Universität Bielefeld

Elementare Geometrie

Sommersemester 2018

Rückblick

Stefan Witzel

Outline

Fundamentale Objekte und Eigenschaften

Objekte:

- Punkte, Abstand
- Geraden, Segmente, Strahlen, Halbräume
- Kreise
- Winkel (geometrisch und algebraisch)
- Dreiecke, n-Ecke
- Bewegungen: Spiegelungen, Drehungen, Verschiebungen, Gleitspiegelungen

Eigenschaften:

- Schnittpunkte (Anzahl, Lage)
- Parallelität
- Kongruenz
- Ähnlichkeit

Eindeutigkeit von Bewegungen

Satz. Zwei Dreiecke werden durch höchstens eine Bewegung ineinander überführt.

Proposition. Die Fixpunktmenge einer Bewegung ist ein Unterraum.

Proposition. Ein Unterraum ist leer, ein einzelner Punkt, eine Gerade, oder die ganze Ebene.

Existenz von Bewegungen

Satz (Kongruenzsätze). Es existiert eine Bewegung, die PQR in $P'Q'R'$ überführt, genau dann, wenn… SSS, SWS, WSW, WWS.

Proposition. Segmente sind kongruent wenn sie gleich lang sind.

Winkel

Proposition (Nebenwinkelsatz). Nebenwinkeln von kongruenten Winkeln sind kongruent.

Proposition (Gegenwinkelsatz). Gegenwinkel sind zueinander kongruent.

Winkelmaß

Proposition (Winkelsumme). Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°.

Elementare Konstruktionen

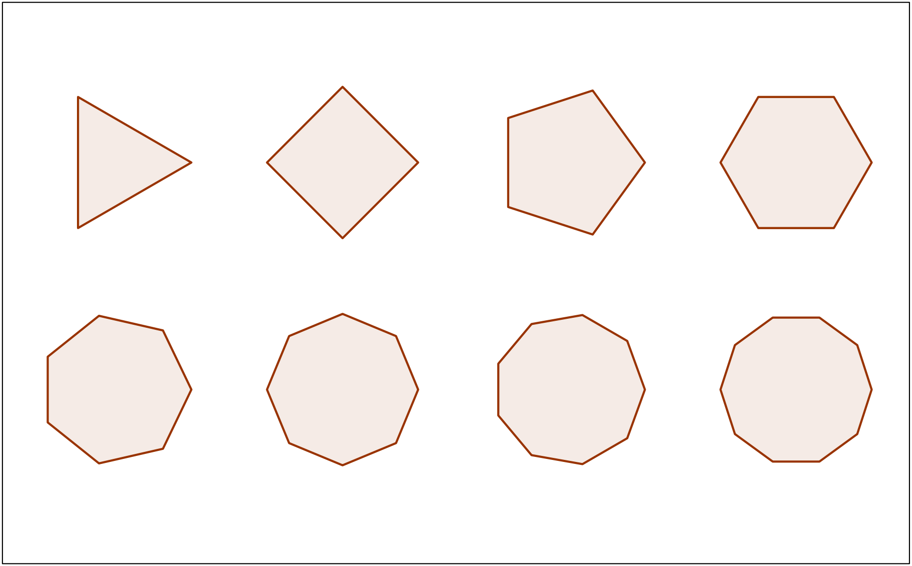
- Mittelsenkrechte (Mittelpunkt)
- Winkelhalbierende
- Lot (Senkrechte durch Punkt)
- Winkel übertragen

Outline

Vierecke

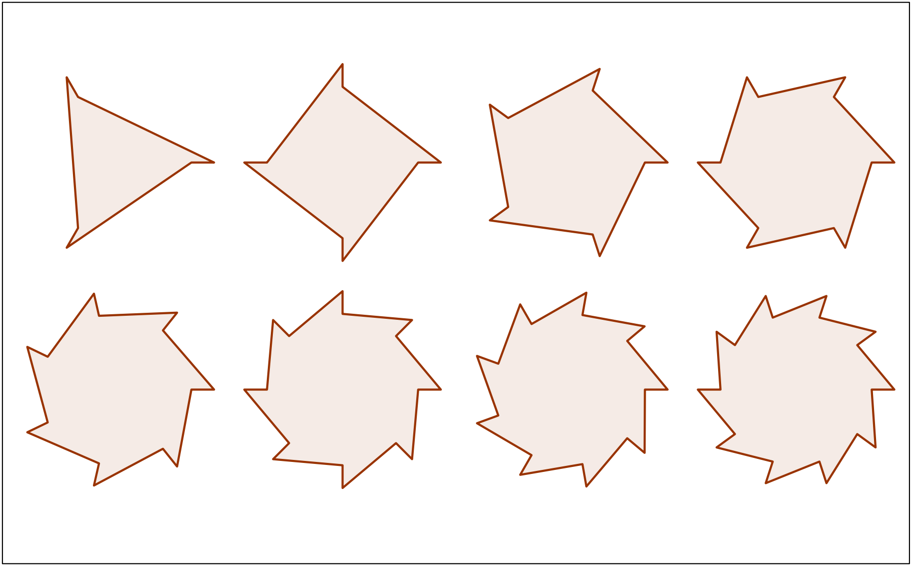
- Viereck
- Trapez
- Drachenviereck
- Parallelogramm
- Raute
- Rechteck
- Quadrat

regelmäßige *n*-Ecke



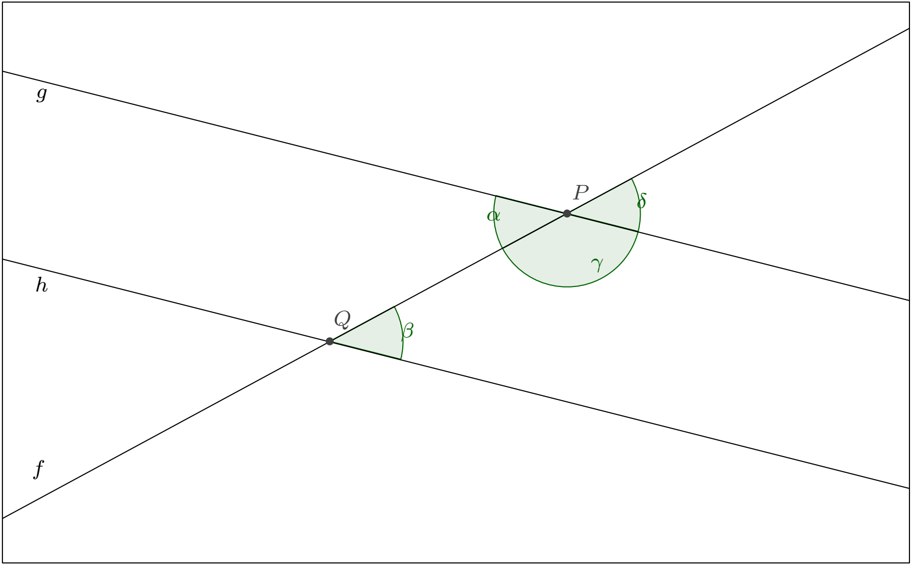
Symmetriegruppe: D_n.

regelmäßige Sägeblätter

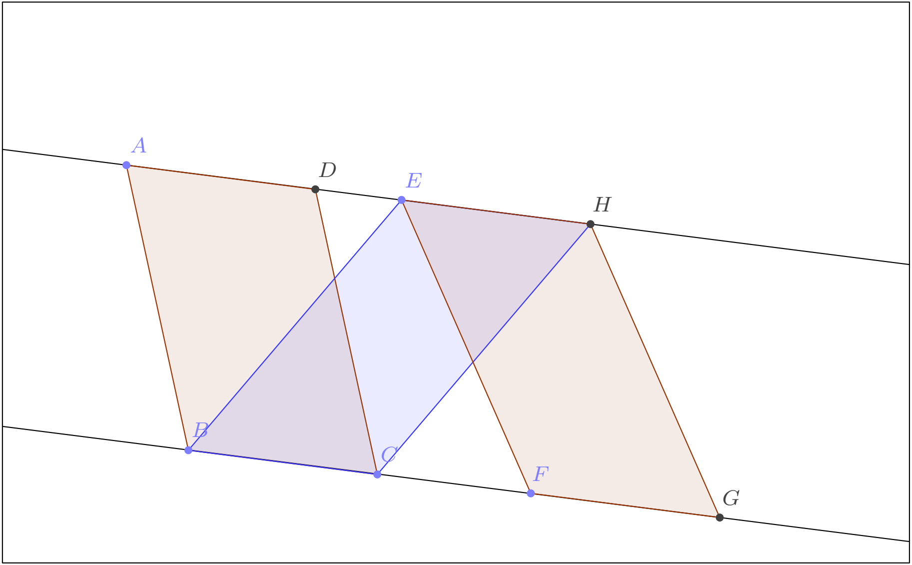


Symmetriegruppe: C_n.

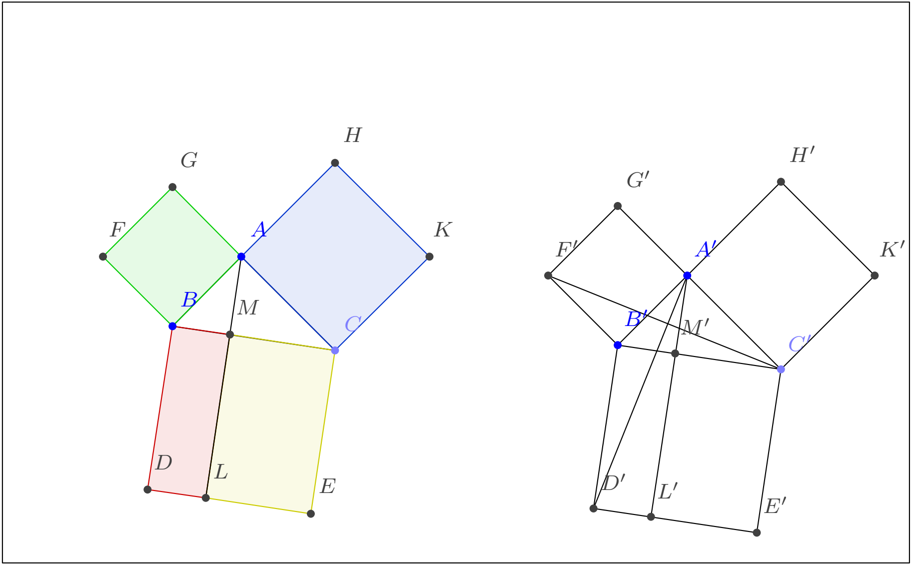
Parallelen und Winkel



Flächeninhalt von Dreieck und Parallelogramm



Kathetensatz, Satz des Pythagoras



Übungsaufgaben

- Aufgabe 4.4
- Aufgabe 5.1
- Aufgabe 5.2
- Aufgabe 5.3
- Aufgabe 5.4
- Aufgabe 6.4

Outline

Komposition, Konjugation von Bewegungen, Involutionen

Wenn φ eine ... ist und ψ eine ..., dann ist $\varphi \circ \psi$ eine ....

- $\varphi =$ Spiegelung, $\psi =$ Spiegelung
- $\varphi =$ Verschiebung, $\psi =$ Verschiebung
- $\varphi =$ Verschiebung, $\psi =$ Drehung (oder umgekehrt)

Wenn φ eine Bewegung ist und ψ eine ..., dann ist $\varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1}$ eine ... und die Parameter sind φ(Parameter von ψ).

Jede Spiegelung σ ist eine Involution, also ist $\sigma^{-1} = \sigma$.

Gerade, ungerade Bewegungen, Parität

Jede Bewegung φ hat eine Parität $\operatorname{par} \varphi \in \{0, 1\}$, die beschreibt, ob sie gerade oder ungerade ist.

Gerade $\circ$ gerade $=$ gerade, ungerade $\circ$ gerade $=$ ungerade, ...

Satz. Wenn ℓ eine Gerade ist und φ eine Bewegung, dann ist $\varphi \circ \sigma_\ell^{\operatorname{par} \varphi}$ eine gerade Bewegung.

Gerade Bewegungen, Drehwinkel

Jeder gerade Bewegung φ hat einen Drehwinkel $\operatorname{ang}\varphi$ (ein algebraischer Winkel).

Proposition. $\operatorname{ang}(\varphi \circ \psi) = \operatorname{ang}\varphi + \operatorname{ang}\psi$.

Satz. Wenn P ein Punkt ist und φ eine gerade Bewegung, dann ist $\varphi \circ \rho_{P,\operatorname{ang}\varphi}^{-1}$ eine Verschiebung.

Verschiebungen, Vektoren

Jeder Verschiebung τ hat einen Verschiebungsvektor $\operatorname{vec}\tau$.

Zwei Verschiebungen sind gleich, wenn sie gleichen Verschiebungsvektor haben.

Proposition. $\operatorname{vec}(\varphi \circ \psi) = \operatorname{vec}\varphi + \operatorname{vec}\psi$.

Vektoren können addiert und subtrahiert werden indem man Parallelogramme konstruiert.

Klassifikation von Bewegungen

Typ	Fixpunktmenge	Komposition von ... Spiegelungen	gerade/ ungerade
Identität	Ebene	0	gerade
Spiegelung	Gerade	1	ungerade
echte Drehung	Punkt	2	gerade
echte Verschiebung	leer	2	gerade
echte Gleitspiegelung	leer	3	ungerade

Beispiel: Bewegung konstruieren

Aufgabe. Die Gleitspiegelung φ bildet P auf P' ab und Q auf Q'. Konstruieren Sie $\varphi(R)$.

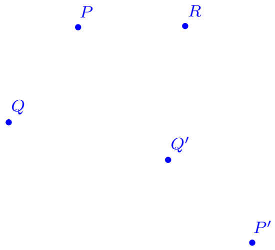
$\sigma \circ \sigma \circ \varphi = \varphi$ $\quad$ $\sigma(\varphi(R))$ $\quad$ $\sigma(\sigma(\varphi(R)))$

Idee: sei σ eine Spiegelung (z.B. an PQ). Dann ist $\sigma \circ \varphi$ eine gerade Bewegung. Konstruiere erst $R'' = \sigma(\varphi(R))$. Dann ist $\varphi(R) = \sigma(R'')$.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, mapsto, "\varphi"] \arrow[dr, "\sigma\circ\varphi"'] & P' \arrow[d, leftrightarrow, "\sigma"] \\ & P'' \end{tikzcd}$$

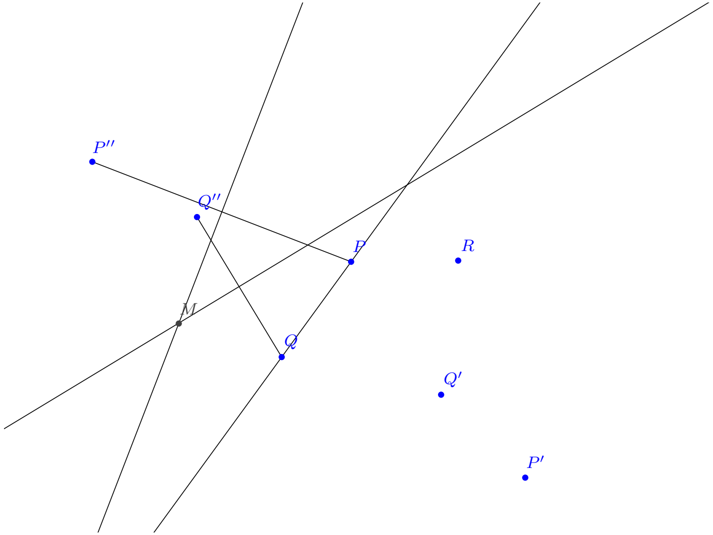
Beispiel: Bewegung konstruieren

Aufgabe. Die Gleitspiegelung φ bildet P auf P' ab und Q auf Q'. Konstruieren Sie $\varphi(R)$.



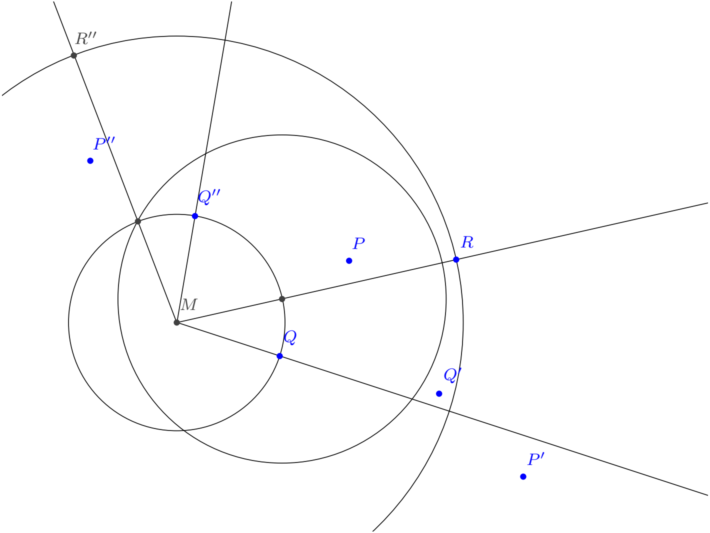
Beispiel: Bewegung konstruieren

Aufgabe. Die Gleitspiegelung φ bildet P auf P' ab und Q auf Q'. Konstruieren Sie $\varphi(R)$.



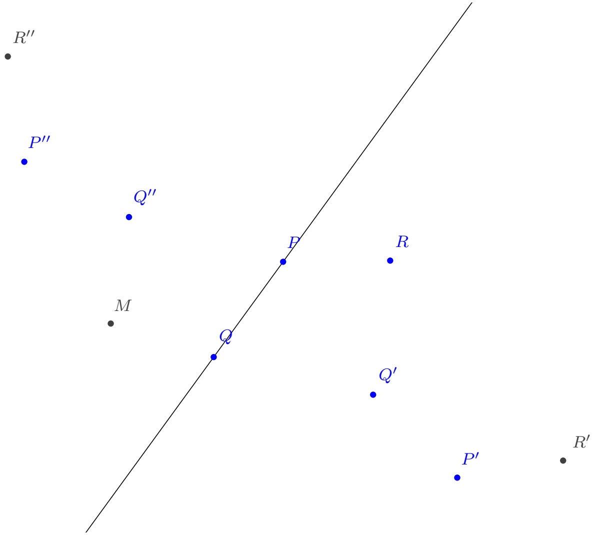
Beispiel: Bewegung konstruieren

Aufgabe. Die Gleitspiegelung φ bildet P auf P' ab und Q auf Q'. Konstruieren Sie $\varphi(R)$.



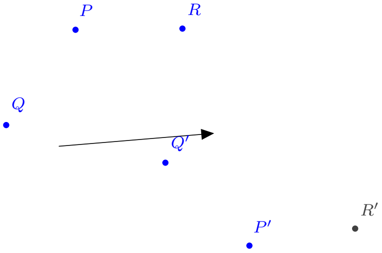
Beispiel: Bewegung konstruieren

Aufgabe. Die Gleitspiegelung φ bildet P auf P' ab und Q auf Q'. Konstruieren Sie $\varphi(R)$.



Beispiel: Bewegung konstruieren

Aufgabe. Die Gleitspiegelung φ bildet P auf P' ab und Q auf Q'. Konstruieren Sie $\varphi(R)$.



Übungsaufgaben

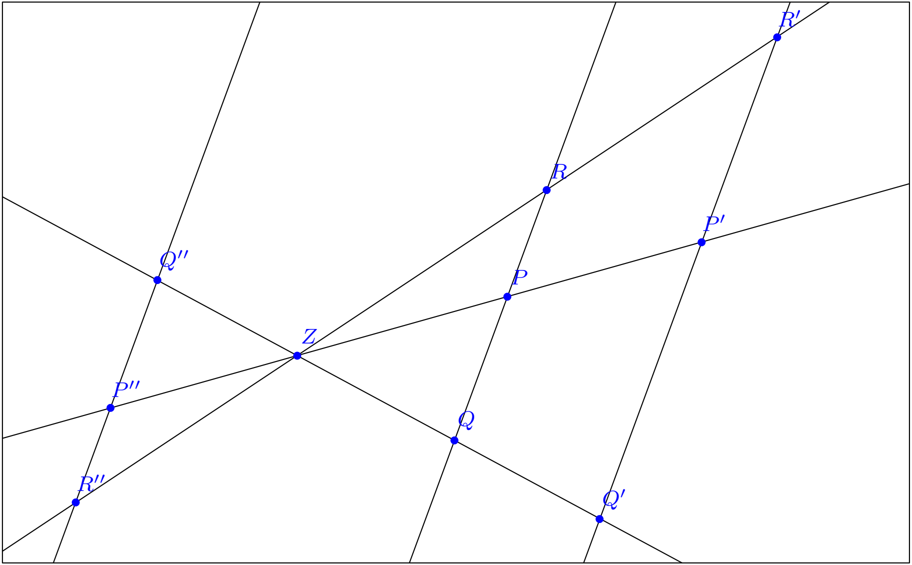
- Aufgabe 2.1
- Aufgabe 2.2
- Aufgabe 2.3
- Aufgabe 2.4
- Aufgabe 3.3
- Aufgabe 4.1
- Aufgabe 6.1
- Aufgabe 6.2
- Aufgabe 7.1
- Aufgabe 7.2
- Aufgabe 8.2
- Aufgabe 8.3
- Aufgabe 8.4
- Aufgabe 9.4

Outline

Zahlen

Leitmotiv: Zahlen sind Längenverhältnisse. Längenverhältnisse stehen in engem Zusammenhang zu Winkeln.

Strahlensätze



Ähnliche Dreiecke

Satz (Ähnlichkeitssatz „WWW“). Wenn PQR und $P'Q'R'$ Dreiecke sind mit $\angle RPQ = \angle R'P'Q'$, $\angle PQR \equiv \angle P'Q'R'$ und $\angle QRP \equiv \angle Q'R'P'$, dann ist PQR ähnlich zu $P'Q'R'$.

Trigonometrische Funktionen

Im Dreieck *PQR* mit $\angle PQR = \alpha$ und $\angle QRP = 90^\circ$ ist

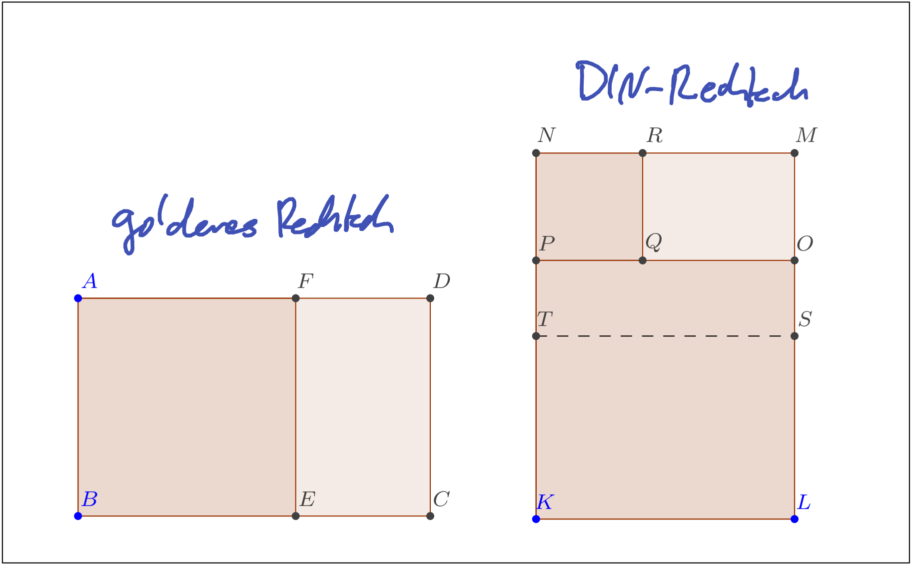
$$\sin\alpha = \frac{|PR|}{|PQ|} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\cos\alpha = \frac{|QR|}{|PQ|} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

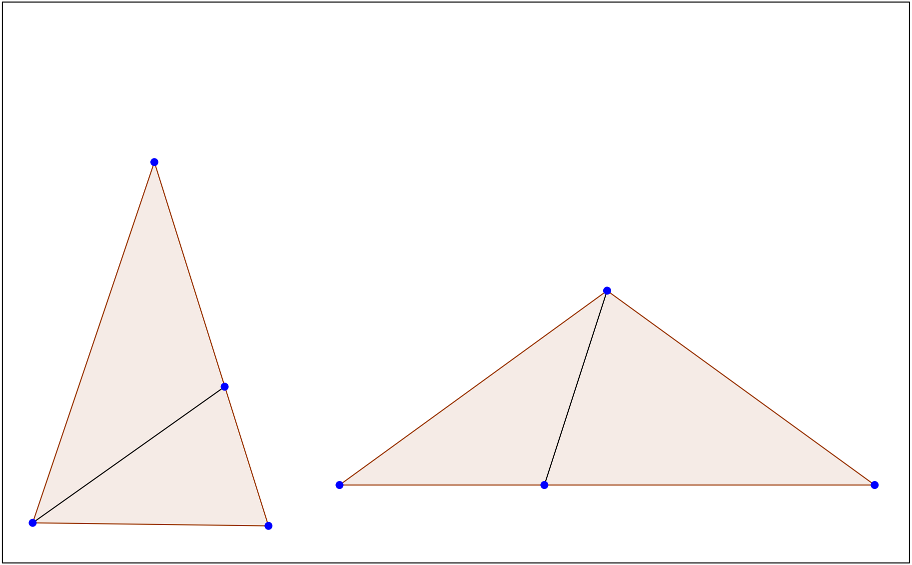
$$\tan\alpha = \frac{|PR|}{|QR|} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$90^\circ < \alpha < 180^\circ \qquad \cos(\alpha) = -\cos(\underbrace{180^\circ - \alpha}_{< 90^\circ})$

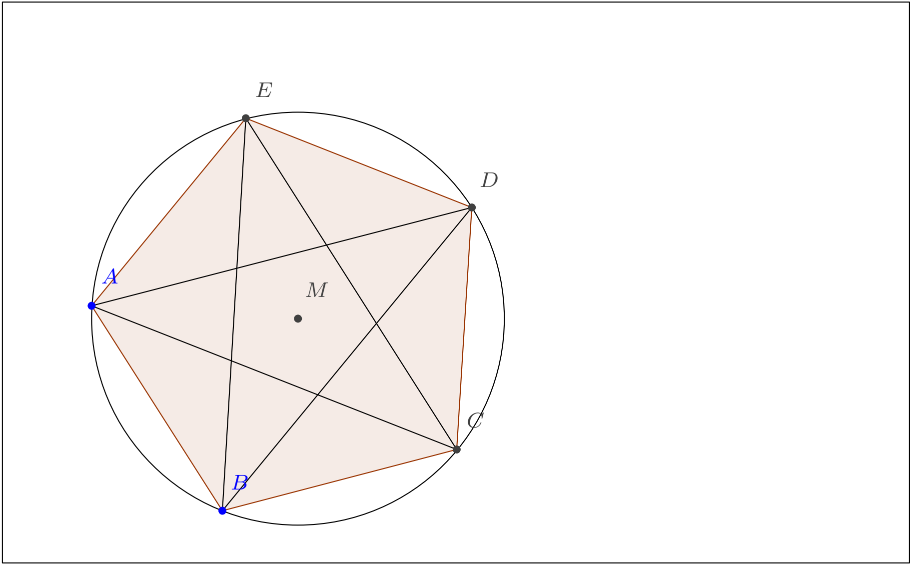
Goldener Schnitt



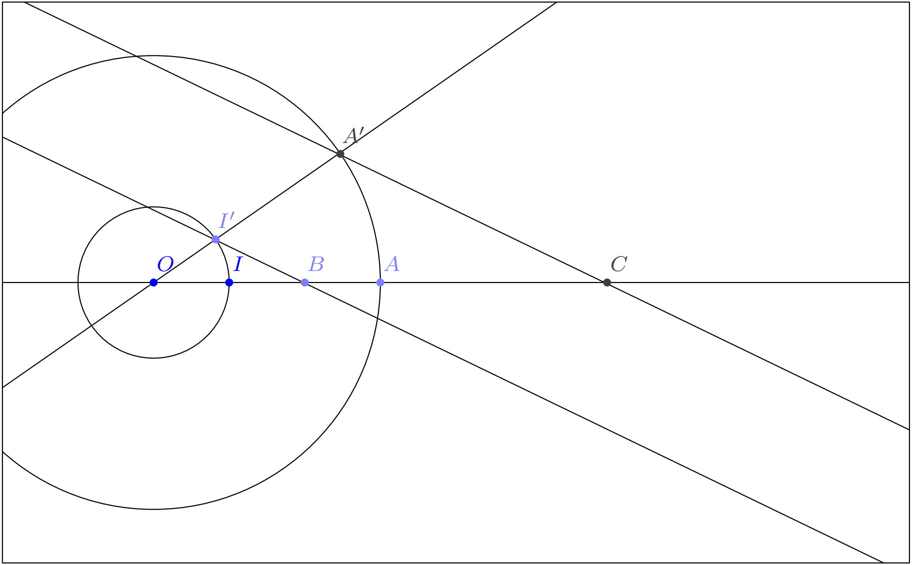
Goldene Dreiecke



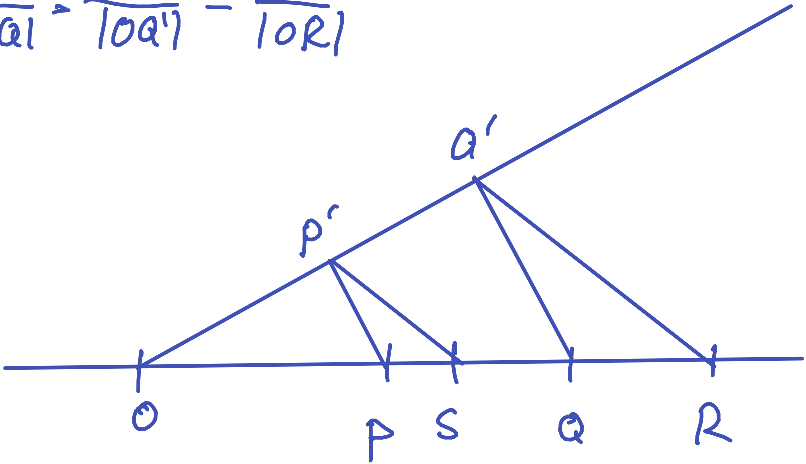
Regelmäßiges Fünfeck



Grundrechenarten konstruieren



$$\frac{|OP|}{|OQ|} = \frac{|OP'|}{|OQ'|} = \frac{|OS|}{|OR|}$$



Mult.

$$\frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OB|}{|OI|} \cdot \frac{|OA|}{|OI|}$$

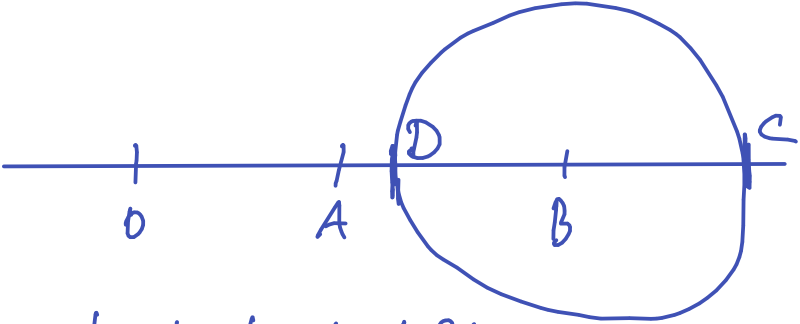
$$\Leftrightarrow \frac{|OC|}{|OI|} \cdot \frac{|OI|}{|OA|} = \frac{|OB|}{|OI|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|OC|}{|OA|} = \frac{|OB|}{|OI|}$$

Div.

$$\frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OA|}{|OI|} \cdot \frac{|OI|}{|OB|}$$

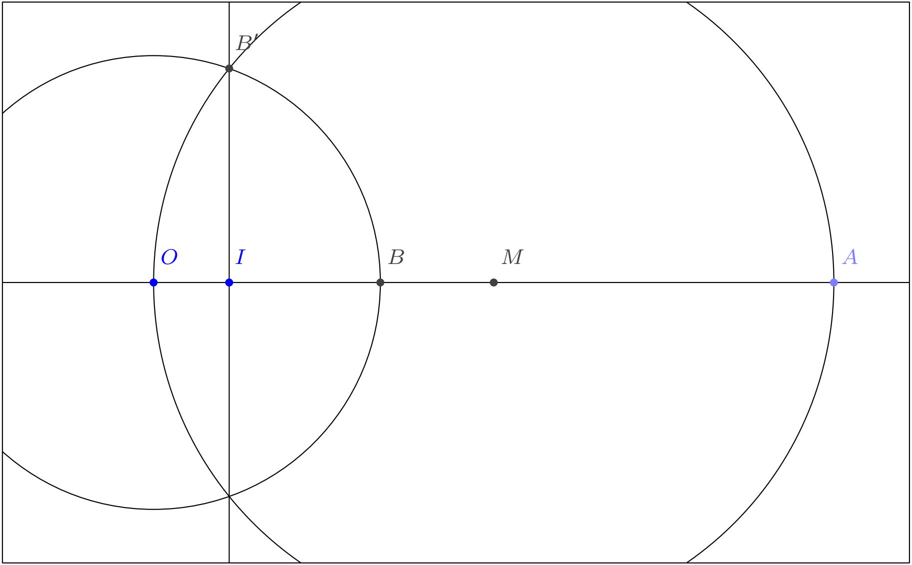
$$\Leftrightarrow \frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OA|}{|OB|}$$



$$|OC| = |OA| + |OB|$$

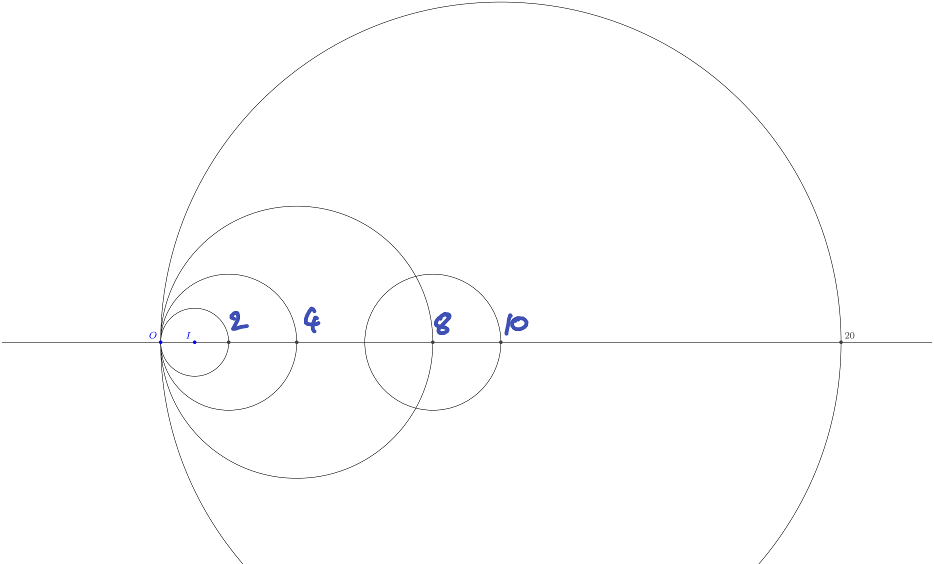
$$|OD| = |OB| - |OA|$$

Wurzel konstruieren



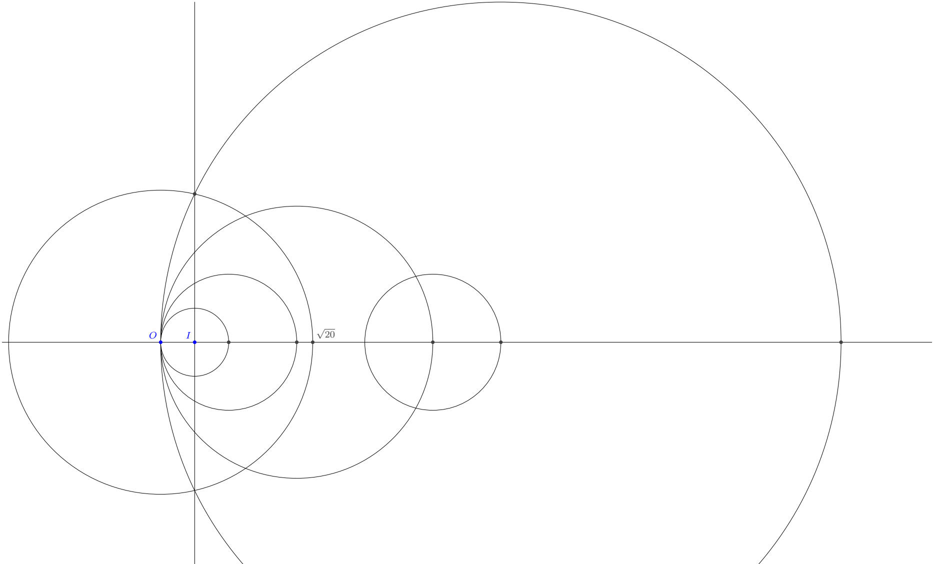
Beispiel: Winkel konstruieren

Aufgabe. Wir betrachten $|OI|$ als Einheitslänge. Nutzen Sie die Tatsache, dass $\sin(36^\circ) = \frac{\sqrt{10-\sqrt{20}}}{4}$ um einen 36°-Winkel zu konstruieren.



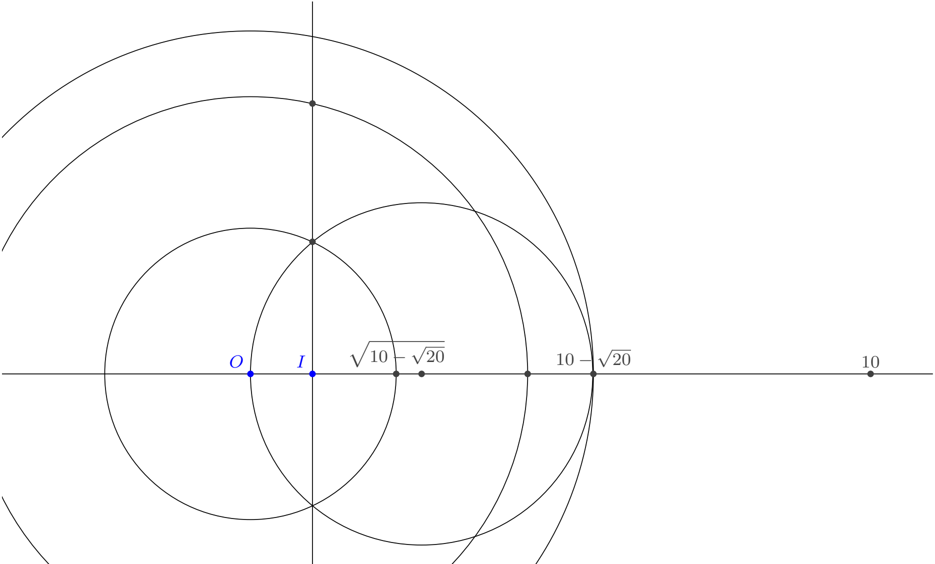
Beispiel: Winkel konstruieren

Aufgabe. Wir betrachten $|OI|$ als Einheitslänge. Nutzen Sie die Tatsache, dass $\sin(36^\circ) = \frac{\sqrt{10-\sqrt{20}}}{4}$ um einen 36°-Winkel zu konstruieren.



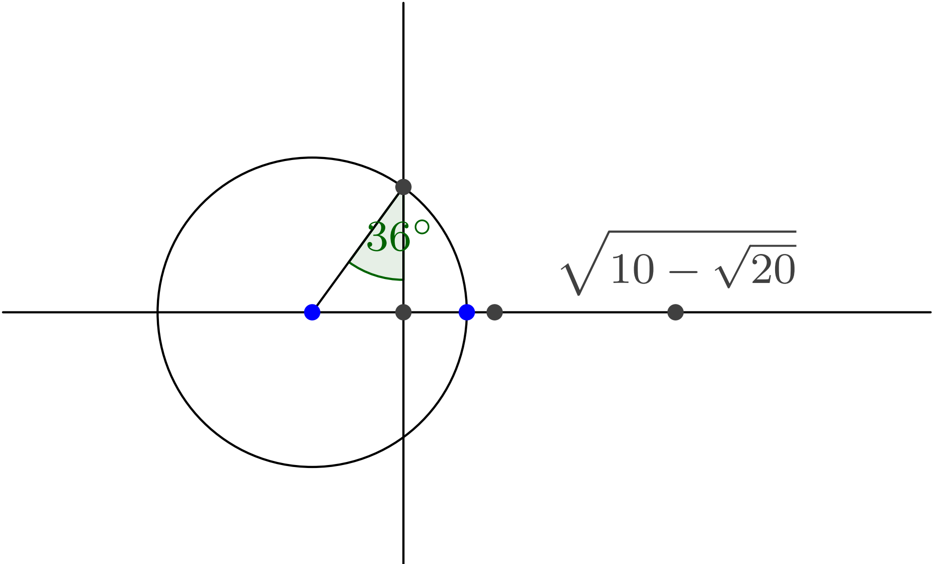
Beispiel: Winkel konstruieren

Aufgabe. Wir betrachten $|OI|$ als Einheitslänge. Nutzen Sie die Tatsache, dass $\sin(36^\circ) = \frac{\sqrt{10-\sqrt{20}}}{4}$ um einen 36°-Winkel zu konstruieren.



Beispiel: Winkel konstruieren

Aufgabe. Wir betrachten $|OI|$ als Einheitslänge. Nutzen Sie die Tatsache, dass $\sin(36^\circ) = \frac{\sqrt{10-\sqrt{20}}}{4}$ um einen 36°-Winkel zu konstruieren.



Übungsaufgaben

- Aufgabe 9.1
- Aufgabe 9.2
- Aufgabe 9.3
- Aufgabe 10.2
- Aufgabe 10.3
- Aufgabe 10.4
- Aufgabe 11.1

Outline

Schnittpunkte, Inkreis, Umkreis

Wann schneiden sich zwei Kreise (nicht)?

Durch drei Punkte geht entweder eine Gerade oder ein Kreis.

Jedes Dreieck hat einen Umkreis, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist.

Jedes Dreieck hat einen Inkreis, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist.

Zentriwinkelsatz, Thales-Satz, Peripheriewinkelsatz

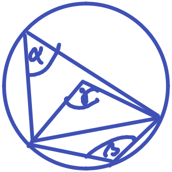
Proposition (Zentriwinkelsatz). Wenn P und Q Punkte auf einem Kreis k sind und $R \in k$ im gleichen Halbraum von PQ liegt wie der Mittelpunkt M von k, dann ist der (Zentri-)Mittelpunktswinkel $\angle PMQ$ doppelt so groß wie der Peripheriewinkel $\angle PRQ$.

Folgerung (Satz des Thales). Wenn zwei Punkte P und R auf einem Kreis k gegenüberliegen, ist für jeden Punkt $Q \in k$ der Winkel $\angle PQR$ ein rechter.

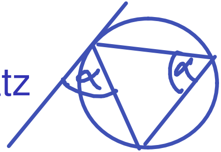
Proposition (Peripheriewinkelsatz). Wenn P und Q Punkte auf einem Kreis k sind, dann ist der Peripheriewinkel $\angle PRQ$ für alle Punkte $R \in k$ im gleichen Halbraum von PQ gleich.

$\gamma = 2\alpha$

$\alpha + \beta = 180°$



Sehnen-Tangentenwinkelsatz, Sekanten-Tangenten-Satz, Sekanten-Satz

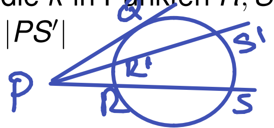


Proposition (Sehnen-Tangentenwinkelsatz). Seien A, B, D Punkte auf einem Kreis k und F ein Punkt, der auf der Tangente an k in B liegt, und zwar im Halbraum von BD, der A nicht enthält. Dann ist der Tangentenwinkel $\angle FBD$ gleich groß wie der Peripheriewinkel $\angle BAD$.

Proposition (Sekanten-Tangenten-Satz). Sei k ein Kreis und P ein Punkt außerhalb von k. Sei g eine Gerade durch P, die k in Q berührt und sei h eine Gerade durch P, die k in R und S schneidet. Dann ist $|PQ|/|PS| = |PR|/|PQ|$.

Umgekehrt: wenn $|PQ|/|PS| = |PR|/|PQ|$, dann ist Q Berührpunkt.

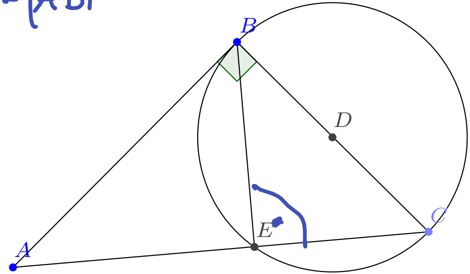
Proposition (Sekanten-Satz). Sei k ein Kreis und P ein Punkt außerhalb des Kreises. Seien h und h' Geraden durch P, die k in Punkten R, S und R', S' schneiden. Dann ist $|PR| \cdot |PS| = |PR'| \cdot |PS'|$



Beispiel: Kathetensatz aus Sekanten-Tangenten-Satz

Aufgabe. Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit $\angle ABC = 90°$. Sei D der Mittelpunkt von BC und E der Schnittpunkt von D_{BC} mit $\overline{AC}$. Zeigen Sie, dass $\angle BEC = 90°$. Leiten Sie daraus den Kathetensatz her.

$|AE| \cdot |AC| = |AB|^2$



Übungsaufgaben

- Aufgabe 1.3
- Aufgabe 1.4
- Aufgabe 5.1
- Aufgabe 5.3
- Aufgabe 11.2
- Aufgabe 11.3
- Aufgabe 11.4