Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

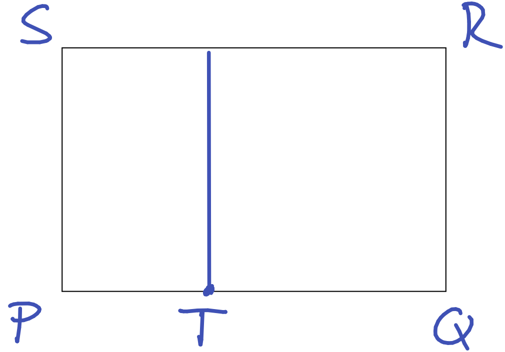
Sommersemester 2018

Der goldene Schnitt

Stefan Witzel

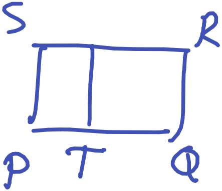
Goldene Rechtecke

Ein goldenes Rechteck ist ein Rechteck, von dem man ein Quadrat abziehen kann, so dass das resultierende Rechteck ähnlich zum ursprünglichen ist.



Goldener Schnitt

Rechtecke sind ähnlich, wenn ihre Seitenlängen das gleiche Verhältnis haben. Damit *PQRS* golden ist muss also



$$\frac{|PQ|}{|QR|} = \frac{\overset{QR}{|\cancel{PQ}|}}{|PT|} = \frac{\overset{QR}{|\cancel{PQ}|}}{|PQ| - |QR|}$$

sein.

Setzen wir $\varphi = |PQ|/|QR|$ erhalten wir die Gleichung

$$\varphi = \frac{1}{\varphi - 1}.$$

Die Lösung $\varphi > 1$ dieser Gleichung ist der goldene Schnitt.

Lösen der Gleichung ergibt

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$$\varphi = \frac{1}{\varphi - 1} \quad | \cdot (\varphi - 1)$$

$$\varphi \cdot (\varphi - 1) = 1$$

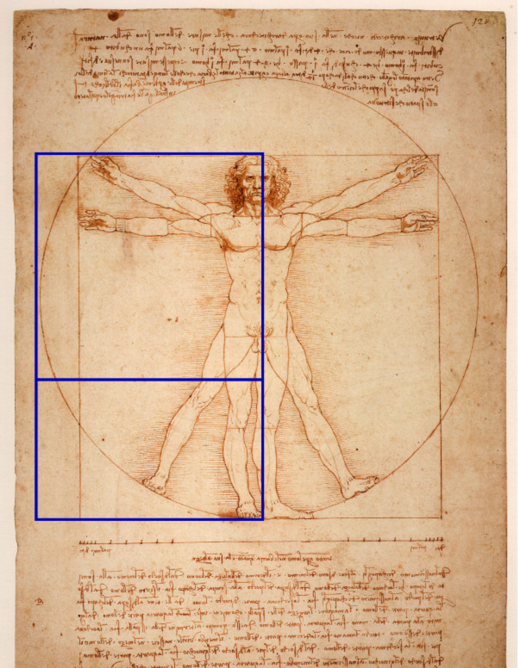
$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{1}{4} + 1}_{\frac{5}{4}}}$$

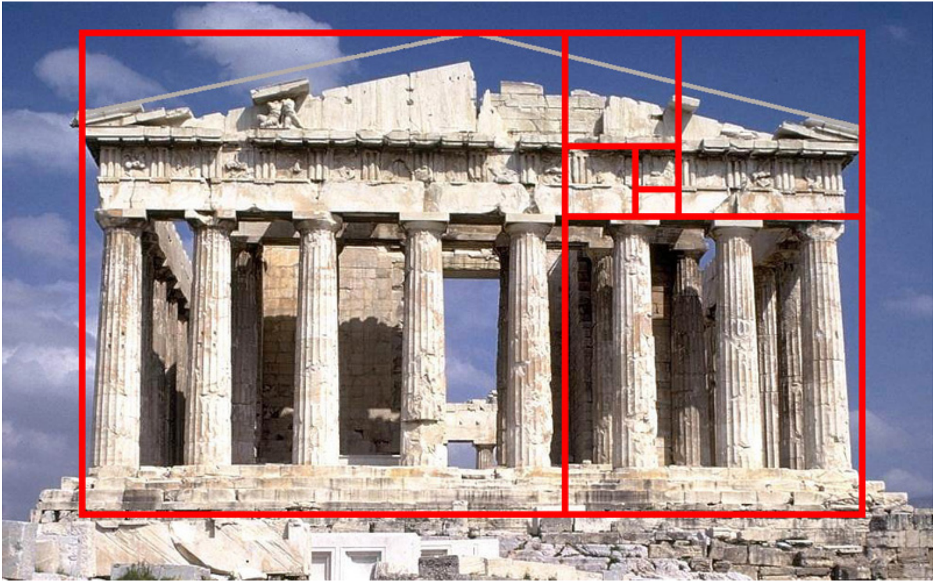
$$= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$ goldener Schnitt

Der goldene Schnitt in der Kunst

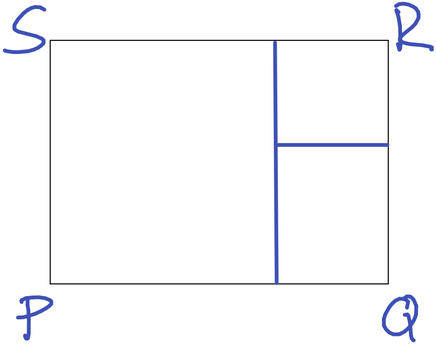


Der goldene Schnitt in der Architektur



DIN-Rechtecke

Ein DIN-Rechteck ist ein Rechteck, von dem man ein Quadrat abziehen kann, dann noch einmal ein Quadrat abziehen, so dass das daraus resultierende Rechteck ähnlich zum ursprünglichen ist.



DIN-Schnitt

Wenn ein DIN-Rechteck Seitenlängen $|PQ| > |QR|$ hat, sind die Seitenlängen des kleinen Rechtecks $|PQ| - |QR|$ und $|QR| - (|PQ| - |QR|) = 2|QR| - |PQ|$.

Das heißt, das Seitenverhältnis $\delta := |PQ|/|QR|$ erfüllt

$$\delta = \frac{|PQ|}{|QR|} = \frac{2|QR| - |PQ|}{|PQ| - |QR|} = \frac{2-\delta}{\delta - 1}.$$

Wir nennen die positive Lösung δ den DIN-Schnitt.

Die Gleichung kann man umformen zu $\delta^2 = 2$ und erhält $\delta = \sqrt{2}$.

$\delta(\delta - 1) = 2 - \delta$

$\delta^2 - \delta + \delta - 2 = 0$

$\delta^2 - 2 = 0$

$\delta = \sqrt{2}$

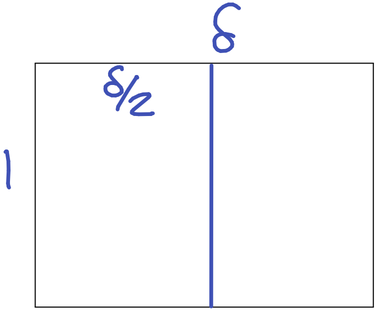
Das „DIN“ in DIN-Rechtecke

Die definierende Gleichung für δ kann man weiter umformen zu $\delta = 2/\delta$ oder

$$\frac{|PQ|}{|QR|} = \frac{|QR|}{\frac{1}{2}|PQ|}.$$

Das heißt, DIN-Rechtecke sind auch genau diejenigen Rechtecke, deren Hälfte ähnlich zum ursprünglichen Rechteck ist.

$$\frac{\delta}{1} = \frac{1}{\delta/2}$$



Teilen eines Segments

Ein Segment PQ wird von $T \in \overline{PQ}$ im Verhältnis α geteilt wenn

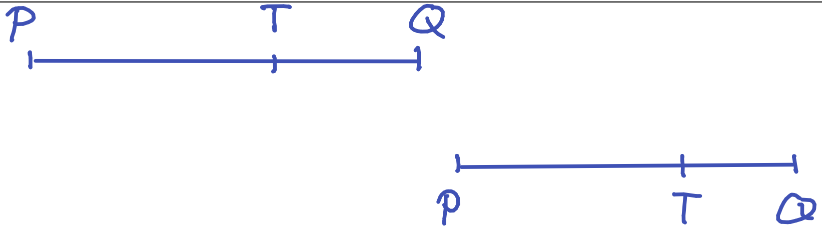
$$|PT| = \alpha |PQ|.$$

Das heißt T teilt $\overline{PQ}$ im goldenen Schnitt wenn $\overline{PQ}/\overline{PT} = \varphi$, d.h. wenn gillt

$$\frac{|PQ|}{|PT|} = \frac{|PT|}{|PQ| - |PT|}.$$

Und T teilt $\overline{PQ}$ im DIN-Schnitt wenn $\overline{PQ}/\overline{PT} = \delta$, d.h. wenn gillt

$$\frac{|PQ|}{|PT|} = \frac{|PT|}{\frac{1}{2}|PQ|}.$$



Goldene Dreiecke, DIN-Dreiecke

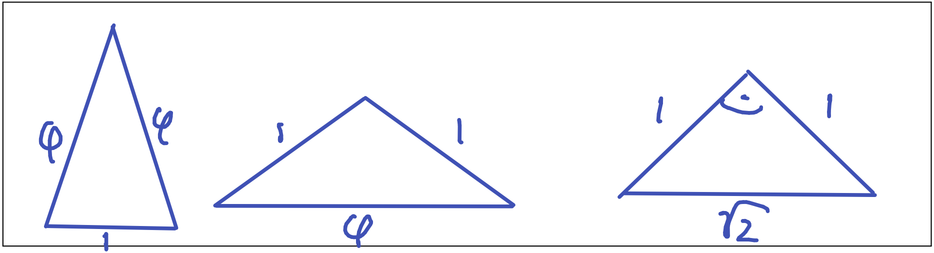
Ein goldenes Dreieck ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit $|AB| = |AC|$

- und $|AB|/|BC| = \varphi$ (spitzwinklig)
- oder $|BC|/|AB| = \varphi$ (stumpfwinklig).

Ein DIN-Dreieck ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit $|AB| = |AC|$

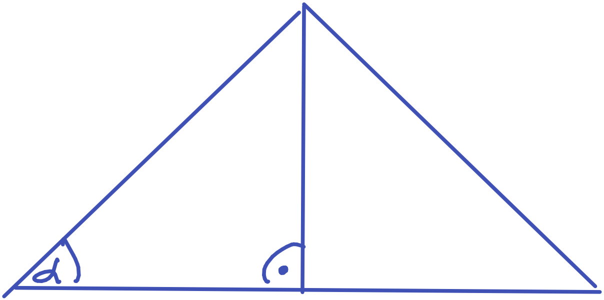
- und $|AB|/|BC| = \delta$ (spitzwinklig)
- oder $|BC|/|AB| = \delta$.

Im zweiten Fall ist das Dreieck rechtwinklig (Pythagoras rückwärts!).



DIN-Dreieck zerlegen

Ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck lässt sich zerlegen in zwei rechtwinklige, gleichschenklige Dreiecke.

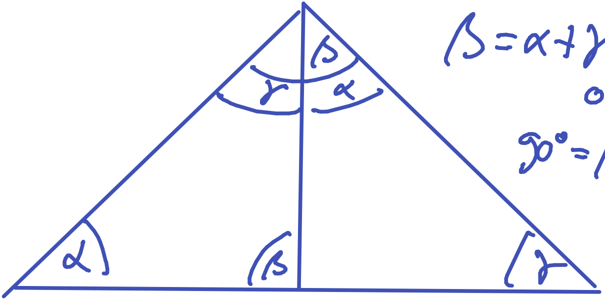


DIN-Dreieck zerlegen

Ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck lässt sich zerlegen in zwei rechtwinklige, gleichschenklige Dreiecke.

Aus dieser Eigenschaft allein können wir bereits die Winkel rekonstruieren:

$$\alpha = 45^\circ \quad \text{und} \quad \beta = 90^\circ.$$



$\beta = \alpha + \gamma = 2\alpha$

oder

$90^\circ = \beta = \alpha + \gamma$

Konstruktionen mit DIN-Schnitt

Wir können $\sqrt{2}$ konstruieren.

$\Rightarrow$ Wir können ein Dreieck konstruieren,
das sich in zwei Dreiecke zerlegen lässt,
die zum ursprünglichen ähnlich sind.

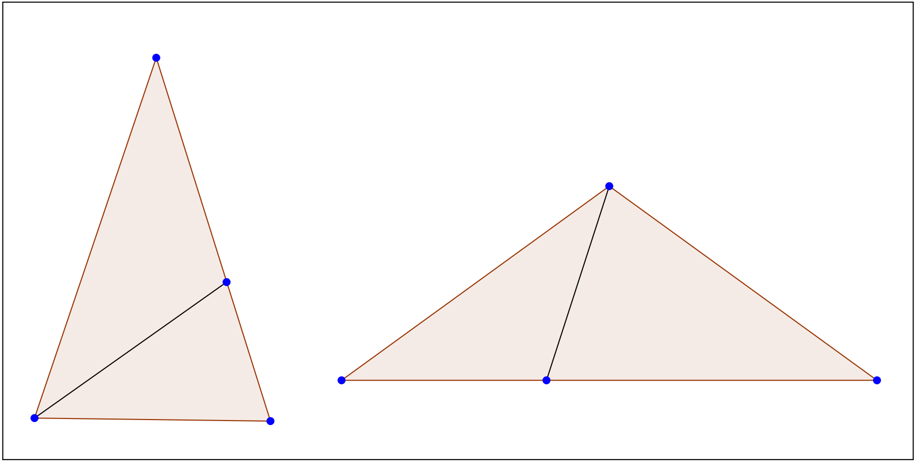
Ein solches Dreieck hat einen 45°-Winkel.

$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ Wir können einen 45°-Winkel konstruieren.

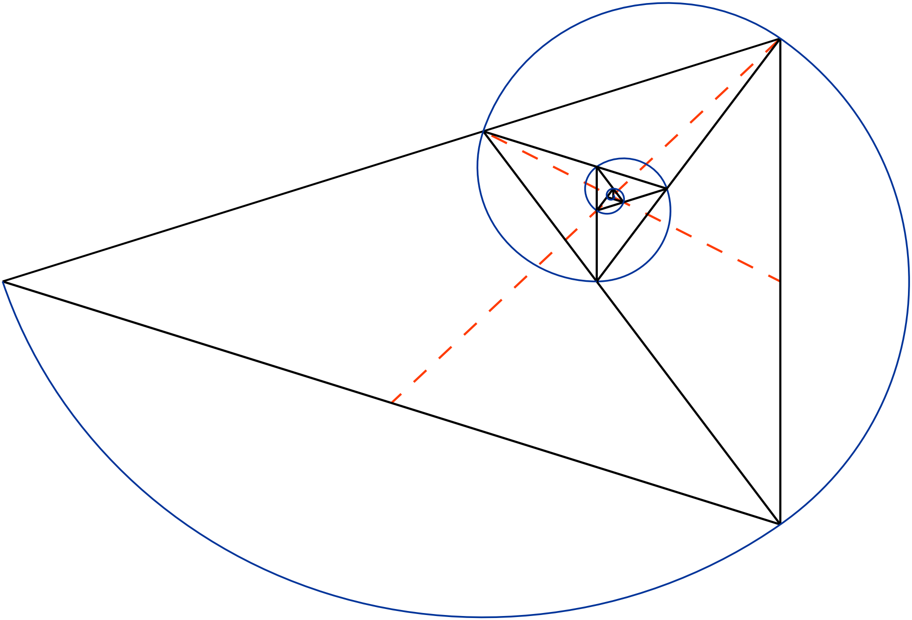
Goldene Dreiecke zerlegen

Empirisch gilt etwas ähnliches für goldene Dreiecke:

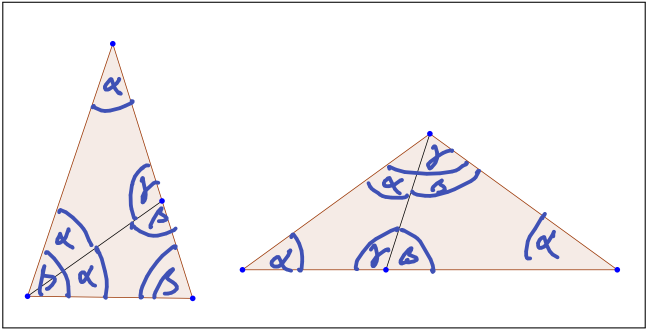


Satz (Euklid). Jedes goldene Dreieck lässt sich zerlegen in ein spitzwinkliges und ein stumpfwinkliges goldenes Dreieck.

Logarithmische Spirale



Konsequenzen der Zerlegung



Es ist

$$\alpha + 2\beta = 180^\circ \quad 2\alpha + \gamma = 180^\circ \quad \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Die erste plus zweimal die zweite minus zweimal die dritte ergibt

$$5\alpha = 180^\circ.$$

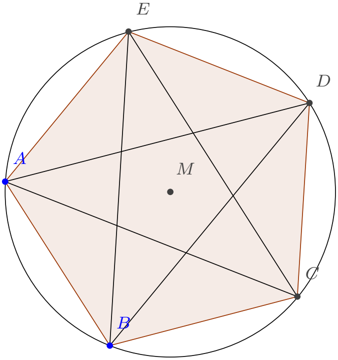
Also

$$\alpha = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ, \quad \beta = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{3}{5} \cdot 180^\circ = 108^\circ.$$

Goldene Dreiecke und regelmäßige Fünfecke

$$\alpha = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ, \quad \beta = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{3}{5} \cdot 180^\circ = 108^\circ.$$

Folgerung. Wenn wir goldene Dreiecke (bzw. den goldenen Schnitt) konstruieren können, können wir auch regelmäßige Fünfecke konstruieren.



Konstruktion von Quadratwurzeln

Problem. Konstruiere O, I, P so dass $|OP|/|OI| = \sqrt{2}$.

Konstruktion. Konstruiere ein Quadrat $OIPS$. $\Diamond$

Beweis. Sei M der Mittelpunkt von $\overline{OP}$. Nach dem Kathetensatz ist $|OI|^2 = |OP| \cdot |OM|$. Aber $|OM| = 1/2|OP|$, also ist $|OP|^2/|OI|^2 = 2$. $\square$

Diese Konstruktion verallgemeinert sich auf die Konstruktion von $\sqrt{d}$ für beliebiges d (Übung).

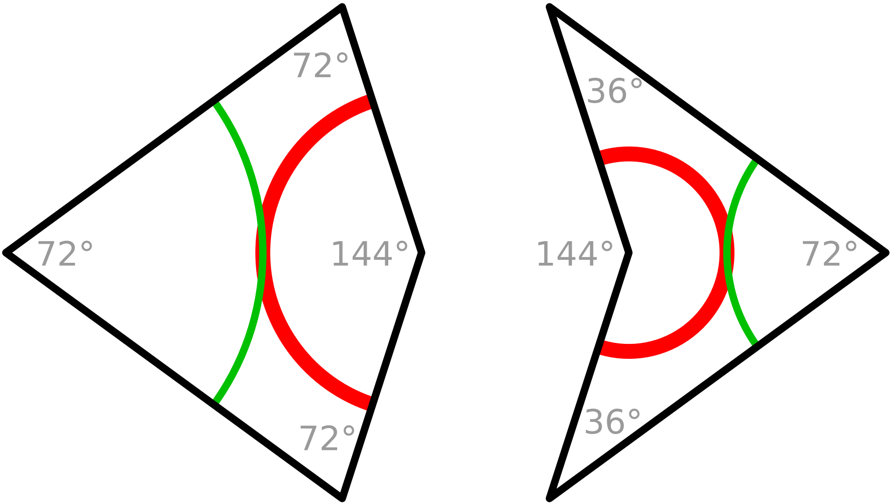
Die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

hat Lösungen $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

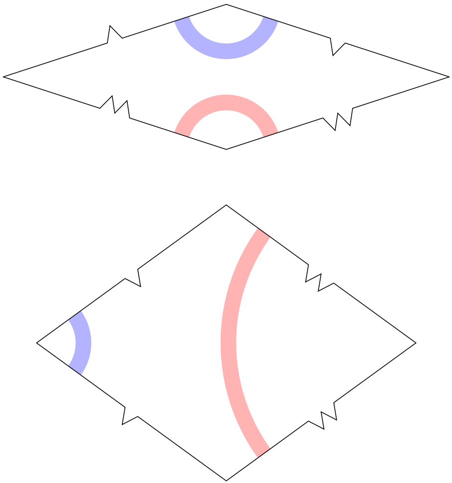
Folgerung. Wenn $p^2/4 - q > 0$ können wir die Lösungen $x_{1,2}$ konstruieren.

Penrose-Teile



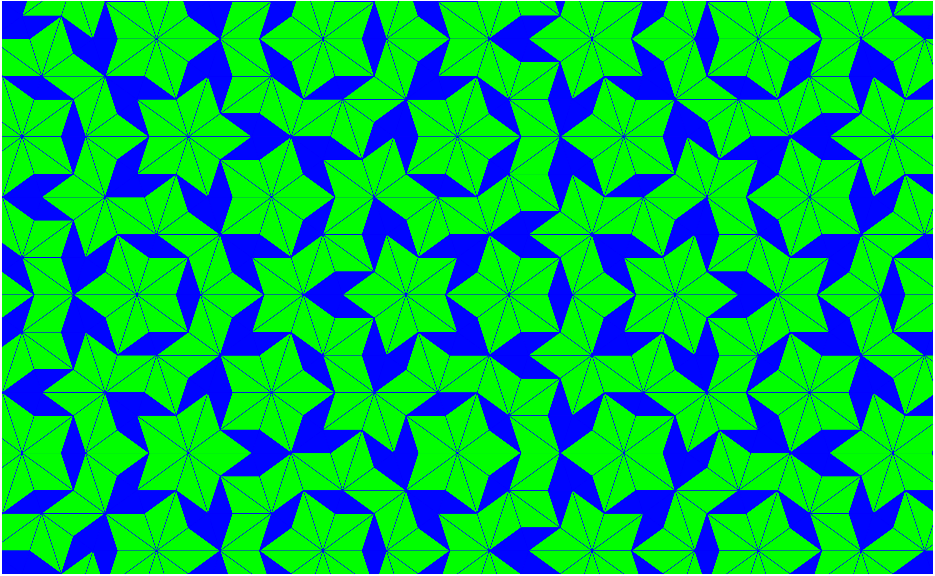
https://en.wikipedia.org/wiki/User_talk:Geometry_guy

Penrose-Teile



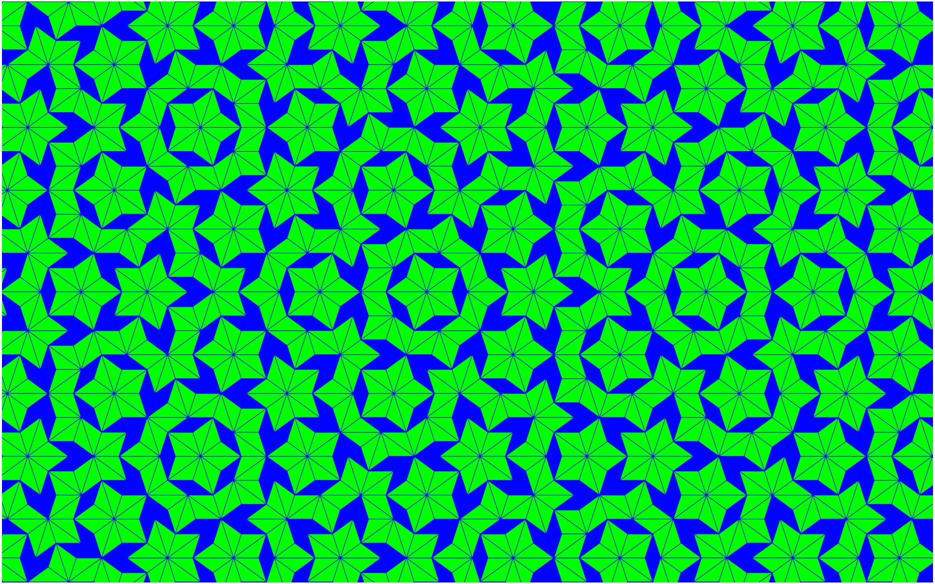
https://en.wikipedia.org/wiki/User_talk:Geometry_guy

Penrose-Parkettierung



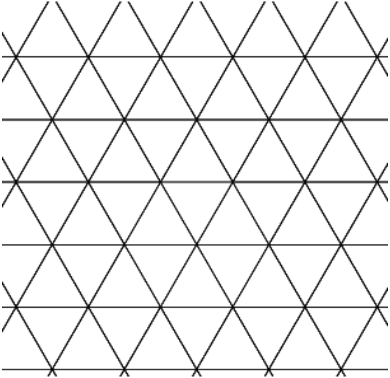
http://penrose.dynkarken.com

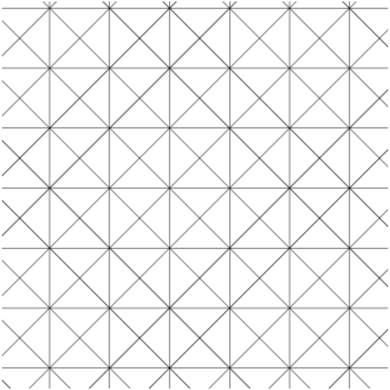
Penrose-Parkettierung



http://penrose.dynkarken.com

Kristalle





Quasi-Kristalle