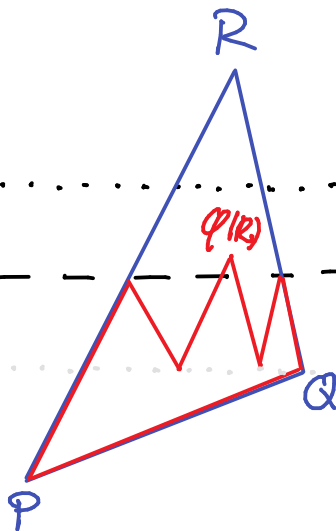
Beispiel: bijektiv



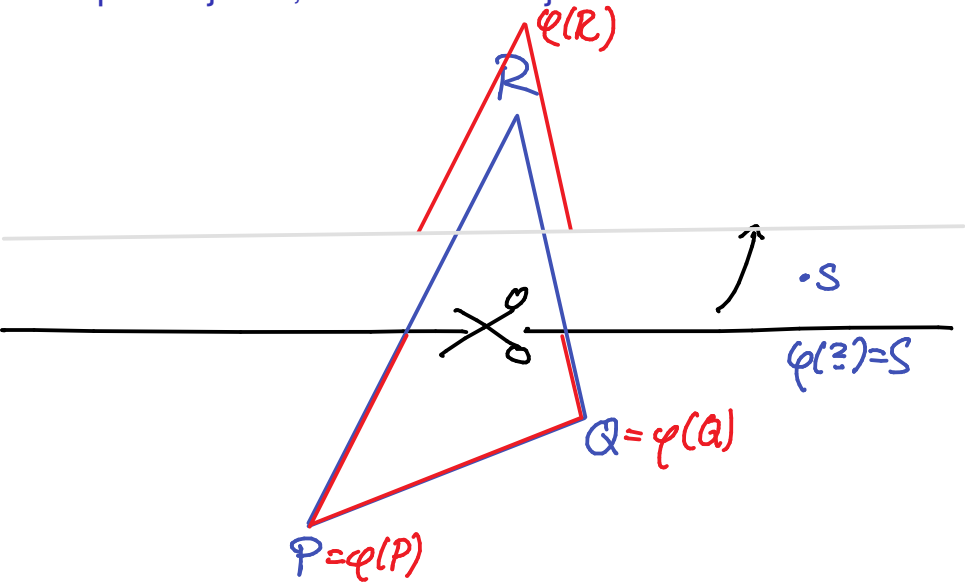
Beispiel: weder injektiv, noch surjektiv



Beispiel: surjektiv, aber nicht injektiv



Beispiel: injektiv, aber nicht surjektiv



Bewegungen

Eine **Bewegung** ist eine bijektive Abbildung $\varphi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ die den Abstand erhält: $|\varphi(P)\varphi(Q)| = |PQ|$.

Bewegungen

Eine **Bewegung** ist eine bijektive Abbildung $\varphi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ die den Abstand erhält: $|\varphi(P)\varphi(Q)| = |PQ|$. (*)

Sei φ eine Bewegung.

Proposition. Wenn φ eine Bewegung ist, dann ist auch die inverse Abbildung φ^{-1} eine Bewegung.

Beweis. Seien P und Q beliebige Punkte.

Anwenden der Definition auf $\varphi^{-1}(P)$ und $\varphi^{-1}(Q)$ ergibt:

$$|PQ| = |\underbrace{\varphi(\varphi^{-1}(P))}_{\uparrow} \underbrace{\varphi(\varphi^{-1}(Q))}_{\uparrow}| \stackrel{(*)}{=} |\underbrace{\varphi^{-1}(P)}_{\leftarrow} \underbrace{\varphi^{-1}(Q)}_{\leftarrow}|.$$

□

$$\varphi(\varphi^{-1}(P)) = P$$

$$\varphi(\varphi^{-1}(Q)) = Q$$

$$P' := \varphi^{-1}(P) \Leftrightarrow P = \varphi(P')$$

$$Q' := \varphi^{-1}(Q) \Leftrightarrow Q = \varphi(Q')$$

$$\text{Aus } (*) \quad |\varphi(P')\varphi(Q')| = |P'Q'| \quad \leftarrow \quad |PQ| = |P'Q'|$$

$$\Leftrightarrow |PQ| = |\varphi^{-1}(P)\varphi^{-1}(Q)|$$

Bewegungen

Eine **Bewegung** ist eine bijektive Abbildung $\varphi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ die den Abstand erhält: $|\varphi(P)\varphi(Q)| = |PQ|$.

Sei φ eine Bewegung.

Proposition. Wenn R auf PQ liegt, dann liegt $\varphi(R)$ auf $\varphi(P)\varphi(Q)$.

Beweis. Wenn $R \in PQ$, dann ist

$$|PQ| = |PR| + |RQ| \text{ oder } |PR| = |PQ| + |QR| \text{ oder } |RQ| = |RP| + |PQ|.$$

Da φ eine Bewegung ist, ist

$$|\varphi(P)\varphi(Q)| = |PQ| \text{ und } |\varphi(P)\varphi(R)| = |PR| \text{ und } |\varphi(Q)\varphi(R)| = |QR|.$$

Also ist (einsetzen)

$$|\varphi(P)\varphi(Q)| = |\varphi(P)\varphi(R)| + |\varphi(R)\varphi(Q)| \text{ oder}$$

$$|\varphi(P)\varphi(R)| = |\varphi(P)\varphi(Q)| + |\varphi(Q)\varphi(R)| \text{ oder}$$

$$|\varphi(R)\varphi(Q)| = |\varphi(R)\varphi(P)| + |\varphi(P)\varphi(Q)|. \quad \square$$

Bewegungen

Eine **Bewegung** ist eine bijektive Abbildung $\varphi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ die den Abstand erhält: $|\varphi(P)\varphi(Q)| = |PQ|$.

Sei φ eine Bewegung.

Proposition. Wenn R auf PQ liegt, dann liegt $\varphi(R)$ auf $\varphi(P)\varphi(Q)$.

Folgerung. Die Bewegung φ bildet die Gerade PQ auf die Gerade $\varphi(P)\varphi(Q)$ ab:

$$\varphi(PQ) = \varphi(P)\varphi(Q).$$

↗
die Bildpunkte $\varphi(R)$
für $R \in PQ$

↖
die Gerade durch
 $\varphi(P)$ und $\varphi(Q)$

Bewegungen

Eine **Bewegung** ist eine bijektive Abbildung $\varphi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ die den Abstand erhält: $|\varphi(P)\varphi(Q)| = |PQ|$.

Sei φ eine Bewegung.

Proposition. Wenn g und h parallel sind, dann sind $\varphi(g)$ und $\varphi(h)$ parallel.

Beweis. Wenn $\varphi(g)$ und $\varphi(h)$ nicht parallel wären, dann würden sie sich in einem Punkt Q schneiden:

$$Q \in \varphi(g) \cap \varphi(h).$$

Dann würden sich aber $g = \varphi^{-1}(\varphi(g))$ und $h = \varphi^{-1}(\varphi(h))$ im Punkt $\varphi^{-1}(Q)$ schneiden:

$$\varphi^{-1}(Q) \in \varphi^{-1}(\varphi(g)) \cap \varphi^{-1}(\varphi(h)) = g \cap h.$$



Bewegungen

Eine **Bewegung** ist eine bijektive Abbildung $\varphi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ die den Abstand erhält: $|\varphi(P)\varphi(Q)| = |PQ|$.

Sei φ eine Bewegung.

Proposition. Wenn R auf M_P liegt, dann liegt $\varphi(R)$ auf $\underbrace{\varphi(M)}_{\varphi(P)}$.

Beweis. Wenn R auf M_P liegt, ist $|MR| = |MP|$.

Da φ eine Bewegung ist, ist

$$|\varphi(M)\varphi(R)| = |MR| \text{ und } |\varphi(M)\varphi(P)| = |MP|.$$

Also ist (einsetzen) $|\varphi(M)\varphi(R)| = |\varphi(M)\varphi(P)|$. □

Folgerung. Der Kreis mit Mittelpunkt M durch P wird von φ auf den Kreis mit Mittelpunkt $\varphi(M)$ durch $\varphi(P)$ abgebildet:

$$\varphi(M_P) = \varphi(M)_{\varphi(P)}.$$

Griechische Buchstaben

φ, ψ	Abbildungen, insbesondere Bewegungen
τ	Verschiebungen (Translationen)
ρ	Drehungen (Rotationen)
σ	Spiegelungen (Reflektionen)
α	Ähnlichkeiten oder Winkel
β, γ	Winkel
ι	injektive, nicht surjektive Abbildungen
π	surjektive, nicht injektive Abbildungen