Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

Gruppen, Bewegungen

Stefan Witzel

Gruppen

Eine Menge G von Bijektionen $X \to X$ ist eine *Gruppe*, wenn

1. die Identität $\mathrm{id}\colon X \to X$ in G liegt,
2. für jedes Element $\alpha \in G$ die Inverse α^{-1} ebenfalls in G liegt und
3. für zwei Elemente $\alpha, \beta \in G$ die Komposition $\alpha \circ \beta$ auch in G liegt.

Gruppen

Eine Menge G von Bijektionen $X \to X$ ist eine *Gruppe*, wenn

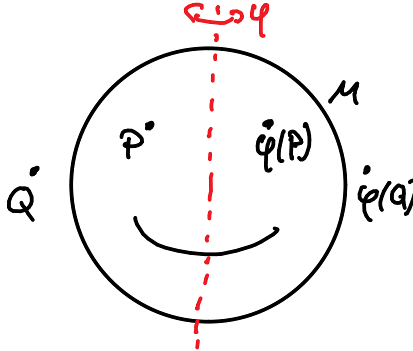
1. die Identität $\mathrm{id}\colon X \to X$ in G liegt,
2. für jedes Element $\alpha \in G$ die Inverse α^{-1} ebenfalls in G liegt und
3. für zwei Elemente $\alpha, \beta \in G$ die Komposition $\alpha \circ \beta$ auch in G liegt.

Beispiel. Die Menge der Bewegungen $\mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ ist eine Gruppe.

Symmetrien

Sei $M \subseteq \mathbb{E}^2$. Eine *Symmetrie* von M ist eine Bewegung φ, so dass $\varphi(M) = M$.

Das heißt, für jeden Punkt P ist $P \in M$ genau dann, wenn $\varphi(P) \in M$.



Symmetrien

Sei $M \subseteq \mathbb{E}^2$. Eine *Symmetrie* von M ist eine Bewegung φ, so dass $\varphi(M) = M$.

Das heißt, für jeden Punkt P ist $P \in M$ genau dann, wenn $\varphi(P) \in M$.

Bei einem Bild ist jeder Punkt der Ebene in einer Farbe eingefärbt.

Eine Symmetrie eines Bildes ist eine Abbildung, die jeden Punkt auf einen Punkt derselben Farbe abbildet.

Das heißt, sie ist Symmetrie der Mengen M_F von Punkten, die die Farbe F haben.

Symmetriegruppe

Proposition. Die Menge der Symmetrien einer Menge ist eine Gruppe.

Man nennt diese Gruppe die *Symmetriegruppe* der Menge.

Symmetriegruppe

Proposition. Die Menge der Symmetrien einer Menge ist eine Gruppe.

Man nennt diese Gruppe die *Symmetriegruppe* der Menge.

Beweis. Sei $M \subseteq \mathbb{E}^2$ eine Menge.
Die Identität ist eine Symmetrie von M, weil sie jeden Punkt auf sich abbildet.
[. . .] $\square$

Symmetriegruppe

Proposition. Die Menge der Symmetrien einer Menge ist eine Gruppe.

Man nennt diese Gruppe die *Symmetriegruppe* der Menge.
Beweis. [...]
Wenn φ eine Symmetrie ist, dann auch φ^{-1}: Sei $P \in \mathbb{E}^2$ beliebig. Sei $Q := \varphi^{-1}(P)$.
Nach Definition ist $Q \in M$ genau dann, wenn $\varphi(Q) = P \in M$.
Also ist $P \in M$ genau dann, wenn $\varphi^{-1}(P) = Q \in M$.
Also ist φ^{-1} eine Symmetrie von M.
[...] $\square$

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, mapsto, "\varphi"] \arrow[d, equal] & \varphi(Q) \arrow[d, equal] \\
\varphi^{-1}(P) & P \arrow[l, mapsto, "\varphi^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Symmetriegruppe

Proposition. Die Menge der Symmetrien einer Menge ist eine Gruppe.

Man nennt diese Gruppe die *Symmetriegruppe* der Menge.
Beweis. [...] Wenn φ und ψ Symmetrien sind, dann auch $\varphi \circ \psi$:
Sei wieder $P \in \mathbb{E}^2$ beliebig, $Q = \psi(P)$ und $R = \varphi(Q) = (\varphi \circ \psi)(P)$.
Da ψ eine Symmetrie von M ist sind P und Q entweder beide in M oder beide nicht in M.
Da φ eine Symmetrie von M ist, sind Q und R entweder beide in M oder beide nicht in M.
Also sind P und R entweder beide in M oder beide nicht in M. $\square$

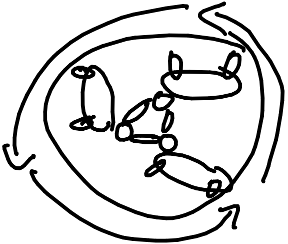
$$P \overset{\psi}{\longmapsto} Q \overset{\varphi}{\longmapsto} R$$

Endliche Symmetriegruppen in der Ebene

Satz. Wenn die Symmetriegruppe einer Menge $M \subseteq \mathbb{E}^2$ endlich ist, gilt einer der folgenden Fälle:

1. Es gibt eine Rotation ρ mit $\rho^n = \mathrm{id}$, so dass M die folgenden n Symmetrien hat: $\mathrm{id} = \rho^0, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}$.

Hier schreiben wir $\rho^m = \underbrace{\rho \circ \ldots \circ \rho}_{m \text{ mal}}$.



ρ

$\rho^2 = \rho \circ \rho$

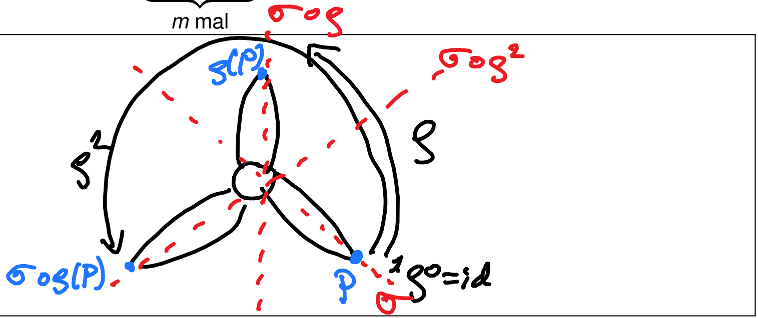
$\rho^0 = \mathrm{id}$

Endliche Symmetriegruppen in der Ebene

Satz. Wenn die Symmetriegruppe einer Menge $M \subseteq \mathbb{E}^2$ endlich ist, gilt einer der folgenden Fälle:

1. Es gibt eine Rotation ρ mit $\rho^n = \mathrm{id}$, so dass M die folgenden n Symmetrien hat: $\mathrm{id} = \rho^0, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}$.
2. Es gibt eine Spiegelung σ und eine Rotation ρ mit $\rho^n = \mathrm{id}$, so dass der Fixpunkt von ρ auf der Achse von σ liegt und M die folgenden $2n$ Symmetrien hat: $\mathrm{id} = \rho^0, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}, \sigma, \sigma \circ \rho, \sigma \circ \rho^2, \ldots, \sigma \circ \rho^{n-1}$.

Hier schreiben wir $\rho^m = \underbrace{\rho \circ \ldots \circ \rho}_{m \text{ mal}}$.



Endliche Symmetriegruppen in der Ebene

Satz. Wenn die Symmetriegruppe einer Menge $M \subseteq \mathbb{E}^2$ endlich ist, gilt einer der folgenden Fälle:

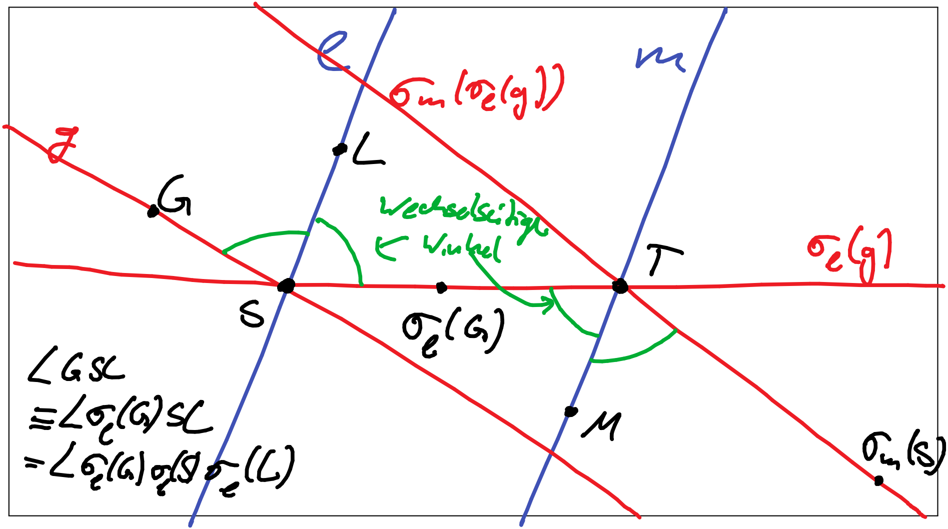
1. Es gibt eine Rotation ρ mit $\rho^n = \mathrm{id}$, so dass M die folgenden n Symmetrien hat: $\mathrm{id} = \rho^0, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}$.
2. Es gibt eine Spiegelung σ und eine Rotation ρ mit $\rho^n = \mathrm{id}$, so dass der Fixpunkt von ρ auf der Achse von σ liegt und M die folgenden $2n$ Symmetrien hat: $\mathrm{id} = \rho^0, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}, \sigma, \sigma \circ \rho, \sigma \circ \rho^2, \ldots, \sigma \circ \rho^{n-1}$.

Hier schreiben wir $\rho^m = \underbrace{\rho \circ \ldots \circ \rho}_{m \text{ mal}}$.

Die ersten Symmetriegruppen sind endliche zyklische Gruppen C_n.
Die zweiten Symmetriegruppen nennt man endliche Dieder-Gruppen D_n.

Komposition von Spiegelungen I

Proposition. Seien σ_ℓ und σ_m Spiegelungen an Geraden ℓ und m. Wenn ℓ und m parallel sind, dann ist $\sigma_m \circ \sigma_\ell$ eine Verschiebung.



Komposition von Spiegelungen I

Proposition. Seien σ_ℓ und σ_m Spiegelungen an Geraden ℓ und m. Wenn ℓ und m parallel sind, dann ist $\sigma_m \circ \sigma_\ell$ eine Verschiebung.

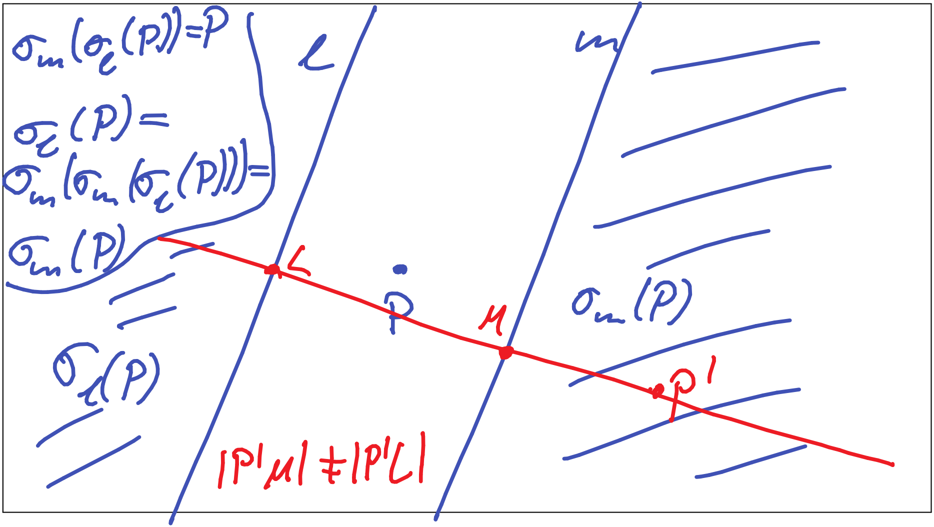
Beweis. Sei $\varphi = \sigma_\ell \circ \sigma_m$. Fall $\ell = m$ trivial, also $\ell \neq m$.
Sei g eine Gerade. Wollen zeigen, $\varphi(g) \parallel g$.

Wenn $g \parallel \ell \parallel m$ klar, also $g \not\parallel \ell$.
Sei $\{S\} = g \cap \ell$, $\{T\} = \sigma_\ell(g) \cap m$.
Seien $L \in \ell$ und $M \in m$ auf unterschiedlichen Seiten von $\sigma_\ell(g)$.
Sei $G \in g$ ein Punkt im von T abgewandten Halbraum von m.

Jetzt ist $\angle GSL \equiv \angle TSL = \angle \sigma_\ell(G)SL$, weil σ_ℓ eine Spiegelung ist.
Die wechselseitigen Winkel $\angle TSL$ und $\angle STM$ sind kongruent.
Es ist $\angle STM \equiv \angle \sigma_m(S)TM$ kongruent weil σ_m eine Spiegelung ist.
Folglich ist $g = GS \parallel T\sigma_m(S) = \sigma_\ell \circ \sigma_m(g)$.
[...] $\square$

Komposition von Spiegelungen I

Proposition. Seien σ_ℓ und σ_m Spiegelungen an Geraden ℓ und m. Wenn ℓ und m parallel sind, dann ist $\sigma_m \circ \sigma_\ell$ eine Verschiebung.



Komposition von Spiegelungen I

Proposition. Seien σ_ℓ und σ_m Spiegelungen an Geraden ℓ und m. Wenn ℓ und m parallel sind, dann ist $\sigma_m \circ \sigma_\ell$ eine Verschiebung.

Beweis. [...]
Sei jetzt P ein Punkt. Wollen zeigen, dass P kein Fixpunkt von φ ist.

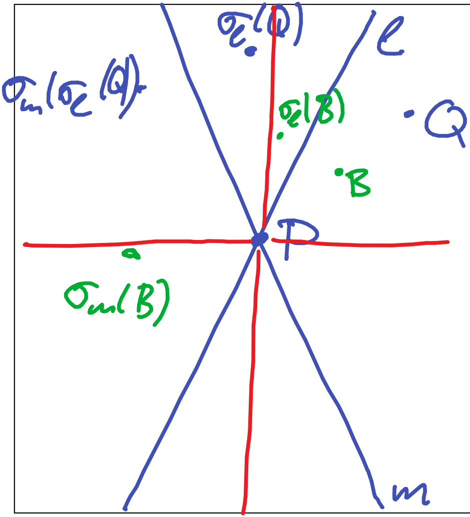
Es ist $\varphi(P) = \sigma_m(\sigma_\ell(P)) = P$ genau dann, wenn $\sigma_\ell(P) = \sigma_m(P)$.

Sei h das Lot auf ℓ durch P.
Sei $\{A\} = h \cap \ell$ und $\{B\} = h \cap m$.
Es ist $|P\sigma_\ell(P)| = 2|PA|$ und $|P\sigma_m(P)| = 2|PB|$.

Fall 1: wenn P zwischen ℓ und m liegt $\sigma_\ell(P)$ in einem anderen Halbraum als $\sigma_m(P)$.
Fall 2: wenn P im Halbraum von ℓ ohne m liegt, ist $|P\sigma_\ell(P)| < |P\sigma_m(P)|$.
Fall 3: wenn P im Halbraum von m ohne ℓ liegt, ist $|P\sigma_\ell(P)| > |P\sigma_m(P)|$.
In jedem Fall ist $\sigma_\ell(P) \neq \sigma_m(P)$. $\square$

Komposition von Spiegelungen II

Proposition. Seien σ_ℓ und σ_m Spiegelungen an Geraden ℓ und m. Wenn sich ℓ und m in einem Punkt P schneiden, ist $\sigma_m \circ \sigma_\ell$ eine Drehung um P.



$$\sigma_m(\sigma_\ell(P)) = \sigma_m(P) = P$$

F Fixpunkt von $\sigma_m \circ \sigma_\ell$

$\iff \sigma_m(F) = \sigma_\ell(F)$

Menge der $\underline{A}$ mit

$|\underline{A}\,\sigma_\ell(\underline{A})| = |\underline{A}\,\sigma_m(\underline{A})|$

Komposition von Spiegelungen II

Proposition. Seien σ_ℓ und σ_m Spiegelungen an Geraden ℓ und m. Wenn sich ℓ und m in einem Punkt P schneiden, ist $\sigma_m \circ \sigma_\ell$ eine Drehung um P.

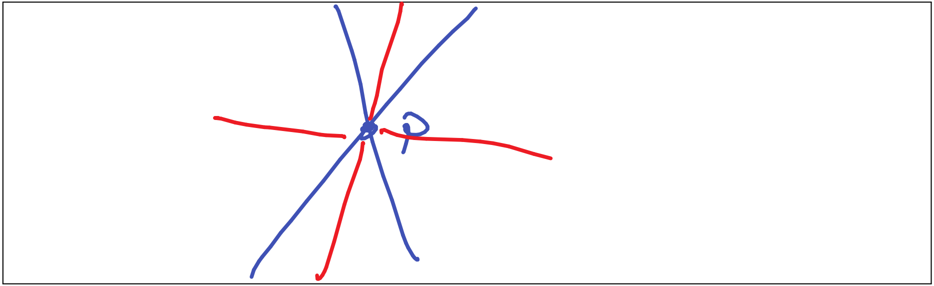
Beweis-Skizze.

Offensichtlich ist P ein Fixpunkt von φ.

Jeder Punkt Q mit $\sigma_\ell(Q) = \sigma_m(Q)$ erfüllt $|Q\sigma_\ell(Q)| = |Q\sigma_m(Q)|$.

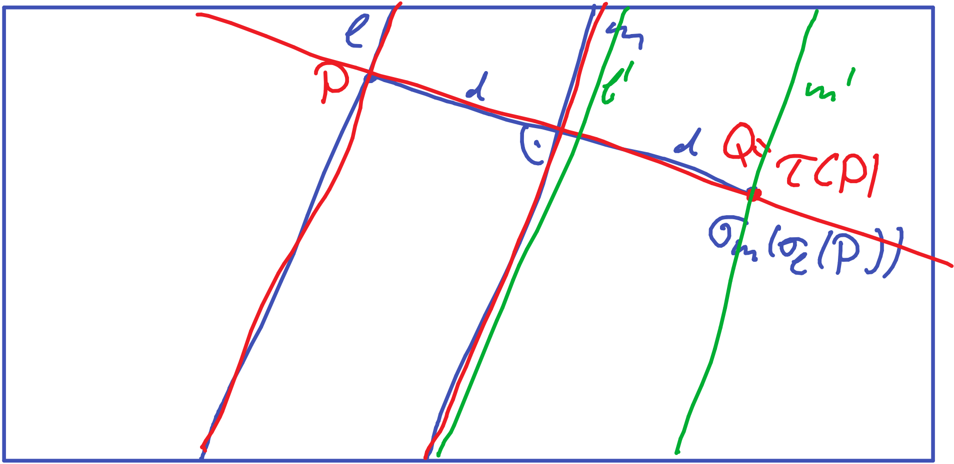
Die Menge dieser Punkte sind ~~ist~~ die Winkelhalbierenden h zwischen ℓ und m.

Die Winkelhalbierenden wird von σ_ℓ und σ_m nur gleich ~~auf sich selbst~~ abgebildet, falls $\ell = m$. □



Verschiebungen als Komposition von Spiegelungen

Proposition. Jede Verschiebung ist die Komposition zweier Spiegelungen.



Verschiebungen als Komposition von Spiegelungen

Proposition. Jede Verschiebung ist die Komposition zweier Spiegelungen.

Beweis. Sei τ eine Verschiebung, P beliebig und $Q = \tau(P)$.

Sei M der Mittelpunkt von $\overline{PQ}$.

Sei m die Senkrechte zu PQ durch M und sei ℓ die Senkrechte zu PQ durch Q.

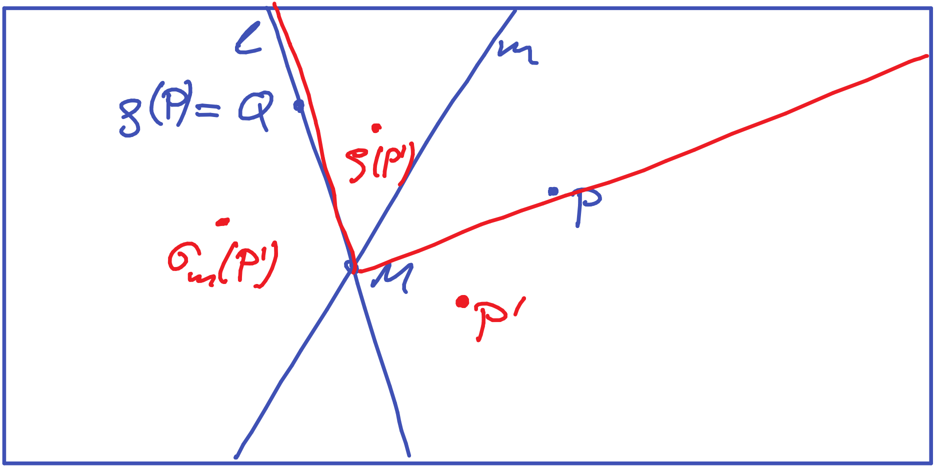
Da m und ℓ parallel zueinander sind, ist $\sigma_\ell \circ \sigma_m$ eine Verschiebung.

Außerdem ist $\sigma_\ell(\sigma_m(P)) = \sigma_\ell(Q) = Q$.

Wegen der Eindeutigkeit von Verschiebungen ist $\tau = \sigma_\ell \circ \sigma_m$. $\square$

Drehungen als Komposition von Spiegelungen

Proposition. Jede Drehung ist die Komposition zweier Spiegelungen.



Drehungen als Komposition von Spiegelungen

Proposition. Jede Drehung ist die Komposition zweier Spiegelungen.

Beweis. Sei ρ Drehung mit Fixpunkt M, sei $P \neq M$ und $Q = \rho(P)$.
Sei m die Winkelhalbierende von $\angle PMQ$ und sei $\ell = MQ$.
Da sich m und ℓ in M schneiden, ist $\sigma_\ell \circ \sigma_m$ eine Drehung.
Offensichtlich ist $\sigma_\ell(\sigma_m(M)) = M$.
Außerdem ist $\sigma_\ell(\sigma_m(P)) = \sigma_\ell(Q) = Q$.
Aus der Eindeutigkeit von Drehungen folgt, dass $\rho = \sigma_\ell \circ \sigma_m$. □

Bewegungen als Komposition von Spiegelungen

Satz. Jede Bewegung ist eine Komposition von Spiegelungen.

Bewegungen als Komposition von Spiegelungen

Satz. Jede Bewegung ist eine Komposition von Spiegelungen.

Beweis. Im Beweis des Kongruenzsatzes SSS haben wir gesehen, dass jede Bewegung eine Komposition $\varphi = \sigma \circ \rho \circ \tau$ ist (τ Verschiebung, ρ Drehung, σ Spiegelung oder Identität).

Nach den letzten beiden Propositionen sind $\rho = \sigma' \circ \sigma''$ und $\tau = \sigma''' \circ \sigma''''$ Kompositionen von Spiegelungen.

Also ist $\varphi = \sigma \circ \sigma' \circ \sigma'' \circ \sigma'' \circ \sigma''''$ eine Komposition von Spiegelungen. $\square$

Gerade und ungerade Bewegungen

Eine Bewegung ist gerade, wenn sie die Komposition einer geraden Anzahl von Spiegelungen ist.

Gerade und ungerade Bewegungen

Eine Bewegung ist gerade, wenn sie die Komposition einer geraden Anzahl von Spiegelungen ist.

Sie ist ungerade, wenn sie die Komposition einer ungeraden Anzahl von Spiegelungen ist.

Gerade und ungerade Bewegungen

Eine Bewegung ist gerade, wenn sie die Komposition einer geraden Anzahl von Spiegelungen ist.

Sie ist ungerade, wenn sie die Komposition einer ungeraden Anzahl von Spiegelungen ist.

Beispiel. Drehungen und Verschiebungen sind gerade Bewegungen. Spiegelungen sind ungerade Bewegungen.

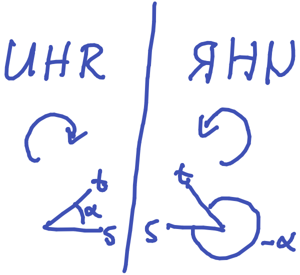
Gerade und ungerade Bewegungen

Eine Bewegung ist gerade, wenn sie die Komposition einer geraden Anzahl von Spiegelungen ist.

Sie ist ungerade, wenn sie die Komposition einer ungeraden Anzahl von Spiegelungen ist.

Beispiel. Drehungen und Verschiebungen sind gerade Bewegungen. Spiegelungen sind ungerade Bewegungen.

Ungerade Bewegungen tauschen Uhrzeigersinn und Gegenuhrzeigersinn, Schrift und Spiegelschrift, wechseln Vorzeichen des algebraischen Winkelmaßes.



Gerade und ungerade Bewegungen

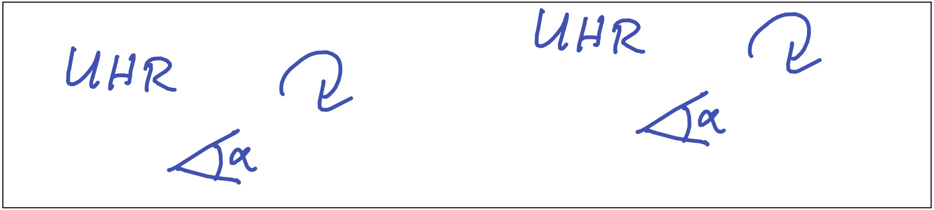
Eine Bewegung ist gerade, wenn sie die Komposition einer geraden Anzahl von Spiegelungen ist.

Sie ist ungerade, wenn sie die Komposition einer ungeraden Anzahl von Spiegelungen ist.

Beispiel. Drehungen und Verschiebungen sind gerade Bewegungen. Spiegelungen sind ungerade Bewegungen.

Ungerade Bewegungen tauschen Uhrzeigersinn und Gegenuhrzeigersinn, Schrift und Spiegelschrift, wechseln Vorzeichen des algebraischen Winkelmaßes.

Gerade Bewegungen erhalten Uhrzeigersinn und Gegenuhrzeigersinn, Schrift und Spiegelschrift, algebraisches Winkelmaß.



Komposition von geraden und ungeraden Bewegungen

Proposition. Die Komposition von zwei geraden Bewegungen ist gerade.

Die Komposition von zwei ungeraden Bewegungen ist gerade.

Die Komposition einer geraden und einer ungeraden (oder einer ungeraden und einer geraden) Bewegung ist ungerade.

Komposition von geraden und ungeraden Bewegungen

Proposition. Die Komposition von zwei geraden Bewegungen ist gerade.

Die Komposition von zwei ungeraden Bewegungen ist gerade.

Die Komposition einer geraden und einer ungeraden (oder einer ungeraden und einer geraden) Bewegung ist ungerade.

Beweis. Da „gerade plus gerade gleich gerade“, „ungerade plus ungerade gleich gerade“, „gerade plus ungerade gleich ungerade“. □

Komposition von geraden und ungeraden Bewegungen

Proposition. Die Komposition von zwei geraden Bewegungen ist gerade.

Die Komposition von zwei ungeraden Bewegungen ist gerade.

Die Komposition einer geraden und einer ungeraden (oder einer ungeraden und einer geraden) Bewegung ist ungerade.

Beweis. Da „gerade plus gerade gleich gerade“, „ungerade plus ungerade gleich gerade“, „gerade plus ungerade gleich ungerade“. □

Folgerung. Die Menge der geraden Bewegungen ist eine Gruppe.

Proposition. Die Fixpunktmenge einer geraden Bewegung ist entweder leer, ein einziger Punkt, oder die ganze Ebene.

Inverse: $\varphi = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \sigma_4$

$\varphi^{-1} = \sigma_4 \circ \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$

Komposition von geraden und ungeraden Bewegungen

Proposition. Die Komposition von zwei geraden Bewegungen ist gerade.

Die Komposition von zwei ungeraden Bewegungen ist gerade.

Die Komposition einer geraden und einer ungeraden (oder einer ungeraden und einer geraden) Bewegung ist ungerade.

Beweis. Da „gerade plus gerade gleich gerade“, „ungerade plus ungerade gleich gerade“, „gerade plus ungerade gleich ungerade“. □

Folgerung. Die Menge der geraden Bewegungen ist eine Gruppe.

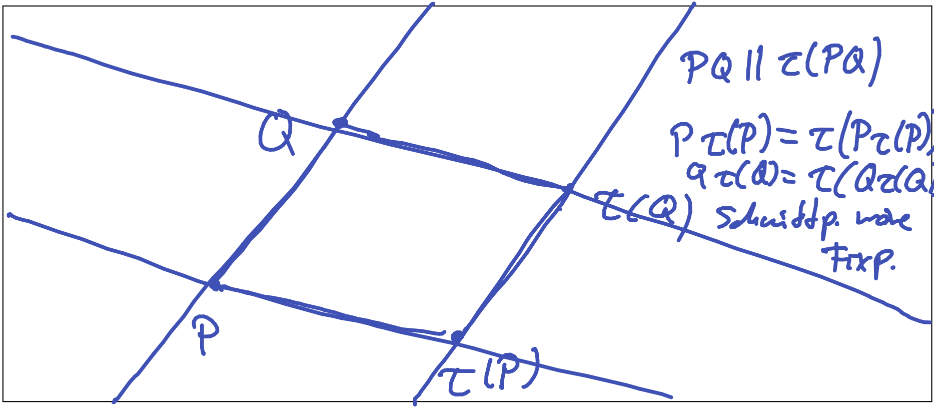
Proposition. Die Fixpunktmenge einer geraden Bewegung ist entweder leer, ein einziger Punkt, oder die ganze Ebene.

Beweis. Aus den bekannten Möglichkeiten fällt eine Gerade weg, da Spiegelungen ungerade sind. □

Charakterisierung von Verschiebungen

Proposition. Eine Bewegung τ ist eine Verschiebung genau dann, wenn für beliebige Punkte P und Q das Viereck $PQ\tau(Q)\tau(P)$ ein Parallelogramm ist (eventuell degeneriert).

Insbesondere bewegen Verschiebungen jeden Punkt um denselben Abstand $|P\tau(P)| = |Q\tau(Q)|$.



Charakterisierung von Verschiebungen

Proposition. Eine Bewegung τ ist eine Verschiebung genau dann, wenn für beliebige Punkte P und Q das Viereck $PQ\tau(Q)\tau(P)$ ein Parallelogramm ist (eventuell degeneriert).

Insbesondere bewegen Verschiebungen jeden Punkt um denselben Abstand $|P\tau(P)| = |Q\tau(Q)|$.

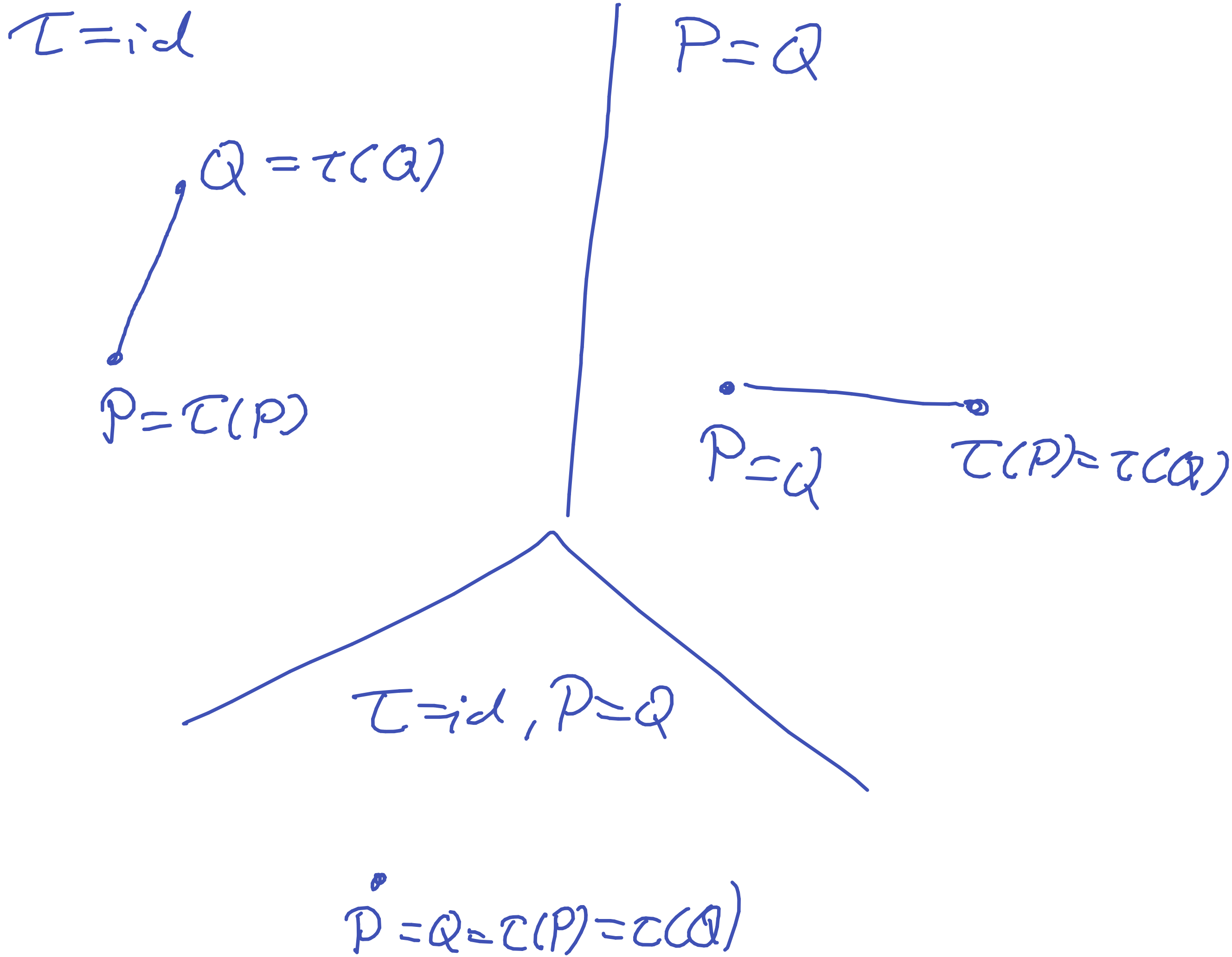
Beweis. Seien P und Q zwei Punkte. Wenn τ eine Verschiebung ist, ist $PQ\tau(Q)\tau(P)$ ein Parallelogramm: $|PQ| = |\tau(P)\tau(Q)|$
Da $P\tau(P) \parallel \tau(P\tau(P))$, also $P\tau(P) = \tau(P\tau(P))$ (τ Verschiebung).
Außerdem ist $PQ \parallel \tau(PQ)$ (τ Bewegung).
Also ist $PQ\tau(Q)\tau(P)$ ein Parallelogramm (eventuell degeneriert, wenn die zwei der parallelen Geraden gleich sind).
[...] $\square$

Charakterisierung von Verschiebungen

Proposition. Eine Bewegung τ ist eine Verschiebung genau dann, wenn für beliebige Punkte P und Q das Viereck $PQ\tau(Q)\tau(P)$ ein Parallelogramm ist (eventuell degeneriert).

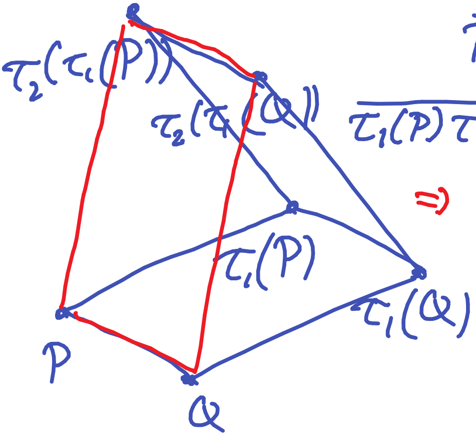
Insbesondere bewegen Verschiebungen jeden Punkt um denselben Abstand $|P\tau(P)| = |Q\tau(Q)|$.

Beweis. [...]
Aus der Parallelogramm-Bedigung folgt dass alle Punkte um denselben Abstand bewegt werden.
Wenn τ die Parallelogramm-Bedingung ist τ eine Verschiebung:
Da τ jeden Punkt um denselben Abstand bewegt ist entweder jeder Punkt ein Fixpunkt (und $\tau = \mathrm{id}$) oder keiner.
Wenn τ keinen Fixpunkt hat, folgt außerdem, dass eine beliebige Gerade PQ auf die parallele Gerade $\tau(P)\tau(Q)$ abgebildet wird.
Damit ist τ eine Verschiebung. $\square$


$\tau = id$
$P = Q$
$Q = \tau(Q)$
$P = \tau(P)$
$P = Q$
$\tau(P) = \tau(Q)$
$\tau = id, P = Q$
$P = Q = \tau(P) = \tau(Q)$

Komposition von Verschiebungen

Proposition. Wenn τ_1 und τ_2 Verschiebungen sind, ist $\tau_2 \circ \tau_1$ auch eine Verschiebung.



$$\overline{PQ} \parallel \overline{\tau_1(P)\tau_1(Q)}$$

$$\overline{\tau_1(P)\tau_1(Q)} \parallel \overline{\tau_2(\tau_1(P))\tau_2(\tau_1(Q))}$$

$$\Rightarrow \overline{PQ} \parallel \overline{\tau_2(\tau_1(P))\tau_2(\tau_1(Q))}$$

Komposition von Verschiebungen

Proposition. Wenn τ_1 und τ_2 Verschiebungen sind, ist $\tau_2 \circ \tau_1$ auch eine Verschiebung.

Beweis. Seien P und Q Punkte.
Da τ_1 eine Verschiebung ist, ist $\overline{PQ}$ parallel zu $\overline{\tau_1(P)\tau_1(Q)}$.
Da τ_2 eine Verschiebung ist, ist $\overline{\tau_1(P)\tau_1(Q)}$ parallel zu $\overline{\tau_2(\tau_1(P))\tau_2(\tau_1(Q))}$.
Also ist $\overline{PQ}$ parallel zu $\overline{\tau_2(\tau_1(P))\tau_2(\tau_1(Q))}$.
Also ist $PQ\tau_2(\tau_1(Q))\tau_2(\tau_1(P))$ ein Parallelogramm.
Also ist $\tau_2 \circ \tau_1$ eine Verschiebung. $\square$

Komposition von Verschiebungen

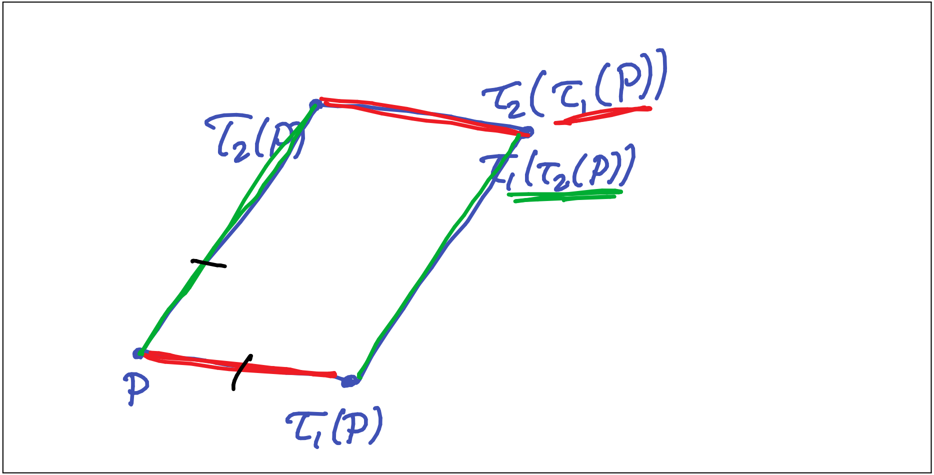
Proposition. Wenn τ_1 und τ_2 Verschiebungen sind, ist $\tau_2 \circ \tau_1$ auch eine Verschiebung.

Beweis. Seien P und Q Punkte.
Da τ_1 eine Verschiebung ist, ist $\overline{PQ}$ parallel zu $\overline{\tau_1(P)\tau_1(Q)}$.
Da τ_2 eine Verschiebung ist, ist $\overline{\tau_1(P)\tau_1(Q)}$ parallel zu $\overline{\tau_2(\tau_1(P))\tau_2(\tau_1(Q))}$.
Also ist $\overline{PQ}$ parallel zu $\overline{\tau_2(\tau_1(P))\tau_2(\tau_1(Q))}$.
Also ist $PQ\tau_2(\tau_1(Q))\tau_2(\tau_1(P))$ ein Parallelogramm.
Also ist $\tau_2 \circ \tau_1$ eine Verschiebung. $\square$

Folgerung. Verschiebungen bilden eine Gruppe.

Verschiebungen vertauschen

Proposition. Wenn τ_1 und τ_2 Verschiebungen sind, ist $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$.



Verschiebungen vertauschen

Proposition. Wenn τ_1 und τ_2 Verschiebungen sind, ist $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$.

Beweis. Sei $P \in \mathbb{E}^2$ beliebig.
Die Segmente $\overline{P\tau_2(P)}$ und $\overline{\tau_1(P)\tau_2(\tau_1(P))}$ sind parallel.
Also ist $P\tau_2(P)\tau_2(\tau_1(P))\tau_1(P)$ ein Parallelogramm.
Folglich sind $\overline{P\tau_1(P)}$ und $\overline{\tau_2(P)\tau_2(\tau_1(P))}$ parallel.
Das heißt $\tau_2(\tau_1(P)) = \tau_1(\tau_2(P))$. $\square$

Verschiebungen vertauschen

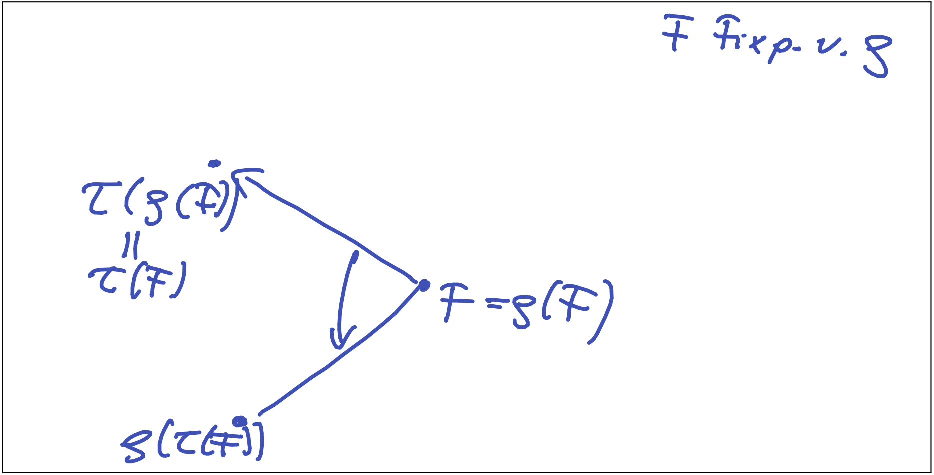
Proposition. Wenn τ_1 und τ_2 Verschiebungen sind, ist $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$.

Beweis. Sei $P \in \mathbb{E}^2$ beliebig.
Die Segmente $\overline{P\tau_2(P)}$ und $\overline{\tau_1(P)\tau_2(\tau_1(P))}$ sind parallel.
Also ist $P\tau_2(P)\tau_2(\tau_1(P))\tau_1(P)$ ein Parallelogramm.
Folglich sind $\overline{P\tau_1(P)}$ und $\overline{\tau_2(P)\tau_2(\tau_1(P))}$ parallel.
Das heißt $\tau_2(\tau_1(P)) = \tau_1(\tau_2(P))$. $\square$

Folgerung. Die Gruppe der Verschiebungen ist abelsch.

Drehungen und Verschiebungen vertauschen nicht

Proposition. Wenn $\tau \neq \mathrm{id}$ eine Verschiebung ist und $\overset{\neq \mathrm{id}}{\rho}$ eine Drehung, dann ist $\underline{\tau \circ \rho} \neq \rho \circ \tau$.



Drehungen und Verschiebungen vertauschen nicht

Proposition. Wenn $\tau \neq \mathrm{id}$ eine Verschiebung ist und ρ eine Drehung, dann ist $\tau \circ \rho \neq \rho \circ \tau$.

Beweis. Sei P der Fixpunkt von ρ.
Wäre $\tau \circ \rho = \rho \circ \tau$, dann wäre insbesondere $\tau(P) = \tau(\rho(P)) = \rho(\tau(P))$, also $\tau(P)$ ein Fixpunkt von ρ.
Der einzige Fixpunkt von ρ ist P.
Aber $\tau(P) \neq P$ weil τ eine Verschiebung und nicht die Identität ist.
Also ist $\tau \circ \rho \neq \rho \circ \tau$. $\square$

Drehungen und Verschiebungen vertauschen nicht

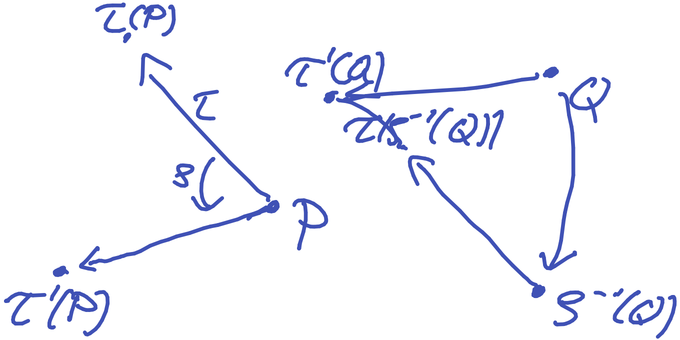
Proposition. Wenn $\tau \neq \mathrm{id}$ eine Verschiebung ist und ρ eine Drehung, dann ist $\tau \circ \rho \neq \rho \circ \tau$.

Beweis. Sei P der Fixpunkt von ρ.
Wäre $\tau \circ \rho = \rho \circ \tau$, dann wäre insbesondere $\tau(P) = \tau(\rho(P)) = \rho(\tau(P))$, also $\tau(P)$ ein Fixpunkt von ρ.
Der einzige Fixpunkt von ρ ist P.
Aber $\tau(P) \neq P$ weil τ eine Verschiebung und nicht die Identität ist.
Also ist $\tau \circ \rho \neq \rho \circ \tau$. □

Folgerung. Die Gruppe der Bewegungen ist nicht abelsch.

$\rho \circ \tau \neq \tau \circ \rho \iff \underbrace{\rho \circ \tau \circ \rho^{-1}}_{\text{Versch.}} \neq \tau$

$\tau' = \rho \circ \tau \circ \rho^{-1}$



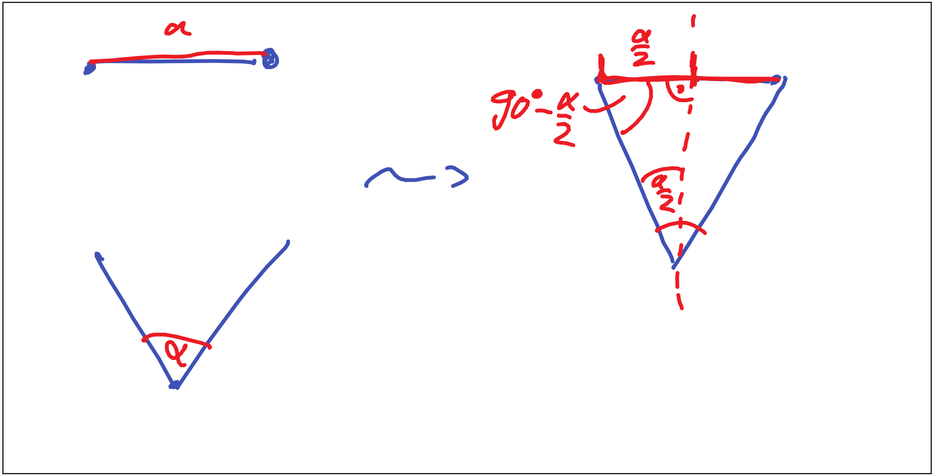
$\rho \neq \underbrace{\tau \circ \rho \circ \tau^{-1}}$

Konjugation: $\alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1}$

ist Konjugat von β um α.

Gleichschenkliges Dreieck mit Grundseite und Winkel

Problem. Konstruiere ein Dreieck PQR mit $|PQ| = |PR|$ wobei $|QR|$ und $\angle RPQ$ vorgegeben sind.



Gleichschenkliges Dreieck mit Grundseite und Winkel

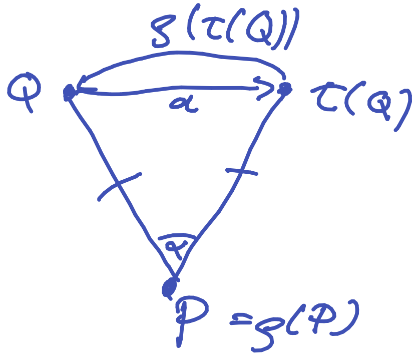
Problem. Konstruiere ein Dreieck PQR mit $|PQ| = |PR|$ wobei $|QR|$ und $\angle RPQ$ vorgegeben sind.

Konstruktion. Konstruiere das Dreieck MPQ wobei $\angle PQM$ die Hälfte des vorgegebenen Winkels ist, $|MP|$ die Hälfte der vorgegebenen Länge und $\angle QMP$ ein rechter Winkel.
Sei R der zweite Schnittpunkt von M_P mit MP. $\Diamond$

Beweis. Da $\angle QMP$ ein rechter Winkel ist, ist $PQM \equiv PRM$.
Damit ist $\angle PQM = 2 \cdot \angle PQM$ wie gefordert.
Außerdem ist $|PR| = 2|MP|$ wie gefordert.
Schließlich ist $|PQ| = |RQ|$. $\square$

Komposition von Verschiebung und Drehung

Proposition. Wenn τ eine Verschiebung ist und ρ eine Drehung, dann ist $\rho \circ \tau$ eine Drehung.



Komposition von Verschiebung und Drehung

Proposition. Wenn τ eine Verschiebung ist und ρ eine Drehung, dann ist $\rho \circ \tau$ eine Drehung.

Beweis. Wenn $\tau = \mathrm{id}$ trivial, also $\tau \neq \mathrm{id}$.
Sei P Fixpunkt von ρ. Wollen Fixpunkt von $\rho \circ \tau$ bestimmen, Q mit $\rho(\tau(Q)) = Q$.
D.h. $\tau(Q) = \rho^{-1}(Q)$ ist.
Sei PQR wie folgt beschrieben ist:

- P ist der Fixpunkt von ρ,
- das Segment $\overline{QR}$ ist parallel zu $\overline{P\tau(P)}$,
- der Winkel $\angle RPQ$ ist der Winkel um den ρ dreht,
- $|PQ| = |QR|$.

Behauptung: Q ist der gesuchte Fixpunkt.
Es ist $\tau(Q) = R$ und $\rho(R) = Q$. Also $\rho \circ \tau(Q) = Q$.
Gäbe es einen weiteren Fixpunkt, wäre die Fixpunktmenge schon die ganze Ebene ($\rho \circ \tau$ ist gerade!). $\square$

Komposition von Verschiebung und Drehung

Proposition. Wenn τ eine Verschiebung ist und ρ eine Drehung, dann ist $\rho \circ \tau$ eine Drehung.

Folgerung. Wenn τ eine Verschiebung ist und ρ eine Drehung, dann ist $\tau \circ \rho$ eine Drehung.

Komposition von Verschiebung und Drehung

Proposition. Wenn τ eine Verschiebung ist und ρ eine Drehung, dann ist $\rho \circ \tau$ eine Drehung.

Folgerung. Wenn τ eine Verschiebung ist und ρ eine Drehung, dann ist $\tau \circ \rho$ eine Drehung.

Beweis. Nach der Proposition ist $\rho^{-1} \circ \tau^{-1}$ eine Drehung ρ'^{-1}. Dann ist aber $\tau \circ \rho = \rho'^{\cancel{-1}}$ ebenfalls eine Drehung. $\square$

$$\rho \circ \tau = \rho'$$

$$\rho^{-1} \circ \tau^{-1} = \rho'^{-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\rho' = \tau \circ \rho$$

Höchstens drei Spiegelungen

Folgerung. Jede Bewegung ist eine Komposition von höchstens drei Spiegelungen.

Höchstens drei Spiegelungen

Folgerung. Jede Bewegung ist eine Komposition von höchstens drei Spiegelungen.

Beweis. Im Beweis des Kongruenzsatzes SSS haben wir gesehen, dass jede Bewegung eine Komposition $\varphi = \sigma \circ \rho \circ \tau$ ist (τ Verschiebung, ρ Drehung, σ Spiegelung oder Identität).

Nach der letzten Proposition ist $\rho \circ \tau$ eine Drehung ρ' und damit Komposition von zwei Spiegelungen σ' und σ''.

Also ist $\varphi = \sigma \circ \sigma' \circ \sigma''$ eine Komposition von höchstens drei Spiegelungen. □

Höchstens drei Spiegelungen

Folgerung. Jede Bewegung ist eine Komposition von höchstens drei Spiegelungen.

Beweis. Im Beweis des Kongruenzsatzes SSS haben wir gesehen, dass jede Bewegung eine Komposition $\varphi = \sigma \circ \rho \circ \tau$ ist (τ Verschiebung, ρ Drehung, σ Spiegelung oder Identität).

Nach der letzten Proposition ist $\rho \circ \tau$ eine Drehung ρ' und damit Komposition von zwei Spiegelungen σ' und σ''.

Also ist $\varphi = \sigma \circ \sigma' \circ \sigma''$ eine Komposition von höchstens drei Spiegelungen. □

Folgerung. Jede gerade Bewegung ist eine Komposition von höchstens zwei Spiegelungen.

Höchstens drei Spiegelungen

Folgerung. Jede Bewegung ist eine Komposition von höchstens drei Spiegelungen.

Beweis. Im Beweis des Kongruenzsatzes SSS haben wir gesehen, dass jede Bewegung eine Komposition $\varphi = \sigma \circ \rho \circ \tau$ ist (τ Verschiebung, ρ Drehung, σ Spiegelung oder Identität).

Nach der letzten Proposition ist $\rho \circ \tau$ eine Drehung ρ' und damit Komposition von zwei Spiegelungen σ' und σ''.

Also ist $\varphi = \sigma \circ \sigma' \circ \sigma''$ eine Komposition von höchstens drei Spiegelungen. □

Folgerung. Jede gerade Bewegung ist eine Komposition von höchstens zwei Spiegelungen.

Folgerung. Jede gerade Bewegung ist eine Verschiebungen oder eine Drehung.

Was fehlt noch?

Eigenschaften von Bewegungen, die noch möglich sind:

- Produkt von nicht weniger als drei Spiegelungen

Was fehlt noch?

Eigenschaften von Bewegungen, die noch möglich sind:

- Produkt von nicht weniger als drei Spiegelungen
- Ungerade

Was fehlt noch?

Eigenschaften von Bewegungen, die noch möglich sind:

- Produkt von nicht weniger als drei Spiegelungen
- Ungerade
- Ohne Fixpunkt

Was fehlt noch?

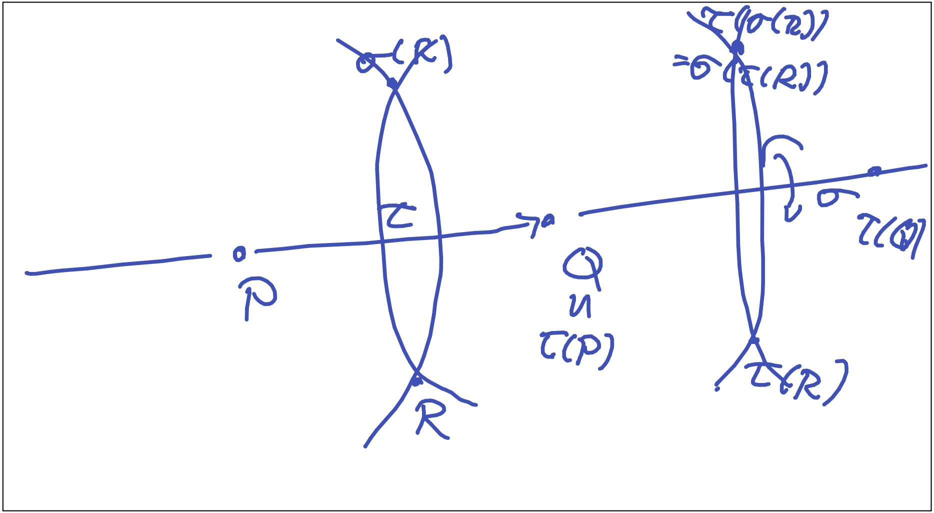
Eigenschaften von Bewegungen, die noch möglich sind:

- Produkt von nicht weniger als drei Spiegelungen
- Ungerade
- Ohne Fixpunkt

Bewegungen mit diesen Eigenschaften heißen Gleitspiegelungen.

Kommutierende Spiegelungen und Verschiebungen

Proposition. Seien P und Q Punkte, sei τ die Verschiebung, die P auf Q abbildet, und σ die Spiegelung an PQ. Dann ist $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$.



Kommutierende Spiegelungen und Verschiebungen

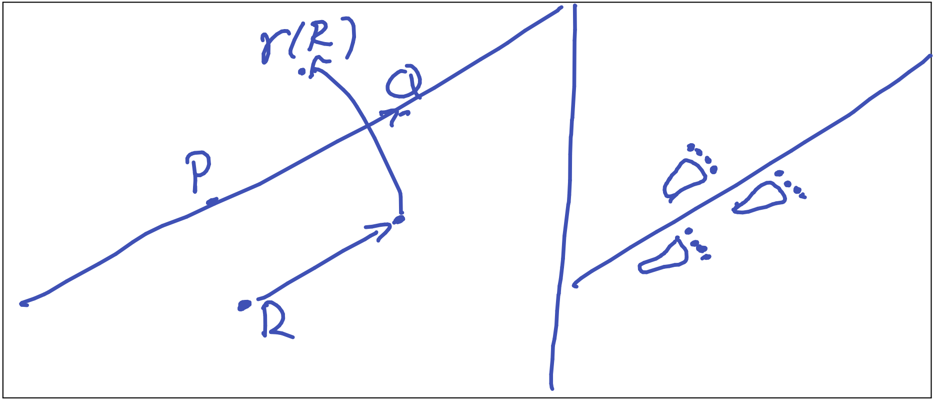
Proposition. Seien P und Q Punkte, sei τ die Verschiebung, die P auf Q abbildet, und σ die Spiegelung an PQ. Dann ist $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$.

Beweis. Sei R ein beliebiger Punkt.
Wenn $R \in PQ$ ist $\sigma(R) = R$ und $\sigma(\tau(R)) = \tau(R)$, und die Behauptung ist klar.
Wir betrachten also den Fall, $R \notin PQ$.
Die Verschiebung τ bildet jeden der Halbräume von PQ auf sich ab.
Die Spiegelung σ vertauscht die beiden Halbräume.
Die Punkte R und $\sigma(R)$ sind die beiden Schnittpunkte von P_R und Q_R.
Die Punkte $\tau(R)$ und $\sigma(\tau(R))$ sind die beiden Schnittpunkte von $P_{\tau(R)}$ und $Q_{\tau(R)}$.
Da $\tau(\sigma(R))$ der von $\tau(R)$ verschiedene Schnittpunkt von $P_{\tau(R)}$ und $Q_{\tau(R)}$ ist, ist $\tau(\sigma(R)) = \sigma(\tau(R))$. $\square$

Gleitspiegelungen

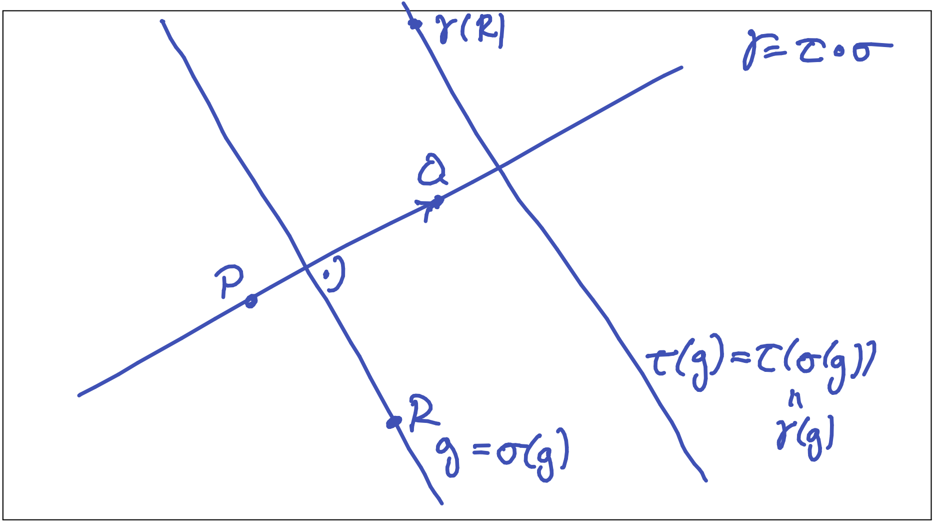
Die *Gleitspiegelung mit Achse PQ, die P auf Q abbildet*, ist die Abbildung $\gamma = \tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$ wobei τ die Verschiebung ist, die *P* auf *Q* abbildet und σ die Spiegelung and *PQ*.

Wenn *P* = *Q*, ist $\tau = \mathrm{id}$ und $\gamma = \sigma$ ist eine Spiegelung. Um diesen Fall auszuschließen sagen wir, dass γ eine *echte Gleitspiegelung* ist, wenn *P* $\neq$ *Q* ist.



Gleitspiegelungen, Eigenschaften

Proposition. Eine echte Gleitspiegelung ist die Komposition von (nicht weniger als) drei Spiegelungen. Sie hat keinen Fixpunkt.



Gleitspiegelungen, Eigenschaften

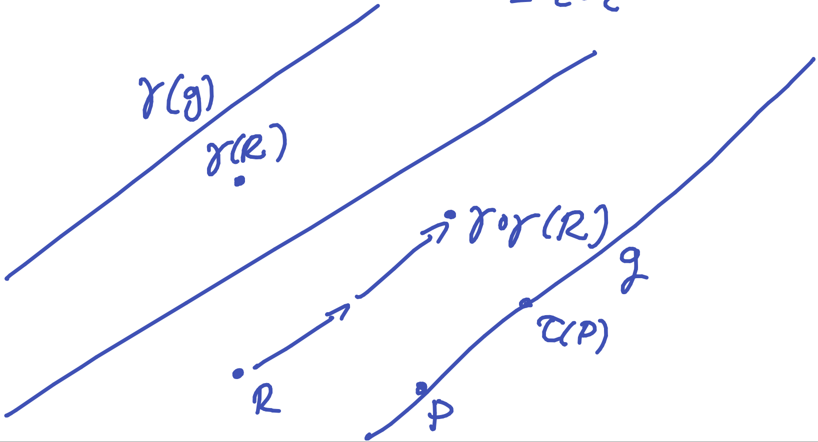
Proposition. Eine echte Gleitspiegelung ist die Komposition von (nicht weniger als) drei Spiegelungen. Sie hat keinen Fixpunkt.

Beweis. Sei $\gamma = \sigma \circ \tau$ und P und Q wie gehabt.
γ hat keinen Fixpunkt: Ist $g \perp PQ$, dann ist $\sigma(g) = g$ und $\tau(g) \parallel g$, $\tau(g) \neq g$ (d.h. $g \cap \tau(g) = \emptyset$).
Ist jetzt R beliebig und g das Lot auf PQ durch R, dann ist $R \in g$ und $\gamma(R) \in \gamma(g)$, also $R \neq \gamma(R)$.
γ ist ungerade und hat keinen Fixpunkt. Also sind mindestens drei Spiegelungen nötig. $\square$

Gesuche Bewegungen sind Gleitspiegelungen

Proposition. Eine ungerade Bewegung, die keine Spiegelung ist, ist eine echte Gleitspiegelung.

$$\gamma = \sigma \circ \tau, \quad \gamma \circ \gamma = \sigma \circ \tau \circ \sigma \circ \tau = \sigma \circ \sigma \circ \tau \circ \tau$$
$$= \tau \circ \tau$$



Gesuche Bewegungen sind Gleitspiegelungen

Proposition. Eine ungerade Bewegung, die keine Spiegelung ist, ist eine echte Gleitspiegelung.

Beweis. Sei φ eine ungerade Bewegung, die keine Spiegelung ist.
Die Bewegung $\varphi \circ \varphi$ ist eine Verschiebung (gerade, hätte sie einen Fixpunkt, hätte φ auch einen.
Sei τ Verschiebung mit $\tau \circ \tau = \varphi \circ \varphi$.
Sei $g = P\tau(P)$ und $h = \varphi(g) = \varphi(P)\varphi(\tau(P))$.
Dann ist $\varphi(h) = \varphi(\varphi(g)) = \tau(\tau(g)) = g$. Die Abbildung φ vertauscht also die beiden Geraden g und h.
φ hat keinen Fixpunkt, also $g \parallel h$.
Insbesondere bildet φ jede Gerade, die parallel zu g ist, auf eine Gerade parallel zu g ab.
Die Gerade in der Mitte zwischen g und h ist die gesuchte Achse ℓ. $\square$

Klassifikation von Bewegungen

Typ	Fixpunkt-menge	Komposition von ... Spiegelungen	gerade/ ungerade
Identität	Ebene		
Spiegelung			
echte Drehung			
echte Verschiebung			
echte Gleitspiegelung			

Klassifikation von Bewegungen

Typ	Fixpunkt-menge	Komposition von …Spiegelungen	gerade/ ungerade
Identität	Ebene	0	
Spiegelung			
echte Drehung			
echte Verschiebung			
echte Gleitspiegelung			

Klassifikation von Bewegungen

Typ	Fixpunkt-menge	Komposition von …Spiegelungen	gerade/ ungerade
Identität	Ebene	0	gerade
Spiegelung			
echte Drehung			
echte Verschiebung			
echte Gleitspiegelung			

Klassifikation von Bewegungen

Typ	Fixpunkt-menge	Komposition von …Spiegelungen	gerade/ ungerade
Identität	Ebene	0	gerade
Spiegelung	Gerade		
echte Drehung			
echte Verschiebung			
echte Gleitspiegelung			

Klassifikation von Bewegungen

Typ	Fixpunkt-menge	Komposition von …Spiegelungen	gerade/ ungerade
Identität	Ebene	0	gerade
Spiegelung	Gerade	1	
echte Drehung			
echte Verschiebung			
echte Gleitspiegelung			

Klassifikation von Bewegungen

Typ	Fixpunkt-menge	Komposition von …Spiegelungen	gerade/ ungerade
Identität	Ebene	0	gerade
Spiegelung	Gerade	1	ungerade
echte Drehung			
echte Verschiebung			
echte Gleitspiegelung			

Klassifikation von Bewegungen

Typ	Fixpunkt-menge	Komposition von ... Spiegelungen	gerade/ ungerade
Identität	Ebene	0	gerade
Spiegelung	Gerade	1	ungerade
echte Drehung	Punkt		
echte Verschiebung			
echte Gleitspiegelung			

Klassifikation von Bewegungen

Typ	Fixpunkt-menge	Komposition von ...Spiegelungen	gerade/ ungerade
Identität	Ebene	0	gerade
Spiegelung	Gerade	1	ungerade
echte Drehung	Punkt	2	
echte Verschiebung			
echte Gleitspiegelung			

Klassifikation von Bewegungen

Typ	Fixpunkt-menge	Komposition von ... Spiegelungen	gerade/ ungerade
Identität	Ebene	0	gerade
Spiegelung	Gerade	1	ungerade
echte Drehung	Punkt	2	gerade
echte Verschiebung			
echte Gleitspiegelung			

Klassifikation von Bewegungen

Typ	Fixpunkt-menge	Komposition von ... Spiegelungen	gerade/ ungerade
Identität	Ebene	0	gerade
Spiegelung	Gerade	1	ungerade
echte Drehung	Punkt	2	gerade
echte Verschiebung	leer		
echte Gleitspiegelung			

Klassifikation von Bewegungen

Typ	Fixpunkt-menge	Komposition von …Spiegelungen	gerade/ ungerade
Identität	Ebene	0	gerade
Spiegelung	Gerade	1	ungerade
echte Drehung	Punkt	2	gerade
echte Verschiebung	leer	2	
echte Gleitspiegelung			

Klassifikation von Bewegungen

Typ	Fixpunkt-menge	Komposition von ... Spiegelungen	gerade/ ungerade
Identität	Ebene	0	gerade
Spiegelung	Gerade	1	ungerade
echte Drehung	Punkt	2	gerade
echte Verschiebung	leer	2	gerade
echte Gleitspiegelung			

Klassifikation von Bewegungen

Typ	Fixpunkt-menge	Komposition von …Spiegelungen	gerade/ ungerade
Identität	Ebene	0	gerade
Spiegelung	Gerade	1	ungerade
echte Drehung	Punkt	2	gerade
echte Verschiebung	leer	2	gerade
echte Gleitspiegelung	leer		

Klassifikation von Bewegungen

Typ	Fixpunkt-menge	Komposition von …Spiegelungen	gerade/ ungerade
Identität	Ebene	0	gerade
Spiegelung	Gerade	1	ungerade
echte Drehung	Punkt	2	gerade
echte Verschiebung	leer	2	gerade
echte Gleitspiegelung	leer	3	

Klassifikation von Bewegungen

Typ	Fixpunkt-menge	Komposition von …Spiegelungen	gerade/ ungerade
Identität	Ebene	0	gerade
Spiegelung	Gerade	1	ungerade
echte Drehung	Punkt	2	gerade
echte Verschiebung	leer	2	gerade
echte Gleitspiegelung	leer	3	ungerade