

# Skript zur Vorlesung Elementare Geometrie

Stefan Witzel

Sommersemester 2018

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>2</b>
1.1 Punkte, Geraden, . . . . .	2
1.2 Kreise . . . . .	4
1.3 Parallele Geraden . . . . .	7
1.4 Bewegungen, Kongruenz . . . . .	8
1.5 Winkel . . . . .	13
<b>2 Euklids Elemente: erstes Buch</b>	<b>17</b>
2.1 Polygone . . . . .	18
2.2 Konstruktionen mit parallelen Geraden . . . . .	20
2.3 Flächeninhalt von Dreiecken und Parallelogrammen . . . . .	22
<b>3 Gruppen, Bewegungen</b>	<b>25</b>
3.1 Symmetrien . . . . .	26
3.2 Spiegelungen, gerade und ungerade Bewegungen . . . . .	27
3.3 Verschiebungen . . . . .	30
3.4 Drehungen und Verschiebungen . . . . .	32
3.5 Gleitspiegelungen . . . . .	34
3.6 Vektoren . . . . .	36

3.7	Drehwinkel . . . . .	38
3.8	Parität . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Verhältnisse, Ähnlichkeiten</b>	<b>43</b>
4.1	Längenverhältnisse . . . . .	44
4.2	Ähnlichkeiten . . . . .	47
4.3	Seitenverhältnisse und Winkel . . . . .	50
4.4	Der goldene Schnitt . . . . .	51
4.5	Quadratische Gleichungen . . . . .	55
4.6	Konstruktiv rechnen . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Kreise</b>	<b>63</b>
5.1	Kreise am Dreieck . . . . .	63
5.2	Euklids Elemente: drittes Buch . . . . .	65
<b>A</b>	<b>Axiome</b>	<b>68</b>

## 1 Grundlagen

### 1.1 Punkte, Geraden, . . .

Gegenstand unserer Untersuchungen ist die euklidische Ebene  $\mathbb{E}^2$ . Sie besteht aus *Punkten* und enthält Geraden, Kreise und andere Figuren. Wir schreiben  $P \in f$  um auszudrücken, dass ein Punkt  $P$  auf einer Figur  $f$  liegt.

Zwei Punkte  $P, Q$  haben einen *Abstand*  $|PQ|$ . Dieser erfüllt die folgenden Bedingungen:

**Axiom 1** (Metrik). *Für Punkte  $P, Q, R \in \mathbb{E}^2$  gilt:*

1.  $|PQ| = 0$  genau dann, wenn  $P = Q$ ,
2.  $|PQ| = |QP|$ ,
3.  $|PQ| + |QR| \geq |PR|$  (*Dreiecksungleichung*).

Der Abstand zwischen zwei Punkten kann mit einem *Lineal mit Skala* gemessen werden.

Der Punkt  $Q$  liegt *zwischen*  $P$  und  $R$  wenn Gleichheit gilt, also  $|PQ| + |QR| = |PR|$ .

Die *Gerade*  $PQ$  durch zwei Punkte  $P$  und  $Q$  besteht aus den Punkten  $R$ , die eine der folgenden Bedingungen erfüllen:

1.  $R$  liegt zwischen  $P$  und  $Q$ ,
2.  $Q$  liegt zwischen  $P$  und  $R$ ,
3.  $P$  liegt zwischen  $Q$  und  $R$ .

Das *Segment*  $\overline{PQ}$  besteht aus den Punkten  $R$ , die (1) erfüllen. Der *Strahl* ab  $P$  durch  $Q$ , geschrieben  $\overrightarrow{PQ}$ , besteht aus den Punkten  $R$ , die (1) oder (2) erfüllen. Die *Länge* von  $\overline{PQ}$  ist  $|PQ|$ .

Wenn  $P$  zwischen  $Q$  und  $Q'$  liegt, sind die beiden Strahlen  $\overrightarrow{PQ}$  und  $\overrightarrow{PQ'}$  *komplementär*. Komplementäre Strahlen haben also denselben Ausgangspunkt und ihre Vereinigung ist eine Gerade.

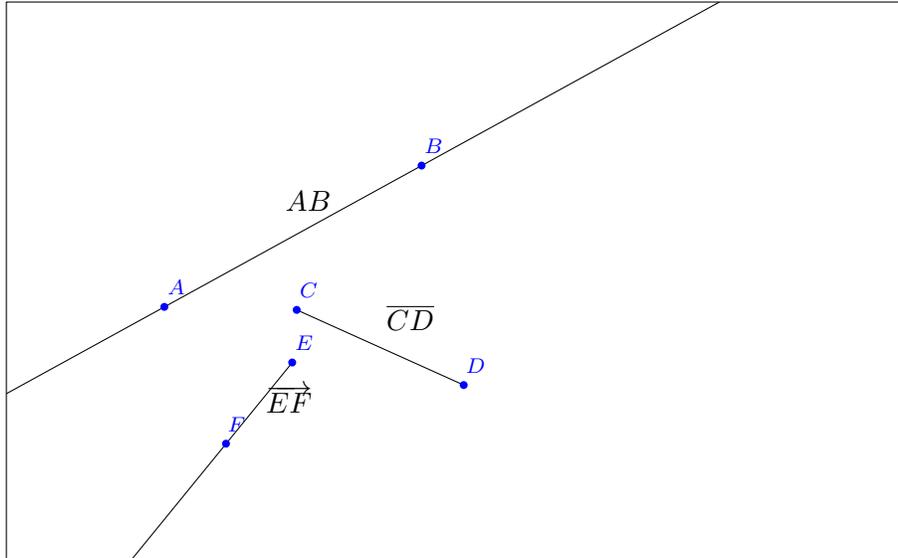


Abbildung 1: Eine Gerade  $AB$ , ein Segment  $\overline{CD}$  und ein Strahl  $\overrightarrow{EF}$ .

Die Gerade  $PQ$ , das Segment  $\overline{PQ}$  und der Strahl  $\overrightarrow{PQ}$  können mit einem *Lineal ohne Skala* konstruiert werden. Insbesondere ist die Skala nicht nötig,

um zu entscheiden ob ein Punkt zwischen zwei anderen liegt. Mit einem *Lineal* meinen wir deshalb in der Regel eins ohne Skala.

**Axiom 2** (Punkte und Geraden). 1. *Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.*

Für zwei verschiedene Punkte  $P$  und  $Q$  gilt:

2. *Es gibt nur eine einzige Gerade, die durch  $P$  und  $Q$  geht.*
3. *Es gibt in  $\overline{PQ}$  einen Punkt außer  $P$  und  $Q$ .*
4. *Es gibt auf dem Strahl  $\overrightarrow{PQ}$  einen Punkt außerhalb von  $\overline{PQ}$ .*
5. *Wenn eine Gerade  $g$  das Segment  $\overline{PQ}$  trifft und  $R$  ein weiterer Punkt ist, dann trifft  $g$  auch  $\overline{PR}$  oder  $\overline{QR}$ .*

Axiom 2(1) sagt, dass die ganze Ebene nicht leer ist und nicht aus einem einzigen Punkt oder einer einzigen Gerade besteht. Axiom 2(2) sagt, dass die Gerade  $PQ$  die einzige Gerade ist, die durch  $P$  und  $Q$  geht. Axiom 2(3) impliziert, dass es zwischen zwei Punkten unendlich viele Punkte gibt. Axiom 2(4) impliziert, dass es auf einer Geraden jenseits eines Punkts unendlich viele Punkte gibt.

Axiom 2(5) ist das Axiom von Pasch und hat folgende Interpretation: wenn man auf Segment von  $P$  nach  $Q$  die Gerade  $g$  überquert, dann kann man sie nicht umgehen, indem man den Umweg über  $R$  nimmt. Die Gerade  $g$  teilt also die Ebene in zwei Teile: die Punkte auf der Seite von  $P$  und die Punkte auf der Seite von  $Q$ . Wir nennen diese beiden Mengen die durch  $g$  bestimmten *Halbebenen*.

Drei Punkte, die auf einer Geraden liegen, heißen *kollinear*. Drei Punkte  $P, Q, R$ , die nicht kollinear sind bilden ein *Dreieck*  $PQR$ , dessen *Ecken* sie sind und dessen *Kanten* die Segmente  $\overline{PQ}$ ,  $\overline{QR}$ ,  $\overline{PR}$  sind.

## 1.2 Kreise

Seien  $M, P, Q$  Punkte. Der *Kreis mit Mittelpunkt  $M$  durch  $P$*  ist die Menge  $M_P$  der Punkte, die den gleichen Abstand zu  $M$  haben wie  $P$ :

$$M_P = \{R \in \mathbb{E}^2 \mid |MR| = |MP|\}.$$

Dieser Kreis kann mit einem „*euklidischen*“ *Zirkel* konstruiert werden, dessen Einstellung verlorenght, sobald man ihn vom Blatt hochnimmt. Das

*Innere* des Kreises ist die Menge der Punkte  $R$  mit  $|MR| < |MP|$ , das *Äußere* die Menge der Punkte  $R$  mit  $|MR| > |MP|$ .

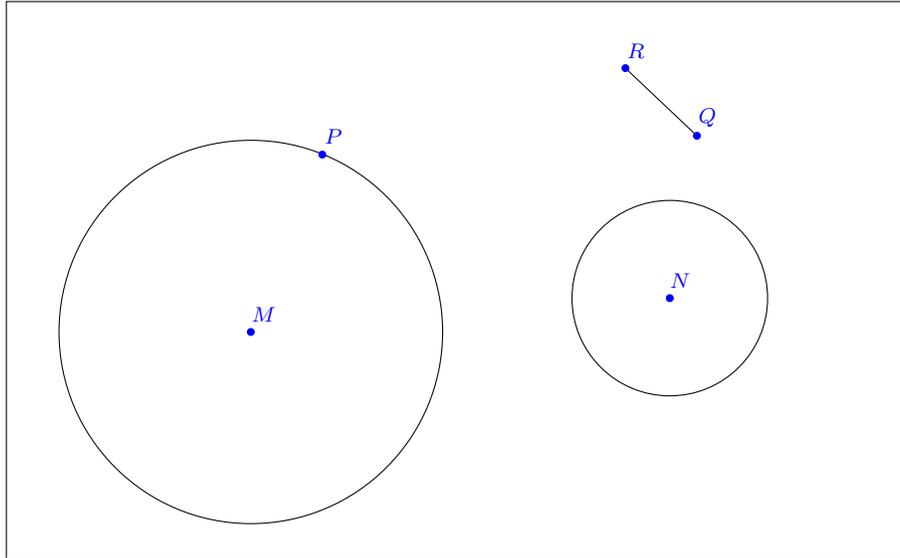


Abbildung 2: Ein Kreis  $M_P$  und ein Kreis  $N_Q$ .

Mithilfe von Kreisen können wir unsere erste Konstruktion vornehmen:

**Problem 1.1** (Gleichseitiges Dreieck). *Gegeben Punkte  $P$  und  $Q$ , konstruiere ein Dreieck  $PQR$  dessen Kanten die Länge  $|PQ|$  haben.*

*Konstruktion.* Wähle  $R$  als einen der Schnittpunkte von  $P_Q$  und  $Q_P$ .  $\diamond$

*Beweis.* Dass  $R \in P_Q$  ist, bedeutet  $|RP| = |RQ|$  und dass  $R \in Q_P$  ist, bedeutet  $|RQ| = |PQ|$ .  $\square$

Dass sich die Kreise tatsächlich schneiden (und dass es ein gleichseitiges Dreieck gibt!), folgt nicht aus den bisherigen Axiomen, wir nehmen es als neues Axiom auf.

**Axiom 3** (Kreis-Schnittpunkte). 1. *Seien  $M_P$  und  $N_Q$  Kreise. Wenn  $M_P$  mindestens einen Punkt innerhalb von  $N_Q$  und einen Punkt außerhalb davon, dann haben  $M_P$  und  $N_Q$  in jedem Halbraum von  $MN$  einen eindeutigen Schnittpunkt.*

2. Sei  $M_P$  ein Kreis und  $\overrightarrow{QR}$  ein Strahl. Wenn  $Q$  im Innern von  $M_P$  liegt, dann haben  $M_P$  und  $\overrightarrow{QR}$  einen eindeutigen Schnittpunkt.

Der Kreis mit Mittelpunkt  $M$  und Radius  $|PQ|$  ist die Menge  $M_{PQ}$  der Punkte, deren Abstand zu  $M$  gleich dem Abstand von  $P$  zu  $Q$  ist:

$$M_{PQ} = \{R \in \mathbb{E}^2 \mid |MR| = |PQ|\}.$$

Dieser Kreis kann mit einem *gewöhnlichen Zirkel* konstruiert werden: zunächst stellt man den Zirkel auf den Abstand  $|PQ|$  ein, und bewegt ihn dann um den Kreis um  $M$  zu zeichnen.

**Problem 1.2** (Allgemeiner Kreis ohne gewöhnlichen Zirkel). *Gegeben Punkte  $M, P, Q$ , konstruiere  $M_{PQ}$  ohne einen gewöhnlichen Zirkel zu verwenden.*

*Konstruktion.* Konstruiere  $A$ , so dass  $AMP$  ein gleichseitiges Dreieck ist, Problem 1.1. Wähle  $B$  als Schnittpunkt von  $\overrightarrow{AP}$  und  $PQ$ . Wähle  $C$  als Schnittpunkt von  $A_B$  und  $\overrightarrow{AM}$ . Dann ist  $M_C = M_{PQ}$ .  $\diamond$

*Beweis.* Es ist  $|AM| = |AP|$  weil  $AMP$  ein gleichseitiges Dreieck ist. Es ist  $|AC| = |AB|$ , weil  $C$  auf  $A_B$  liegt. Es ist  $|PB| = |PQ|$  weil  $B \in PQ$  ist. Schließlich ist  $|AB| = |AP| + |PB|$  und  $|AC| = |AM| + |MC|$ . Also ist  $|MC| = |AC| - |AM| = |AB| - |AP| = |PB| = |PQ|$ .  $\square$

Die Lösung von Problem 1.2 zeigt, dass ein euklidischer Zirkel genauso „mächtig“ ist, wie ein gewöhnlicher. Mit einem *Zirkel* werden wir deshalb der Einfachheit halber einen gewöhnlichen meinen.

Die Konstruktion zu Problem 1.2 ist auch ein Beispiel dafür, wie wir frühere Konstruktionen wiederverwenden können: Aus der Lösung von Problem 1.1 wissen wir, dass ein gleichseitiges Dreieck konstruiert werden kann, also müssen wir die Konstruktion hier nicht erneut beschreiben, sondern können sie als gegeben annehmen. Mit der Zeit bauen wir so einen Vorrat an immer komplexeren Konstruktionen auf, die wir zu neuen Konstruktionen zusammensetzen können.

Ganz ähnlich verhält es sich mit logischen Aussagen: sobald wir eine Aussage einmal bewiesen haben, können wir sie verwenden, ohne sie erneut beweisen zu müssen. Mit der Zeit erhalten wir einen Vorrat an immer komplexeren Aussagen, die wir zu neuen Aussagen zusammensetzen können.

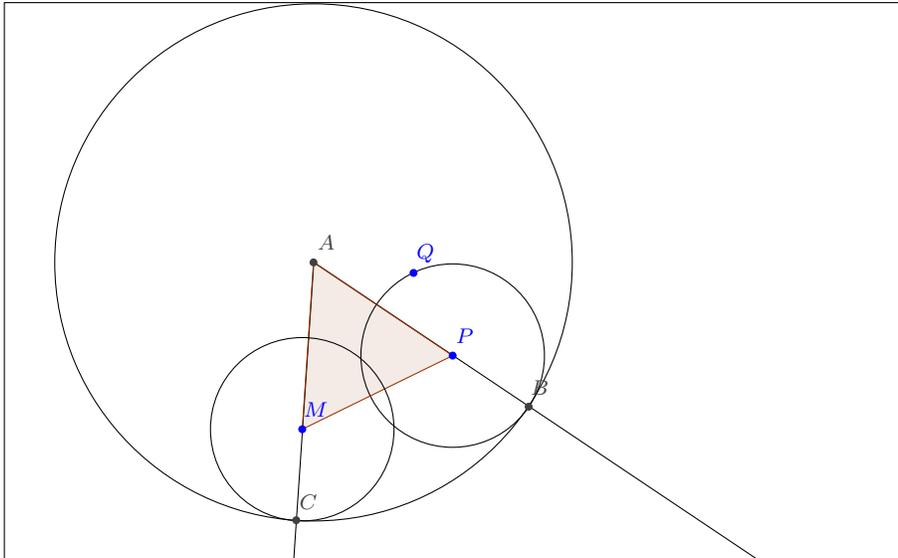


Abbildung 3: Die Konstruktion zu Problem 1.2.

### 1.3 Parallele Geraden

Man kann Axiom 2(2) auch wie folgt formulieren:

**Proposition 1.3.** *Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in höchstens einem Punkt.*

*Beweis durch Kontraposition.* Seien  $g$  und  $h$  Geraden. Die Behauptung ist, dass wenn  $g$  und  $h$  verschieden sind, dann schneiden sie sich in höchstens einem Punkt.

Die Kontraposition lautet: wenn  $g$  und  $h$  sich in mindestens zwei Punkten schneiden, dann sind sie gleich. Nehmen wir also an,  $g$  und  $h$  enthalten zwei verschiedene Punkte  $P$  und  $Q$ . Nach Axiom 2(2) liegen  $P$  und  $Q$  auf genau einer Geraden, also gilt  $g = PQ = h$ .  $\square$

*Beweis durch Widerspruch.* Seien  $g$  und  $h$  Geraden. Wir nehmen an, dass  $g$  und  $h$  verschieden sind und sich dennoch in mindestens zwei Punkten schneiden. Daraus wollen wir einen Widerspruch herleiten.

Nennen wir zwei der Punkte in denen sich  $g$  und  $h$  schneiden  $P$  und  $Q$ . Dann gibt es mit  $g$  und  $h$  zwei Geraden, die beide durch  $P$  und  $Q$  gehen.

Das widerspricht Axiom 2(2). Also muss die Annahme falsch sein und  $g$  und  $h$  können sich nicht in zwei verschiedenen Punkten schneiden.  $\square$

Wir nennen zwei Geraden *parallel* wenn sie entweder gleich sind, oder keinen gemeinsamen Punkt haben. Nach Proposition 1.3 sind zwei Geraden entweder parallel oder sie schneiden sich in genau einem Punkt. Das folgende Axiom geht auf Euklid zurück und unterscheidet die euklidische Geometrie von anderen möglichen Geometrien:

**Axiom 4** (Parallelen-Axiom). *Wenn  $g$  eine Gerade ist und  $P$  ein Punkt, dann existiert genau eine Gerade, die parallel zu  $g$  ist und durch  $P$  geht.*

Die Punkte  $P, Q, R$  sind *kollinear* wenn sie auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Wenn nicht, bilden sie ein *Dreieck*  $PQR$ . Die *Kanten* des Dreiecks sind  $\overline{PQ}$ ,  $\overline{QR}$  und  $\overline{PR}$ .

## 1.4 Bewegungen, Kongruenz

Eine *Bewegung* ist eine bijektive Abbildung  $\varphi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$  die den Abstand erhält:  $|\varphi(P)\varphi(Q)| = |PQ|$ . Anschaulich beschreibt eine Bewegung die Bewegung eines Blatts Papier. Die *triviale Bewegung* oder *Identität*  $\text{id}$  ist die Abbildung, die jeden Punkt lässt, wo er ist: für alle  $P$  ist  $\text{id}(P) = P$ .

*Bemerkung 1.4.* Was wir *Bewegung* nennen hieß in der Vorlesung von Herrn Bauer *Isometrie*.

Zwei Bewegungen können nacheinander ausgeführt werden: wenn  $\varphi$  und  $\psi$  Bewegungen sind, definiert  $\varphi \circ \psi(P) = \varphi(\psi(P))$  eine Bewegung  $\varphi \circ \psi$ .

Jede Bewegung  $\varphi$  hat eine *Inverse*  $\varphi^{-1}$ , die die Wirkung von  $\varphi$  rückgängig macht. Sie ist dadurch beschrieben dass  $\varphi^{-1}(Q) = P$  wenn  $\varphi(P) = Q$ . Dies lässt sich auch ausdrücken durch die Formeln  $\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{id} = \varphi^{-1} \circ \varphi$ .

Bewegungen bilden (parallele) Geraden auf (parallele) Geraden und Kreise auf Kreise ab. Eine Figur  $f \subseteq \mathbb{E}^2$  heißt *invariant* unter einer Bewegung  $\varphi$  wenn  $\varphi(f) = f$ , wenn also jeder Punkt von  $f$  auf einen Punkt von  $f$  abgebildet wird. Ein Punkt  $P \in \mathbb{E}^2$  heißt *Fixpunkt* von  $\varphi$  wenn  $\varphi$  den Punkt auf sich selbst abbildet:  $\varphi(P) = P$ . Die Menge aller Fixpunkte einer Bewegung  $\varphi$  ist seine *Fixpunktmenge*. Die Fixpunktmenge von  $\varphi$  ist invariant unter  $\varphi$ . Umgekehrt kann aber eine Menge invariant unter  $\varphi$  sein, ohne einen Fixpunkt zu enthalten.

**Proposition 1.5.** *Die Fixpunktmenge einer Bewegung ist entweder leer, ein einziger Punkt, eine Gerade, oder die ganze Ebene.*

*Beweis.* Sei  $\varphi$  eine Bewegung. Wir behaupten erstens, dass wenn  $\varphi$  zwei verschiedene Fixpunkte  $P$  und  $Q$  hat, dann ist schon jeder Punkt auf  $PQ$  ein Fixpunkt. Wir behaupten zweitens, dass wenn  $\varphi$  außerdem noch einen Fixpunkt  $R$  hat, der nicht auf  $PQ$  liegt, dann ist jeder Punkt ein Fixpunkt. Aus diesen beiden Behauptungen folgt die Aussage der Proposition.

Zur ersten Behauptung. Angenommen  $P$  und  $Q$  sind Fixpunkte von  $\varphi$ . Dann folgt direkt, dass  $PQ$  invariant unter  $\varphi$  ist. Sei jetzt  $T \in PQ$  ein Punkt. Da  $\varphi$  eine Bewegung ist, ist  $|\varphi(P)\varphi(T)| = |PT|$ . Da  $P$  ein Fixpunkt ist, ist  $|\varphi(P)\varphi(T)| = |P\varphi(T)|$ . Zusammen folgt, dass  $|PT| = |P\varphi(T)|$ . Das selbe gilt mit  $P$  ersetzt durch  $Q$ . Demnach hat  $\varphi(T)$  den gleichen Abstand von  $P$  und von  $Q$  wie  $T$ . Aus Axiom 2(2) folgt dann, dass  $\varphi(T) = T$ . Also ist  $T$  ein Fixpunkt. Da  $T$  beliebig war, ist jeder Punkt von  $PQ$  ein Fixpunkt von  $\varphi$ .

Zur zweiten Behauptung. Angenommen  $P, Q, R$  sind Fixpunkte von  $\varphi$ , die nicht kollinear sind. Nach der ersten Behauptung sind alle Punkte auf  $PQ$  auf  $QR$  und auf  $PR$  Fixpunkte von  $\varphi$ . Sei  $T$  ein beliebiger Punkt. Wir wollen zeigen, dass  $T$  ebenfalls ein Fixpunkt von  $\varphi$  ist. Wir betrachten die Gerade  $PT$  und unterscheiden zwei Fälle. Im ersten Fall schneiden sich  $PT$  und  $QR$  in einem Punkt  $U$ . Dann ist  $PT = PU$ . Da  $P$  und  $U$  Fixpunkte von  $\varphi$  sind, ist nach der ersten Behauptung auch  $T$  ein Fixpunkt von  $\varphi$ . Im zweiten Fall ist  $PT$  parallel zu  $QR$ . Dann ist  $PT$  invariant unter  $\varphi$ : es ist die eindeutige Gerade parallel zu  $QR$  durch  $P$ . Damit ist  $P$  ein Fixpunkt: es ist der eindeutige Schnittpunkt von  $Q_T$  und  $R_T$  auf  $PT$ .  $\square$

**Folgerung 1.6.** *Wenn  $PQR$  ein Dreieck ist und  $\varphi$  und  $\psi$  Bewegungen mit  $\varphi(P) = \psi(P)$ ,  $\varphi(Q) = \psi(Q)$ ,  $\varphi(R) = \psi(R)$ , dann ist  $\varphi = \psi$ .*

*Beweis.* Die Bedingungen besagen, dass die Fixpunktmenge von  $\varphi^{-1}\psi$  die Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$  enthält. Nach Proposition 1.5 muss die Fixpunktmenge die ganze Ebene sein. Das heißt, für jeden Punkt  $T$  ist  $\varphi^{-1}\psi(T) = T$ , das heißt,  $\varphi(T) = \psi(T)$ .  $\square$

Drei Klassen von Bewegungen bekommen besondere Namen:

Eine Bewegung  $\varphi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$  ist eine *Translation* (Verschiebung) wenn sie keinen Fixpunkt hat und jede Gerade auf eine zu ihr parallele Gerade ab-

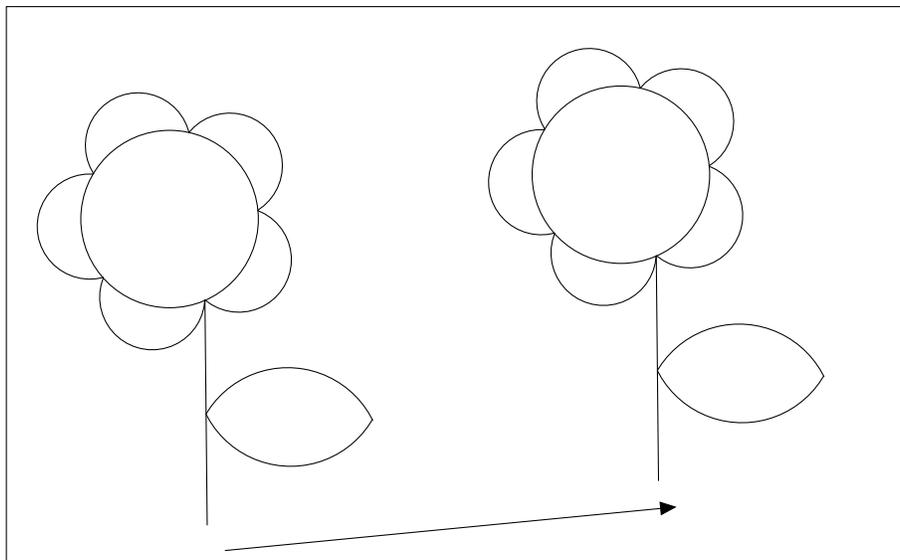


Abbildung 4: Der Effekt einer Translation.

bildet. Wir verabreden außerdem, dass auch die Identität als Translation gilt.

Eine Bewegung ist eine *Rotation* (Drehung) wenn sie genau einen Fixpunkt hat. Wieder gilt gemäß Vereinbarung auch die Identität als Rotation.

Eine Bewegung ist eine *Reflektion* (Spiegelung) wenn ihre Fixpunktmenge eine Gerade ist. Eine Bewegung  $\varphi$  ist eine *Involution* wenn  $\varphi \circ \varphi = \text{id}$ . Eine äquivalente Bedingung ist, dass  $\varphi = \varphi^{-1}$ . Eine Involution bildet  $P$  auf  $Q$  ab genau dann wenn sie  $Q$  auf  $P$  abbildet:  $\varphi(P) = Q$  genau dann wenn  $\varphi(Q) = P = \varphi(\varphi(P))$ .

Dass Translationen, Rotationen und Reflektionen existieren, folgt nicht aus den bisherigen Axiomen, wir fordern es axiomatisch:

- Axiom 5** (Bewegungen). 1. Gegeben zwei Punkte  $P$  und  $Q$  existiert genau eine Translation  $\tau$  mit  $\tau(P) = Q$ .
2. Gegeben drei Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $Q'$  mit  $|PQ| = |PQ'|$  existiert genau eine Rotation  $\rho$  mit  $\rho(P) = P$  und  $\rho(Q) = Q'$ .
3. Gegeben eine Gerade  $\ell$  gibt es genau eine Spiegelung  $\sigma$ , deren Fixpunktmenge die Gerade  $\ell$  ist.

Wir bezeichnen die Translation, die  $P$  auf  $Q$  abbildet mit  $\tau_{PQ}$ .

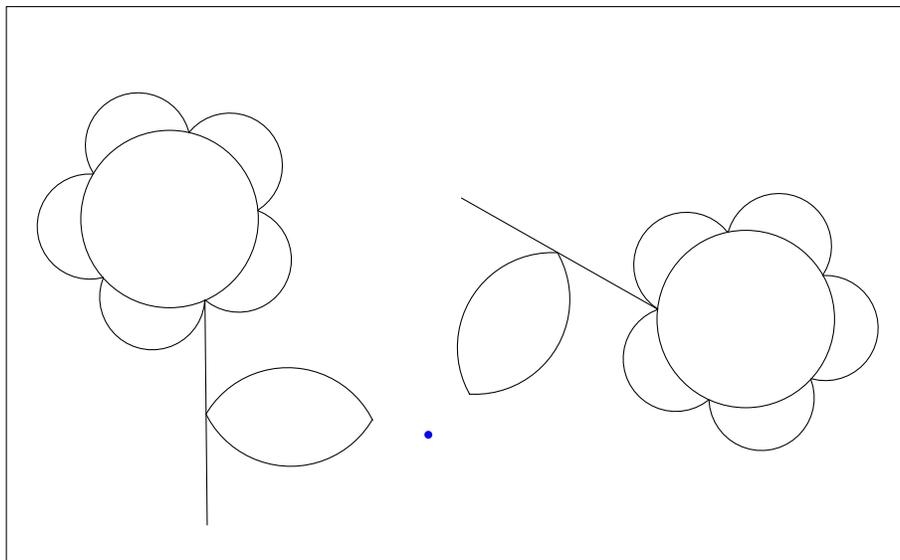


Abbildung 5: Der Effekt einer Rotation.

Wir bezeichnen die Fixpunktmenge einer Spiegelung als ihre *Spiegelungsachse*. Die Spiegelung mit Achse  $g$  schreiben wir  $\sigma_g$ .

Zwei Figuren  $f$  und  $f'$  sind *kongruent*, geschrieben  $f \equiv f'$ , wenn es eine Bewegung  $\varphi$  gibt, die  $f$  auf  $f'$  abbildet:  $\varphi(f) = f'$ .

*Bemerkung 1.7.* Kongruenz von algebraischen Winkeln ist in Abschnitt 3.7 anders definiert.

**Proposition 1.8.** *Zwei Segmente  $\overline{PQ}$  und  $\overline{P'Q'}$  sind kongruent genau dann, wenn sie die gleiche Länge haben.*

*Beweis.* Kongruent impliziert gleiche Länge: Da Bewegungen Abstand erhalten müssen zwei kongruente Segmente die gleiche Länge haben.

Gleiche Länge impliziert kongruent: Sei  $\tau$  eine Translation, die  $P$  auf  $P'$  abbildet. Sei  $\rho$  eine Rotation, die  $P'$  festhält und  $\tau(Q)$  auf  $Q'$  abbildet. Wir behaupten das  $\varphi := \rho \circ \tau$  das Segment  $\overline{PQ}$  auf  $\overline{P'Q'}$  abbildet. Wir berechnen  $\varphi(P) = \rho(\tau(P)) = \rho(P') = P'$  und  $\varphi(Q) = \rho(\tau(Q)) = Q'$ . Also sind  $\overline{PQ}$  und  $\overline{P'Q'}$  kongruent.  $\square$

Nun fehlt nicht viel zum ersten Kongruenzsatz:

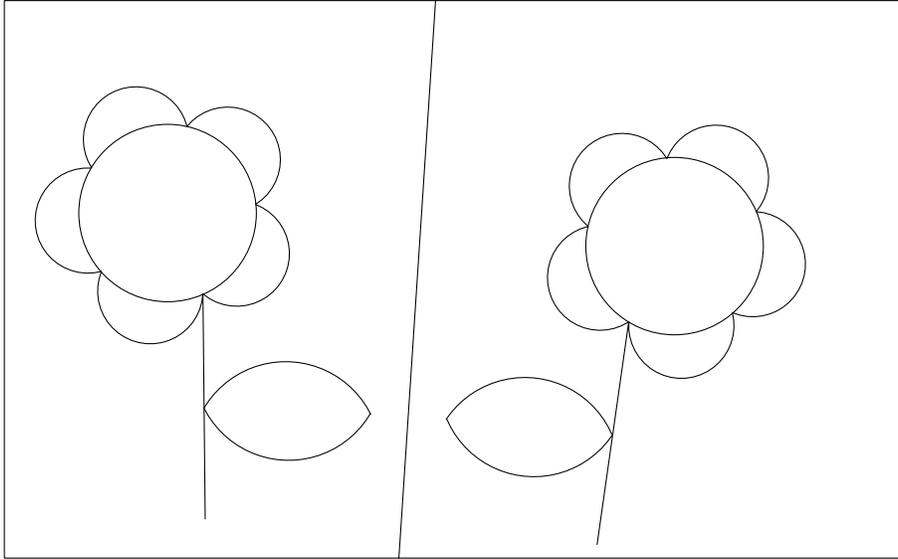


Abbildung 6: Der Effekt einer Reflektion.

**Satz 1.9** (Kongruenzsatz „SSS“). *Seien  $PQR$  und  $P'Q'R'$  Dreiecke. Wenn gilt  $|PQ| = |P'Q'|$ ,  $|QR| = |Q'R'|$  und  $|PR| = |P'R'|$ , dann sind  $PQR$  und  $P'Q'R'$  kongruent.*

*Beweis.* Da  $|PQ| = |P'Q'|$  ist, existiert nach Proposition 1.8 eine Bewegung  $\varphi$  mit  $\varphi(P) = P'$  und  $\varphi(Q) = Q'$ . Wir ersetzen das Dreieck  $PQR$  durch das kongruente Dreieck  $\varphi(PQR)$ . Danach gilt,  $P = P'$  und  $Q = Q'$ . Nun liegen  $R$  und  $R'$  beide auf den Kreisen  $P_R$  und  $Q_R$ , die sich in zwei Punkten schneiden. Wenn  $R = R'$  ist, sind wir fertig, denn  $PQR = P'Q'R'$ . Andernfalls sei  $g = PQ$ . Die Spiegelung  $\sigma_g$  hält dann  $P$  und  $Q$  fest und vertauscht wegen Axiom 3(1) die beiden Punkte  $R$  und  $R'$ . Somit ist  $\sigma_g(PQR) = P'Q'R'$ .  $\square$

**Proposition 1.10.** *Zu zwei verschiedenen Punkten  $P$  und  $Q$  gibt es eine eindeutige Gerade  $\ell$  so, dass  $\sigma_\ell(P) = Q$  und  $\sigma_\ell(Q) = P$ .*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die Existenz einer solchen Spiegelung.

Seien  $R$  und  $S$  die beiden Schnittpunkte von  $P_Q$  und  $Q_P$ , einer in jedem Halbraum von  $PQ$  nach Axiom 3(1). Sei  $\ell = RS$ . Wir behaupten, dass  $\sigma_\ell$  die Punkte  $P$  und  $Q$  vertauscht. Denn  $P$  und  $Q$  sind die beiden eindeutigen Schnittpunkte von  $R_P$  und  $S_P$ . Da sie nicht auf  $\ell$  liegen, hält  $\sigma_\ell$  sie nicht fest und da es nur zwei gibt, vertauscht es sie.

Ist  $\ell'$  eine weitere Gerade, so dass  $\sigma_{\ell'}$  die Punkte  $P$  und  $Q$  vertauscht, dann gilt für jeden Punkt  $N$  auf  $\ell'$ , dass  $|PN| = |\sigma_{\ell'}(P)\sigma_{\ell'}(N)| = |QN|$ . Insbesondere sind zwei Schnittpunkte von  $PQ$  mit  $\ell'$  auch Punkte von  $QP$ . Da sich  $PQ$  und  $QP$  nur in den beiden Punkten  $R$  und  $S$  schneiden, folgt dass  $\ell' = RS = \ell$ .  $\square$

Wenn  $P$  und  $Q$  zwei verschiedene Punkte sind und  $\sigma_{\ell}$  die Spiegelung, die sie vertauscht, nennen wir  $\ell$  die *Mittelsenkrechte* von  $\overline{PQ}$ . Wir nennen den Schnittpunkt von  $PQ$  mit  $\ell$  den *Mittelpunkt* von  $P$  und  $Q$ .

Aus dem Beweis von Proposition 1.10 sehen wir:

**Folgerung 1.11.** *Seien  $P$  und  $Q$  zwei verschiedene Punkte und  $\ell$  die Mittelsenkrechte von  $\overline{PQ}$ . Ein Punkt  $N$  liegt auf  $\ell$  genau dann, wenn  $|PN| = |QN|$ .*

*Beweis.* Wenn  $N$  auf  $\ell$  liegt, ist  $\sigma_{\ell}(N) = N$ , also  $|PN| = |\sigma_{\ell}(P)\sigma_{\ell}(N)| = |QN|$ .

Wir nehmen umgekehrt an, dass  $|PN| = |QN|$  und wollen zeigen, dass  $N$  auf  $\ell$  liegt. Sei  $M$  der Mittelpunkt von  $P$  und  $Q$ . Wenn  $N = M$  ist, wissen wir bereits, dass  $N$  in  $\ell$ . Es bleibt also, den Fall  $N \neq M$  zu betrachten. Sei  $N' = \sigma_{PQ}(N)$ . Dann ist  $NN' = MN$  und  $\sigma_{NN'}$  vertauscht  $P$  und  $Q$ . Also ist  $NN' = MN$  die Mittelsenkrechte von  $\overline{PQ}$ .  $\square$

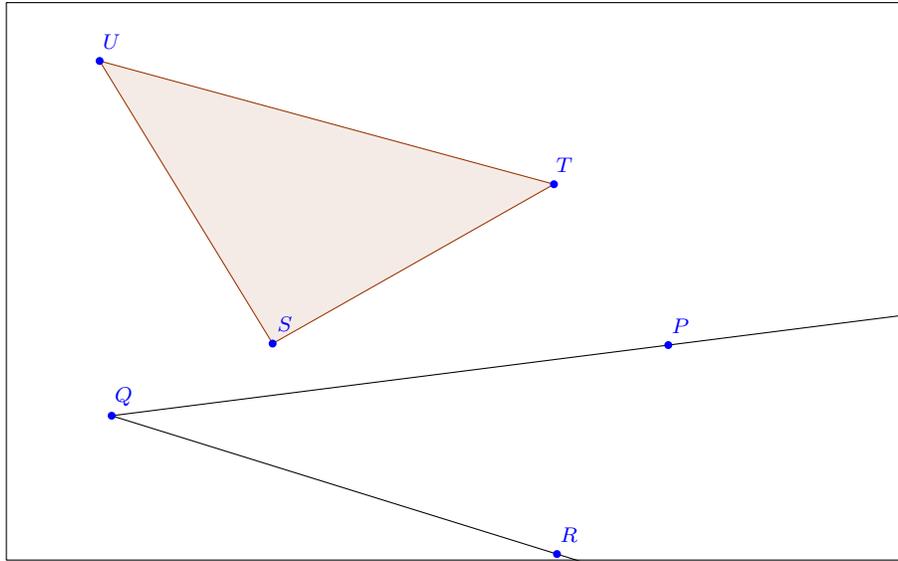
## 1.5 Winkel

Seien  $P, Q, R$  drei Punkte. Die beiden Strahlen  $s = \overrightarrow{QP}$  und  $t = \overrightarrow{QR}$  bilden einen *Winkel*, den wir mit  $\angle(s, t)$  oder auch mit  $\angle PQR$  bezeichnen. Die Strahlen  $s$  und  $t$  heißen die *Schenkel* des Winkels, der Punkt  $Q$  ist sein *Scheitel*.

Seien  $g$  und  $h$  zwei Geraden, die sich in einem Punkt  $Q$  schneiden. Seien  $s$  und  $s'$  die beiden Strahlen in  $g$  ab  $Q$  und  $t$  und  $t'$  die beiden Strahlen in  $h$  ab  $Q$ . Die Winkel  $\angle(s, t)$  und  $\angle(t, s')$  sind *Nebenwinkel*. Die Winkel  $\angle(s, t)$  und  $\angle(s', t')$  sind *Gegenwinkel*. Der Winkel  $\angle(s, s')$  ist ein *gestreckter Winkel*. Ein *rechter Winkel* ist ein Winkel, der kongruent zu einem Nebenwinkel ist.

**Proposition 1.12.** *Für jeden Winkel  $\angle(s, t)$  gibt es eine Bewegung, die  $s$  und  $t$  vertauscht. Mit anderen Worten:  $\angle(s, t)$  und  $\angle(t, s)$  sind kongruent.*

*Beweis.* Sei  $P$  der Scheitel von  $\angle(s, t)$  und seien  $Q \in s$  und  $R \in t$  von  $P$  verschieden mit  $|PQ| = |PR|$ . Dann sind die Dreiecke  $PQR$  und  $PRQ$  nach

Abbildung 7: Ein Winkel  $\angle PQR$  und ein Dreieck  $STU$ .

Satz 1.9 kongruent. Es gibt also eine Bewegung, die  $P$  festhält und  $Q$  und  $R$  vertauscht. Diese vertauscht auch die Strahlen  $s$  und  $t$ .  $\square$

**Proposition 1.13.** *Nebenwinkel von kongruenten Winkeln sind kongruent.*

*Beweis.* Sei  $\varphi$  eine Bewegung, die  $\angle(s, t)$  auf  $\angle(s', t')$  abbildet. Sei  $u$  der zu  $s$  komplementäre Strahl und  $u'$  der zu  $s'$  komplementäre. Dann bildet  $\varphi$  den eindeutigen zu  $s$  komplementären Strahl  $u$  auf den eindeutigen zu  $s'$  komplementären Strahl  $u'$  ab:  $\varphi(u) = u'$ . Also bildet  $\varphi$  den Winkel  $\angle(t, u)$  auf  $\angle(t', u')$  ab.  $\square$

**Folgerung 1.14.** *Jeder Winkel ist kongruent zu seinem Gegenwinkel.*

*Beweis.* Zwei Gegenwinkel haben einen gemeinsamen Nebenwinkel, der zu sich selbst kongruent ist. Die Aussage folgt daher aus Proposition 1.13.  $\square$

**Satz 1.15** (Kongruenzsatz „SWS“). *Wenn  $PQR$  und  $P'Q'R'$  Dreiecke sind mit  $|PQ| = |P'Q'|$  und  $|QR| = |Q'R'|$  und wenn  $\angle PQR$  kongruent ist zu  $\angle P'Q'R'$ , dann ist  $PQR$  kongruent zu  $P'Q'R'$ .*

*Beweis.* Sei  $\varphi$  eine Bewegung, die  $\angle PQR$  auf  $\angle P'Q'R'$  abbildet. Mit Proposition 1.12 können wir annehmen, dass  $\varphi(\overrightarrow{QP}) = \overrightarrow{Q'P'}$  und  $\varphi(\overrightarrow{QR}) = \overrightarrow{Q'R'}$ .

Dann bildet  $\varphi$  aber auch  $P$ , als den eindeutigen Punkt auf  $\overrightarrow{QP}$  mit Abstand  $|QP|$  auf  $P'$  ab, den eindeutigen Punkt auf  $\overrightarrow{Q'P'}$  mit Abstand  $|Q'P'| = |QP|$ . Ein analoges Argument zeigt, dass  $\varphi(R) = R'$ .  $\square$

**Proposition 1.16.** *Wenn  $\angle(s, t)$  und  $\angle(s, t')$  kongruent sind und  $t$  und  $t'$  im selben Halbraum der von  $s$  aufgespannten Gerade, dann ist  $t = t'$ .*

*Beweis.* Sei  $P$  Scheitel von  $\angle(s, t)$  und seien  $Q \neq P$  ein Punkt auf  $s$  und  $R \neq P$  ein Punkt auf  $t$ . Eine Bewegung, die  $\angle(s, t)$  auf  $\angle(s, t')$  abbildet, bildet  $R$  auf einen Punkt  $R' \in t'$  ab. Nach Voraussetzung liegen  $R$  und  $R'$  im selben Halbraum der von  $s$  aufgespannten Gerade. Sie sind beide Schnittpunkte der Kreise  $P_R$  und  $Q_R = Q_{R'}$ . Da es nur einen solchen Schnittpunkt gibt, ist  $R = R'$  und damit  $t = \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PR'} = t'$ .  $\square$

**Satz 1.17** (Kongruenzsatz „WSW“). *Wenn  $PQR$  und  $P'Q'R'$  Dreiecke sind mit  $|PQ| = |P'Q'|$ ,  $\angle PQR \equiv \angle P'Q'R'$  und  $\angle QPR \equiv \angle Q'P'R'$ , dann ist  $PQR$  kongruent zu  $P'Q'R'$ .*

*Beweis.* Sei  $\varphi$  eine Bewegung, die  $P$  auf  $P'$  und  $Q$  auf  $Q'$  abbildet und den Halbraum von  $PQ$  der  $R$  enthält auf den Halbraum von  $P'Q'$  der  $R'$  enthält. Eine solche kann man konstruieren wie im Beweis von Satz 1.9. Da  $\varphi(\angle QPR) \equiv \angle QPR \equiv \angle Q'P'R'$  ist, ist nach Proposition 1.16  $\varphi(\overrightarrow{PR}) = \overrightarrow{P'R'}$ . Ähnlich sieht man, dass  $\varphi(\overrightarrow{QR}) = \overrightarrow{Q'R'}$ . Damit bildet  $\varphi$  den Schnittpunkt  $R$  von  $\overrightarrow{PR}$  und  $\overrightarrow{QR}$  auf den Schnittpunkt  $R'$  von  $\overrightarrow{P'R'}$  und  $\overrightarrow{Q'R'}$  ab.  $\square$

Es gibt noch einen weiteren Kongruenzsatz, den wir ohne Beweis formulieren:

**Satz 1.18** (Kongruenzsatz WWS). *Wenn  $PQR$  und  $P'Q'R'$  Dreiecke sind mit  $|PQ| = |P'Q'|$ ,  $\angle QPR \equiv \angle Q'P'R'$  und  $\angle QRP \equiv \angle Q'R'P'$ , dann ist  $PQR$  kongruent zu  $P'Q'R'$ .*

**Übung 1** (WWS konstruktiv). *Gegeben Winkel  $\angle ABC$  und  $\angle DEF$  und ein Segment  $\overline{GH}$ , konstruiere ein Dreieck  $PQR$  mit  $\angle RPQ \equiv \angle ABC$ ,  $\angle PQR \equiv \angle DEF$  und  $|QR| = |GH|$ .*

**Proposition 1.19.** *Seien  $s, s', t$  Strahlen ab einem Punkt  $P$ , so dass  $g = s \cup s'$  eine Gerade ist. Sei  $\ell$  die Gerade, die  $t$  enthält. Die einzige Bewegung, die  $\angle(s, t)$  auf  $\angle(s', t)$  abbildet, ist die Spiegelung an  $\ell$ .*

*Beweis.* Seien  $Q \in s$  und  $Q' \in s'$  Punkte im gleichen Abstand von  $P$ . Sei  $\varphi$  eine Bewegung, die  $s$  auf  $s'$  abbildet und  $t$  auf sich selbst. Dann ist  $\ell$  in der Fixpunktmenge von  $\varphi$  und  $\varphi(Q) = \varphi(Q')$ . Nach Proposition 1.5 ist  $\varphi$  die (nach Axiom 5(3) eindeutige) Spiegelung an  $\ell$ .  $\square$

**Folgerung 1.20.** *Rechte Winkel sind kongruent zueinander.*

*Beweis.* Seien  $\angle(s, t)$  und  $\angle(s', t')$  zwei rechte Winkel. Aus Satz 1.9 folgt, dass  $\angle(s', t')$  kongruent ist zu einem Winkel  $\angle(s, t'')$  bei dem  $t''$  im selben Halbraum der von  $s$  aufgespannten Gerade liegt, wie  $t$ . Aus Proposition 1.19 folgt, dass  $t = t''$ .  $\square$

Wir ordnen jedem Winkel eine Gradzahl zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$  zu. Die folgenden Regeln beschreiben die Zuordnung: Ein trivialer Winkel  $\angle(s, s)$  misst  $0^\circ$ . Ein rechter Winkel misst  $90^\circ$ . Ein gestreckter Winkel misst  $180^\circ$ . Die Summe von zwei Winkeln, die  $x^\circ$  und  $y^\circ$  messen, misst  $(x + y)^\circ$ , vorausgesetzt  $x + y \leq 180$ . Kleinere Winkel messen kleinere Gradzahlen. Um auszudrücken, dass  $\angle(s, t)$  eine Gradzahl  $x^\circ$  misst, schreiben wir der Einfachheit halber  $\angle(s, t) = x^\circ$ .

Aus Folgerung 1.20 erhalten wir:

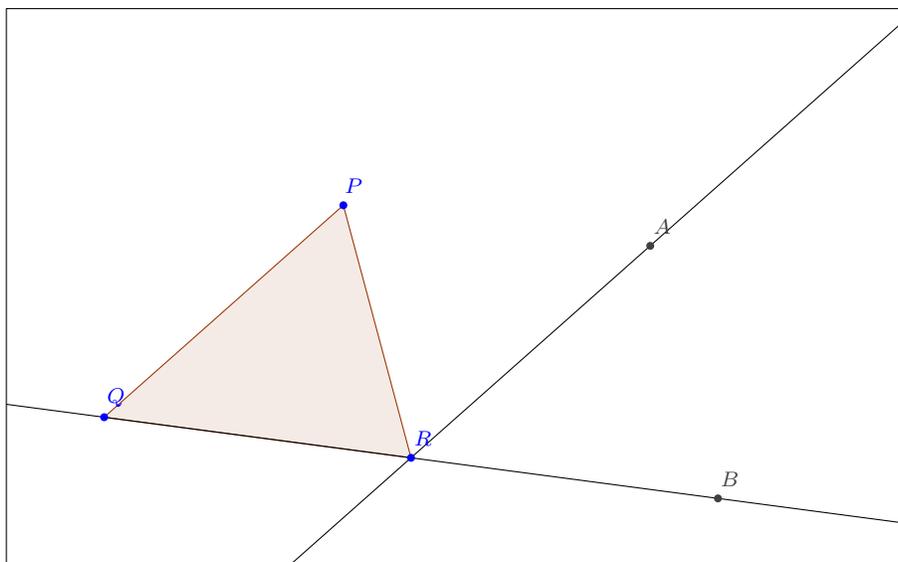
**Folgerung 1.21.** *Kongruente Winkel messen dieselbe Gradzahl.*

Wir kommen zu einer fundamentalen Aussage über Winkel in Dreiecken:

**Proposition 1.22.** *Die Winkelsumme im Dreieck ist  $180^\circ$ . Das heißt, ist  $PQR$  ein beliebiges Dreieck, dann ist die Summe von  $\angle PQR$ ,  $\angle QRP$  und  $\angle RPQ$  gerade  $180^\circ$ .*

*Beweis.* Sei  $g$  die zu  $PQ$  parallele Gerade durch  $R$ . Sei  $A$  der Schnittpunkt von  $RQP$  mit  $g$  der im selben Halbraum von  $QR$  liegt, wie  $P$ . Sei  $B$  der von  $Q$  verschiedene Schnittpunkt von  $RQ$  und  $QR$  (vgl. Abbildung 8). Die Summe von  $\angle QRP$ ,  $\angle PRA$  und  $\angle ARB$  ist  $180^\circ$ . Die Behauptung folgt deshalb, wenn wir zeigen, dass  $\angle QPR \equiv \angle ARP$  und  $\angle PQR \equiv \angle ARB$ .

Sei  $\tau_{QP}$  die Translation, die  $Q$  auf  $P$  abbildet. Nach Konstruktion bildet sie  $R$  auf  $B$  und  $P$  auf  $A$  ab. Also ist  $\angle PQR \equiv \angle ARB$ . Sei  $\tau_{PR}$  die Translation, die  $P$  auf  $R$  abbildet. Nach Konstruktion bildet sie  $\angle QPR$  auf den Gegenwinkel von  $\angle ARP$  in  $R$  ab. Aus Folgerung 1.14 folgt, dass  $\angle ARP \equiv \angle QPR$ .  $\square$

Abbildung 8: Die Winkelsumme im Dreieck ist  $180^\circ$ .

Wenn wir den Winkel zwischen zwei Strahlen  $s$  und  $t$  im Gegenuhrzeigersinn messen, können wir ihm eine Zahl zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$  zuordnen. Der Vorteil ist, dass dann das Winkelmaß der Summe zweier Winkel immer gleich der Summe der einzelnen Winkelmaße ist. Der Nachteil ist, dass dieses Maß nicht invariant unter Kongruenz ist. Wir bezeichnen dieses Maß als den *algebraischen Winkel* und schreiben ihn  $\sphericalangle(s, t)$ .

## 2 Euklids Elemente: erstes Buch

In diesem Abschnitt wollen wir uns einige von Euklids Aussagen und Konstruktionen aus den „Elementen“ ansehen. Einige haben wir bereits gesehen: Problem 1.2 und Problem 1.1 und der Kongruenzsatz SWS sind die Propositionen 1, 2, und 4 im ersten Buch der Elemente. Die Grundkonstruktionen einen Winkel zu halbieren, eine Strecke zu halbieren, das Lot zu fällen, einen Winkel zu übertragen und die Parallele durch einen Punkt zu konstruieren sind die Propositionen 9 bis 12, 23 und 31. Der Gegenwinkelsatz ist Proposition 15. Die Dreiecksungleichung (unser Axiom 1(3)) ist bei Euklid Proposition 20. Die Kongruenzsätze WSW und WWS sind Euklids Proposition 26. Der Satz über die Winkelsumme im Dreieck (unsere Proposition 1.22) ist Euklids Proposition 32.

**Problem 2.1.** Seien  $a = \overline{A_1A_2}$ ,  $b = \overline{B_1B_2}$  und  $c = \overline{C_1C_2}$  Segmente, deren Längen die drei Dreiecksungleichungen erfüllen, also  $|A_1A_2| \leq |B_1B_2| + |C_1C_2|$ ,  $|B_1B_2| \leq |A_1A_2| + |C_1C_2|$ ,  $|C_1C_2| \leq |A_1A_2| + |B_1B_2|$ . Konstruiere ein Dreieck  $PQR$  mit  $|PQ| = |A_1A_2|$ ,  $|QR| = |B_1B_2|$  und  $|PR| = |C_1C_2|$ .

*Konstruktion.* Wähle  $P = A_1$ ,  $Q = A_2$  und  $R$  als den Schnittpunkt von  $P_{C_1C_2}$  und  $Q_{B_1B_2}$ .  $\diamond$

**Folgerung 2.2.** Drei Längen  $|A_1A_2|$ ,  $|B_1B_2|$  und  $|C_1C_2|$  sind genau dann die Kantenlängen eines Dreiecks, wenn sie die drei Dreiecksungleichungen erfüllen.

## 2.1 Polygone

Im Folgenden werden wir neben Dreiecken allgemeinere  $n$ -Ecke oder Polygone betrachten.

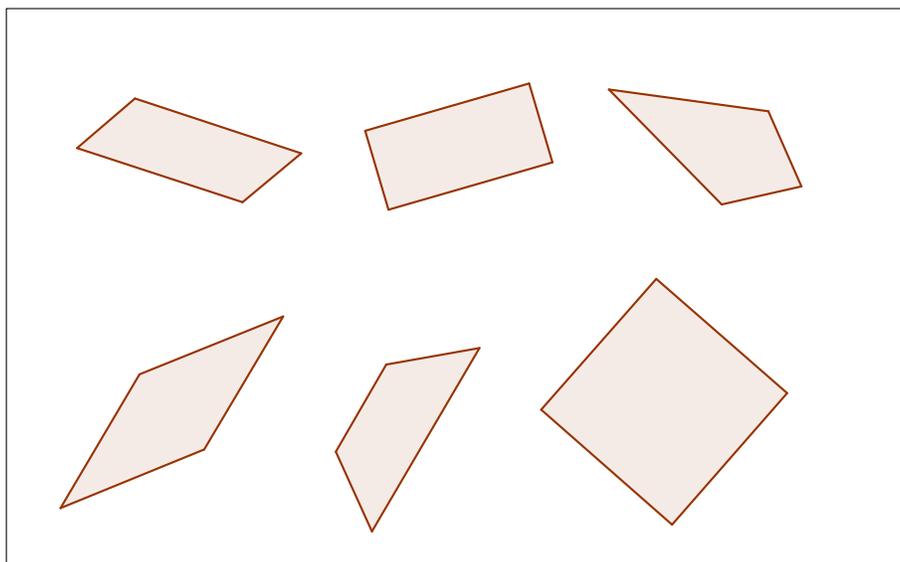


Abbildung 9: Parallelogramm, Rechteck, Drachenviereck, Raute, Trapez, Quadrat.

Vier Punkte  $P, Q, R, S$  bilden ein *Viereck* wenn sich die Segmente  $\overline{PQ}$  und  $\overline{RS}$  ebenso wie die Segmente  $\overline{QR}$  und  $\overline{PS}$  nicht schneiden. Das Viereck  $PQRS$  ist ein

- ein *Parallelogramm* wenn  $PQ$  und  $RS$  parallel sind und  $QR$  und  $PS$  parallel sind.
- ein *Rechteck* wenn alle seine Winkel rechte Winkel sind (damit sind Rechtecke Parallelogramme).
- ein *Drachenviereck*  $PQRS$  wenn  $|PQ| = |PS|$  und  $|QR| = |RS|$ .
- ein *Trapez* wenn  $PQ \parallel RS$ .
- eine *Raute*, wenn alle Kanten gleich lang sind.
- ein *Quadrat*, wenn es ein Rechteck und eine Raute ist.

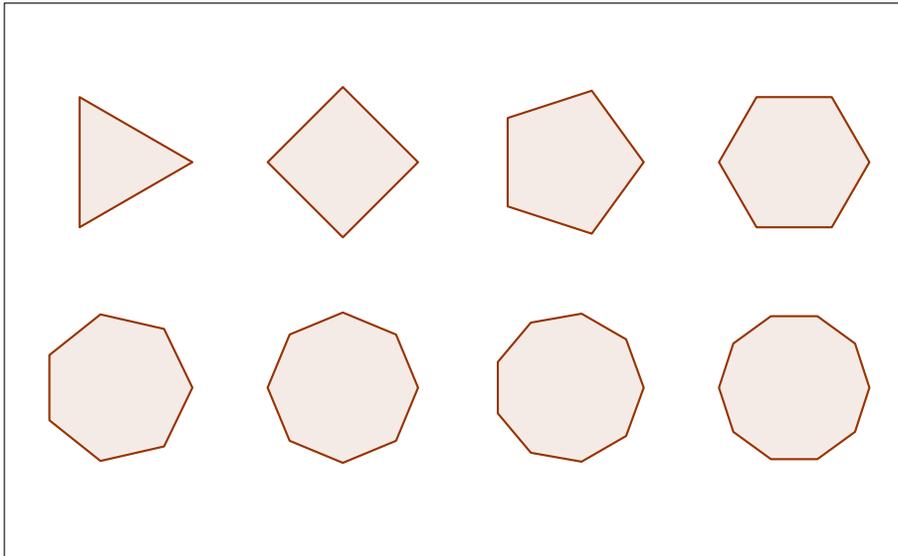


Abbildung 10: Regelmäßige  $n$ -Ecke für  $3 \leq n \leq 10$ .

Punkte  $P_1, \dots, P_n$  bilden ein  $n$ -Eck  $P_1 \dots P_n$ , wenn sich nur benachbarte Segmente schneiden und das nur in ihren Endpunkten.

Ein  $n$ -Eck  $P_1 \dots P_n$  ist *regelmäßig* wenn

- alle Seiten  $\overline{P_i P_{i+1}}$  zueinander kongruent sind und
- alle Winkel  $\angle P_{i-1} P_i P_{i+1}$  zueinander kongruent sind.

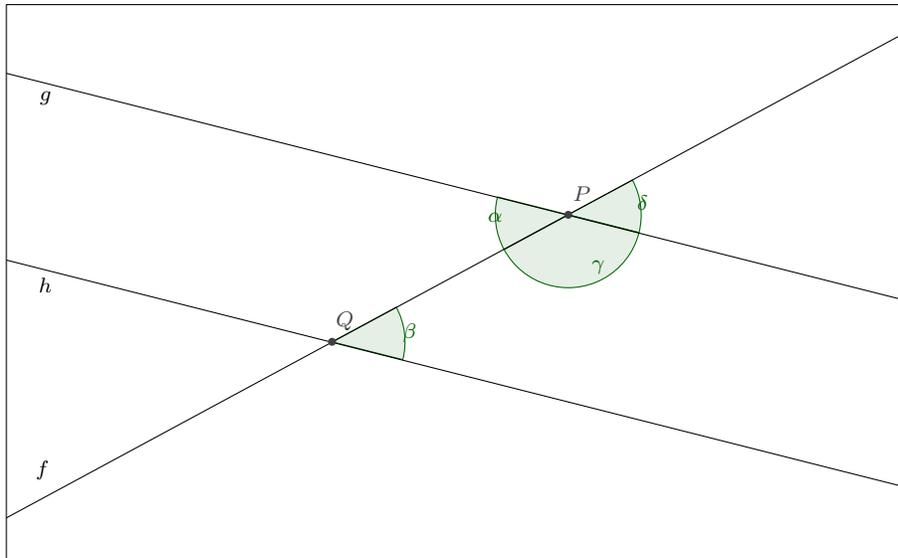


Abbildung 11: Die Konfiguration in Proposition 2.3

Die Bedingung, dass die Seiten kongruent zueinander ist, können wir auch dadurch ausdrücken, dass sie gleich lang sind (Proposition 1.8). Die Bedingung, dass die Winkel kongruent zueinander sind, können wir dadurch ausdrücken, dass sie gleiches Winkelmaß haben (Folgerung 1.21). Die Indizes  $i - 1$  und  $i + 1$  sind um das Polygon umlaufend zu verstehen:  $n + 1$  entspricht 1, 0 entspricht  $n$ ,  $-1$  entspricht  $n - 1$ , usw..

## 2.2 Konstruktionen mit parallelen Geraden

**Proposition 2.3.** *Wenn zwei Geraden  $g$  und  $h$  von einer Geraden  $f$  wie in Abbildung 11 geschnitten werden und*

1. *die wechselseitigen Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  gleich sind oder*
2. *die Stufenwinkel  $\delta$  und  $\beta$  gleich sind oder*
3. *die beiden innen liegenden Winkel  $\beta$  und  $\gamma$  zusammen  $180^\circ$  messen,*

*dann ist  $g$  parallel zu  $h$ .*

*Wenn umgekehrt  $g$  parallel zu  $h$  ist dann gilt jede der Bedingungen (1), (2) und (3).*

*Beweis.* Wir beobachten zunächst, dass wegen des Nebenwinkelsatzes 1.13  $\alpha = \delta = 180^\circ - \gamma$  ist. Die Bedingungen (1), (2) und (3) sind also äquivalent.

Wir nehmen (3) an und wollen zeigen, dass  $g$  und  $h$  parallel sind. Angenommen, das wären sie nicht, dann hätten sie einen Schnittpunkt  $R$ . Dann wäre  $PQR$  ein Dreieck mit  $\angle QPR = \gamma$  und  $\angle PQR = \beta$  (oder, wenn der Schnittpunkt auf der anderen Seite von  $f$  liegt,  $\angle QPR = \alpha \equiv \beta$  und  $\angle PQR \equiv \gamma$ ). Nach Voraussetzung ist aber  $\beta + \gamma = 180^\circ$  was schon die Winkelsumme im Dreieck ist (Proposition 1.22), so dass  $\angle QRP = 0^\circ$  sein müsste, was nicht sein kann.

Wir wollen jetzt die umgekehrte Richtung zeigen: wenn  $g$  und  $h$  parallel sind, dann ist  $\beta + \gamma = 180^\circ$ . Sei dazu  $h'$  die Gerade durch  $Q$  deren Winkel  $\beta'$  die Bedingung  $\beta' + \gamma = 180^\circ$  erfüllt. Aus dem ersten Teil wissen wir, dass  $g$  und  $h'$  parallel sind. Nach dem Parallelenaxiom 4 gibt es aber genau eine Parallele zu  $g$  durch  $Q$ , also ist  $h = h'$  und damit  $\beta = \beta'$ .  $\square$

**Übung 2.** Seien  $g, h, \ell, m$  Geraden,  $\ell \parallel m$ . Zeigen Sie, dass wenn der Winkel den  $g$  und  $m$  einschließen kongruent ist zu dem Winkel, den  $h$  und  $\ell$  auf der gleichen Seite einschließen, dann ist  $g \parallel h$ .

**Proposition 2.4.** Wenn  $PQRS$  ein Parallelogramm ist, dann ist  $|PQ| = |RS|$  und  $|QR| = |PS|$ .

*Beweis.* Da  $PS$  und  $QR$  parallel sind, sind  $\angle PSQ$  und  $\angle SQR$  wechselseitige Winkel und deshalb nach Proposition 2.3 kongruent. Genauso sind  $\angle PQS$  und  $\angle SQR$  wechselseitige Winkel und damit kongruent. Die beiden Dreiecke  $PQS$  und  $RQS$  haben somit eine gleichlange Seite, die von zwei kongruenten Winkeln eingeschlossen wird. Nach dem Kongruenzsatz WSW sind sie also kongruent und insbesondere  $|PQ| = |RS|$  und  $|PS| = |QR|$ .  $\square$

Das motiviert die folgende Definition: zwei Segmente  $\overline{PQ}$  und  $\overline{RS}$  sind *parallel*, wenn  $PQ$  und  $RS$  parallel sind und  $|PQ| = |RS|$ .

**Proposition 2.5.** Wenn Segmente  $\overline{PQ}$  und  $\overline{RS}$  parallel sind, dann ist  $PQRS$  (oder  $PQSR$ ) ein Parallelogramm.

*Beweis.* Nach Proposition 2.3 sind die wechselseitigen Winkel  $\angle PQS$  und  $\angle RSQ$  kongruent. Außerdem sind die Seiten  $\overline{PQ}$  und  $\overline{RS}$  gleich lang. Nach dem Kongruenzsatz „SWS“ folgt, dass die Dreiecke  $PSQ$  und  $RQS$  kongruent sind. Insbesondere ist  $\angle PSQ \equiv \angle RQS$ .

Das sind aber gerade die wechselseitigen Winkel von  $QS$  bezüglich der beiden Geraden  $PS$  und  $QR$ . Da sie gleich groß sind, sind die beiden Geraden also nach Proposition 2.3 parallel.  $\square$

### 2.3 Flächeninhalt von Dreiecken und Parallelogrammen

Wir wollen den *Flächeninhalt* von gradlinigen Figuren definieren. Das machen wir nach folgenden Regeln: kongruente Figuren haben den gleichen Flächeninhalt. Entfernt man von Figuren  $f_1$  und  $f_2$  mit gleichem Flächeninhalt Figuren  $g_1$  und  $g_2$  mit gleichem Flächeninhalt, dann haben die resultierenden Figuren gleichen Flächeninhalt. Fügt man zu Figuren  $f_1$  und  $f_2$  mit gleichem Flächeninhalt Figuren  $g_1$  und  $g_2$  mit gleichem Flächeninhalt hinzu, dann die resultierenden Figuren gleichen Flächeninhalt. Wenn eine Figur  $f$  in  $m$  Teile  $g_1, \dots, g_m$  mit gleichem Flächeninhalt zerlegt werden kann, dann ist der Flächeninhalt von  $f$  der  $m$ -fache Flächeninhalt der  $g_i$ . Ein Rechteck mit Kantenlängen 1 und  $m$  hat Flächeninhalt  $m$ . Wenn zwei Figuren gleichen Flächeninhalt haben, sagen wir auch kurz, dass sie *flächengleich* sind.

**Proposition 2.6.** *Wenn  $ABCD$  ein Parallelogramm ist, dann sind die Dreiecke  $ABD$  und  $CDB$  kongruent und haben deshalb den halben Flächeninhalt des Parallelogramms.*

Der Beweis ist im Beweis von Proposition 2.4 enthalten.

**Proposition 2.7.** *Seien  $g$  und  $h$  parallele Geraden und seien  $ABCD$  und  $EBCF$  Parallelogramme mit  $A, D, E, F \in g$  und  $B, C \in h$ . Dann haben  $ABCD$  und  $EBCF$  gleichen Flächeninhalt.*

*Beweis.* Wir unterscheiden zwei Fälle: Im ersten Fall sind die Punkte auf  $g$  in der Reihenfolge  $A, E, D, F$  angeordnet, im zweiten Fall in der Reihenfolge  $A, D, E, F$ . Es gibt noch weitere Fälle, die sich aber durch umbenennen auf einen dieser beiden zurückführen lassen.

Wir betrachten die beiden Fälle getrennt, stellen aber zunächst Vorüberlegungen an. Da  $ABCD$  und  $EBCF$  Parallelogramme sind, ist  $|AD| = |BC| = |EF|$ . Außerdem ist  $|AB| = |CD|$  und  $|BE| = |CF|$ .

Fall 1: Durch Entfernen des Vierecks  $EBCD$  aus den Parallelogrammen  $ABCD$  und  $EBCF$  erhalten wir die Dreiecke  $ABE$  und  $DCF$ . Hier ist

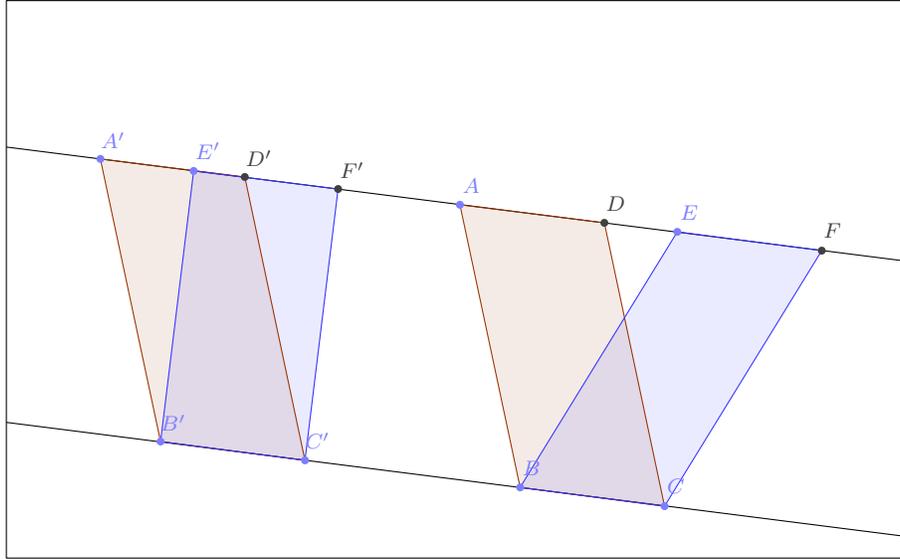


Abbildung 12: Die zwei Fälle in Proposition 2.7.

$|AE| = |AD| - |ED| = |EF| - |ED| = |DF|$ . Zusammen mit den Vorüberlegungen sehen wir, dass die beiden Dreiecke nach dem Kongruenzsatz „SSS“ kongruent sind.

Fall 2: Hier schneiden sich  $\overline{BE}$  und  $\overline{CD}$  in einem Punkt  $G$ . Nach dem Kongruenzsatz „SSS“ sind die Dreiecke  $ABE$  und  $DCF$  kongruent. Durch entfernen des Dreieck  $DGE$  erhalten wir flächengleiche Vierecke  $ABGD$  und  $EGCF$ . Durch Hinzufügen des Dreiecks  $BCG$  erhalten wir, dass  $ABCD$  und  $EBCF$  flächengleich sind, wie gewünscht.  $\square$

**Folgerung 2.8.** Seien  $g$  und  $h$  parallele Geraden und seien  $ABCD$  und  $EFGH$  Parallelogramme mit  $A, D, E, H \in g$ ,  $B, C, F, G \in h$  und  $|BC| = |FG|$ . Dann haben  $ABCD$  und  $EFGH$  den gleichen Flächeninhalt.

*Beweis.* Nach Proposition 2.7 sind die Parallelogramme  $ABCD$  und  $EBCH$  flächengleich. Außerdem sind die Parallelogramme  $EBCH$  und  $EFGH$  flächengleich. Also sind auch  $ABCD$  und  $EFGH$  flächengleich.  $\square$

**Folgerung 2.9.** Wenn  $g$  und  $h$  parallele Geraden sind und  $ABC$  und  $DEF$  Dreiecke mit  $A, D \in g$ ,  $B, C, E, F \in h$  und  $|BC| = |EF|$ , dann haben  $ABC$  und  $DEF$  gleichen Flächeninhalt.

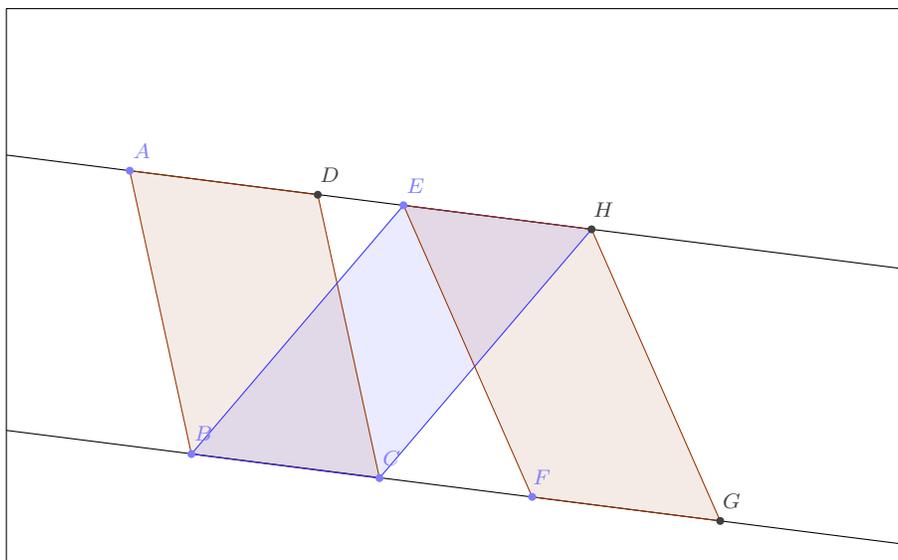


Abbildung 13: Der Beweis von Folgerung 2.8.

*Beweis.* Wir können die Dreiecke zu Parallelogrammen ergänzen, die nach Folgerung 2.8 gleichen Flächeninhalt haben. Die Aussage folgt, weil der Flächeninhalt der Dreiecke halb so groß ist, wie der, der Parallelogramme.  $\square$

**Satz 2.10** (Kathetensatz). *Sei  $ABC$  ein Dreieck und  $\angle BAC$  ein rechter Winkel. Sei  $M$  der Fußpunkt des Lots von  $M$  auf  $BC$ . Der Flächeninhalt des Quadrats mit Kantenlänge  $|AB|$  ist gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks mit Kantenlängen  $|BM|$  und  $|BC|$ . Der Flächeninhalt des Quadrats mit Kantenlänge  $|AC|$  ist gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks mit Kantenlängen  $|MC|$  und  $|BC|$ .*

*Beweis.* Wir konstruieren Punkte  $D, E, F, G, H, K$  durch die Quadrate in Abbildung 14 und  $L$  als den Fußpunkt des Lots auf  $DE$  durch  $L$ .

Weil  $\angle BAG$  und  $\angle BAC$  rechte Winkel sind, sind  $A, C$  und  $G$  kollinear.

Es ist  $\angle DBA \equiv \angle FBC$  weil beide Winkel  $\angle ABC$  plus ein rechter sind. Da  $|BD| = |BC|$  und  $|AB| = |BF|$  ist, folgt aus dem Kongruenzsatz SWS, dass die Dreiecke  $BCF$  und  $BDA$  kongruent sind. Insbesondere haben sie den gleichen Flächeninhalt.

Nach Folgerung 2.9 (angewendet auf die parallelen Geraden  $BF$  und  $AC$ ) hat  $BCF$  den gleichen Flächeninhalt wie  $BGF$ . Das ist nach Propositi-

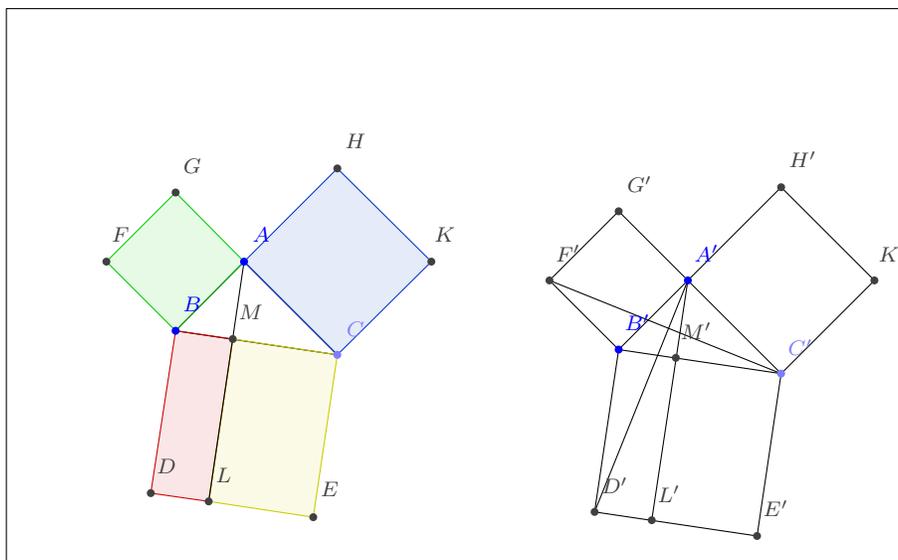


Abbildung 14: Der Kathetensatz.

on 2.6 der halbe Flächeninhalt des Parallelogramms  $BAGF$ . Aus dem gleichen Grund hat  $BDA$  den gleichen Flächeninhalt wie  $BDL$ , was der halbe Flächeninhalt von  $BDLM$  ist.

Gleiche Argument zeigt die zweite Aussage.  $\square$

**Folgerung 2.11** (Satz des Pythagoras). *Wenn  $ABC$  ein Dreieck mit rechtem Winkel  $\angle BAC$  ist, dann ist der Flächeninhalt des Quadrats mit Kantenlänge  $|BC|$  gleich der Summe der Flächeninhalte der Quadrate mit Kantenlänge  $|AB|$  und  $|AC|$ .*

*Beweis.* Wir verwenden wieder Abbildung 14. Das Quadrat  $BCDE$  besteht aus den Rechtecken  $BDLM$  und  $MLEC$ . Die Behauptung folgt deshalb aus dem Kathetensatz.  $\square$

### 3 Gruppen, Bewegungen

Eine Menge  $G$  von Bijektionen  $X \rightarrow X$  ist eine *Gruppe*, wenn

1. die Identität  $\text{id}: X \rightarrow X$  in  $G$  liegt,

2. für jedes Element  $\alpha \in G$  die Inverse  $\alpha^{-1}$  ebenfalls in  $G$  liegt und
3. für zwei Elemente  $\alpha, \beta \in G$  die Komposition  $\alpha \circ \beta$  auch in  $G$  liegt.

*Bemerkung 3.1.* Unsere Definition beschreibt eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe  $\text{Sym}(X)$ , aber jede Gruppe ist isomorph zu einer Gruppe dieser Form.

Ein Beispiel einer Gruppe ist die Menge der Bewegungen  $\mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ . In diesem Abschnitt werden wir weitere Beispiele kennenlernen. Dazu schauen wir uns Komposition von verschiedenen Arten von Bewegungen an und überprüfen, von welcher Art diese Kompositionen sein können.

### 3.1 Symmetrien

Sei  $M \subseteq \mathbb{E}^2$  und  $\varphi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$  eine Bewegung. Wir sagen, dass  $\varphi$  eine *Symmetrie* von  $M$  ist, wenn jeder Punkt von  $M$  auf einen Punkt von  $M$  abgebildet wird und jeder Punkt außerhalb von  $M$  auf einen Punkt außerhalb für  $M$ , d.h. für jeden Punkt  $P$  gilt  $P \in M$  genau dann, wenn  $\varphi(P) \in M$ . Für praktische Zwecke erweitern wir den Begriff auf Bilder (jedem Punkt der Ebene ist eine Farbe zugeordnet), indem wir sagen, dass eine Bewegung  $\varphi$  eine Symmetrie eines Bildes ist, wenn jeder Punkt auf einen Punkt derselben Farbe abgebildet wird. Aussagen über Symmetrien für Mengen verallgemeinern sich auf Bilder indem wir für jede mögliche Farbe die Menge der Punkte betrachten, die diese Farbe haben und dann die Symmetrien all dieser Mengen betrachten.

**Beispiel 3.2.** 1. Jede Drehung mit Fixpunkt  $P$  ist eine Symmetrie des Kreises  $P_Q$ .

2. Wenn  $g$  eine Gerade ist, sind die Spiegelung an  $g$  und jede Spiegelung an einer Senkrechten von  $g$  eine Symmetrien von  $g$ .

**Proposition 3.3.** *Die Menge der Symmetrien einer Menge ist eine Gruppe.*

Man nennt diese Gruppe die *Symmetriegruppe* der Menge.

*Beweis.* Sei  $M \subseteq \mathbb{E}^2$  eine Menge. Die Identität ist eine Symmetrie von  $M$ , weil sie jeden Punkt auf sich abbildet.

Sei  $\varphi$  eine Symmetrie von  $M$ . Wir wollen zeigen, dass  $\varphi^{-1}$  ebenfalls eine Symmetrie von  $M$  ist. Sei dazu  $P$  ein beliebiger Punkt. Sei  $Q := \varphi^{-1}(P)$ .

Nach Definition von Symmetrie ist  $Q \in M$  genau dann, wenn  $\varphi(Q) = P \in M$ . Also ist  $P \in M$  genau dann, wenn  $\varphi^{-1}(P) = Q \in M$ . Also ist  $\varphi^{-1}$  eine Symmetrie von  $M$ .

Seien  $\varphi$  und  $\psi$  Symmetrien von  $M$ . Wir wollen zeigen, dass  $\varphi \circ \psi$  ebenfalls eine Symmetrie von  $M$  ist. Sei wieder  $P$  ein beliebiger Punkt. Sei  $Q = \psi(P)$  und  $R = \varphi(Q) = (\varphi \circ \psi)(P)$ . Da  $\psi$  eine Symmetrie von  $M$  ist sind  $P$  und  $Q$  entweder beide in  $M$  oder beide nicht in  $M$ . Da  $\varphi$  eine Symmetrie von  $M$  ist, sind  $Q$  und  $R$  entweder beide in  $M$  oder beide nicht in  $M$ . Also sind  $P$  und  $R$  entweder beide in  $M$  oder beide nicht in  $M$ .  $\square$

**Satz 3.4.** *Wenn die Symmetriegruppe einer Menge  $M \subseteq \mathbb{E}^2$  endlich ist, gilt einer der folgenden Fälle:*

1. *Es gibt eine Rotation  $\rho$  und jede Symmetrie von  $M$  ist eine Komposition  $\rho^m := \rho \circ \dots \circ \rho$  von  $\rho$  mit sich selbst. In diesem Fall gibt es  $n$  Symmetrien  $\{\text{id} = \rho^0, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}\}$ .*
2. *Es gibt eine Spiegelung  $\sigma$  und eine Rotation  $\rho$ , deren Fixpunkt auf der Achse von  $\sigma$  liegt, so dass  $M$  die folgenden  $2n$  Symmetrien hat:  $\{\text{id} = \rho^0, \rho, \rho^2, \dots, \rho^n, \sigma, \sigma \circ \rho, \sigma \circ \rho^2, \dots, \sigma \circ \rho^{n-1}\}$ .*

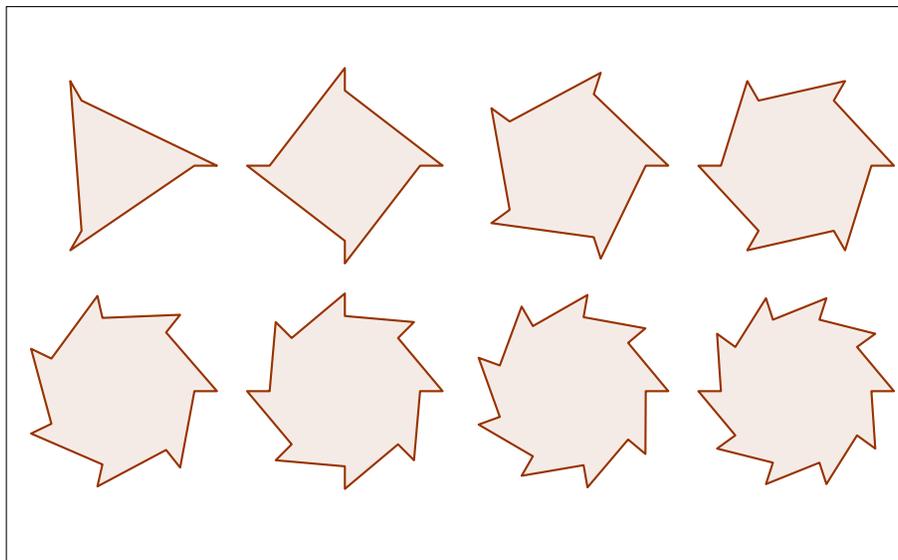
Die erste Sorte von Gruppen nennt man *endliche zyklische Gruppen* und bezeichnet sie mit  $C_n$ . Die zweite Sort von Gruppen nennt man *endliche Diedergruppen* und bezeichnet sie mit  $D_n$ . Typische Beispiele für  $D_n$ -Symmetrien sind die regelmäßigen  $n$ -Ecke (Abbildung 10). Beispiele für  $C_n$ -Symmetrien erhält man, indem man die Spiegelungssymmetrie bricht, zum Beispiel durch Sägezähne wie in Abbildung 15.

### 3.2 Spiegelungen, gerade und ungerade Bewegungen

**Proposition 3.5.** *Seien  $\sigma_\ell$  und  $\sigma_m$  Spiegelungen an Geraden  $\ell$  und  $m$ . Wenn  $\ell$  und  $m$  parallel sind, dann ist  $\sigma_m \circ \sigma_\ell$  eine Verschiebung. Wenn sich  $\ell$  und  $m$  in einem Punkt  $P$  schneiden, ist  $\sigma_m \circ \sigma_\ell$  eine Drehung um  $P$ .*

*Beweis.* Sei  $\varphi = \sigma_\ell \circ \sigma_m$ .

Wir nehmen zunächst an, dass  $\ell$  und  $m$  parallel sind. Wenn  $\ell = m$  ist die Aussage trivial, also nehmen wir an, dass  $\ell \neq m$ . Sei  $g$  eine beliebige Gerade. Wir wollen zeigen, dass  $\varphi(g)$  parallel zu  $g$  ist. Wenn  $g$  parallel zu  $\ell$  und  $m$  ist, ist dies einfach zu sehen, weil dann  $\sigma_\ell(g)$  auch parallel

Abbildung 15: Regelmäßige Sägeblätter mit  $n$  Zähnen für  $3 \leq n \leq 10$ .

zu  $\ell$  und  $m$  ist. Andernfalls sei  $S$  der Schnittpunkt von  $g$  und  $\ell$  und  $T$  der Schnittpunkt von  $\sigma_\ell(g)$  und  $m$ . Seien außerdem  $L \in \ell$  und  $M \in m$  Punkte auf unterschiedlichen Seiten von  $\sigma_\ell(g)$ . Sei  $G \in g$  ein Punkt im von  $T$  abgewandten Halbraum von  $m$ . Jetzt sind die Winkel  $\angle GSL$  und  $\angle TSL = \angle \sigma_\ell(G)SL$  kongruent, weil  $\sigma_\ell$  eine Spiegelung ist. Nach Proposition 2.3 sind die wechselseitigen Winkel  $\angle TSL$  und  $\angle STM$  kongruent. Schließlich sind die Winkel  $\angle STM$  und  $\angle \sigma_m(S)TM$  kongruent weil  $\sigma_m$  eine Spiegelung ist. Aus Übung 2 folgt, dass  $g = GS$  und  $\sigma_\ell \circ \sigma_m(g) = T\sigma_m(S)$  parallel sind.

Sei jetzt  $P$  ein Punkt. Wir wollen zeigen, dass  $P$  kein Fixpunkt von  $\varphi$  ist. Ein Fixpunkt von  $\varphi$  erfüllt  $\sigma_\ell \circ \sigma_m(P) = P$ . Komposition mit  $\sigma_\ell$  ergibt die äquivalente Bedingung  $\sigma_m(P) = \sigma_\ell(P)$ . Wir wollen also zeigen, dass kein Punkt diese Gleichung erfüllt. Sei dazu  $h$  die Gerade senkrecht zu  $\ell$  und  $m$  durch  $P$ . Sei  $A$  der Schnittpunkt von  $h$  und  $\ell$  und  $B$  der Schnittpunkt von  $h$  und  $m$ . Es ist  $|P\sigma_\ell(P)| = 2|PA|$  und  $|P\sigma_m(P)| = 2|PB|$ . Wir unterscheiden drei Fälle je nachdem in welchen Halbräumen von  $\ell$  und  $m$  der Punkt  $P$  liegt. Wenn  $P$  im Streifen zwischen  $\ell$  und  $m$  liegt, ist  $\sigma_\ell(P) \neq \sigma_m(P)$  weil die Spiegelungen  $P$  in den jeweils abseitigen Halbraum abbilden und diese Halbräume sich trivial schneiden. Wenn  $P$  in dem Halbraum von  $\ell$  liegt, der  $m$  nicht enthält, ist  $|P\sigma_\ell(P)| < |P\sigma_m(P)|$ , also ist  $\sigma_\ell(P) \neq \sigma_m(P)$ . Wenn umgekehrt  $P$  im Halbraum von  $m$  liegt, der  $\ell$  nicht enthält, ist  $|P\sigma_\ell(P)| >$

$|P\sigma_m(P)|$ , also wieder  $\sigma_\ell(P) \neq \sigma_m(P)$ .

Nehmen wir jetzt an, dass sich  $\ell$  und  $m$  in einem Punkt  $P$  schneiden. Dann ist offensichtlich  $P$  ein Fixpunkt von  $\varphi$ . Dass es keinen weiteren Fixpunkt  $Q$  gibt, skizzieren wir nur. Für einen solchen würde wieder gelten  $\sigma_\ell(Q) = \sigma_m(Q)$ . Die Menge der Punkte mit  $|Q\sigma_\ell(Q)| = |Q\sigma_m(Q)|$  besteht aber aus den beiden Winkelhalbierenden von  $\ell$  und  $m$ . Diese schließen mit  $\ell$  und  $m$  keinen rechten Winkel ein und werden deshalb nicht auf sich selbst abgebildet (außer im Fall wo  $\ell = m$  und eine der Winkelhalbierenden gleich  $\ell = m$  ist und die andere das Lot in  $P$ ).  $\square$

**Proposition 3.6.** *Jede Verschiebung und jede Drehung ist die Komposition zweier Spiegelungen.*

*Beweis.* Sei  $\tau$  eine Verschiebung, sei  $P$  beliebig und sei  $Q = \tau(P)$ . Sei  $M$  der Mittelpunkt von  $\overline{PQ}$ . Sei  $m$  die Senkrechte zu  $PQ$  durch  $M$  und sei  $\ell$  die Senkrechte zu  $PQ$  durch  $Q$ . Da  $m$  und  $\ell$  parallel zueinander sind, ist  $\sigma_\ell \circ \sigma_m$  nach Proposition 3.5 eine Verschiebung. Außerdem ist  $\sigma_\ell(\sigma_m(P)) = \sigma_\ell(Q) = Q$ . Wegen der Eindeutigkeit in Axiom 5(1) ist  $\tau = \sigma_\ell \circ \sigma_m$ .

Sei jetzt  $\rho$  eine Drehung mit Fixpunkt  $M$ , sei  $P \neq M$  und sei  $Q = \rho(P)$ . Sei  $m$  die Winkelhalbierende von  $\angle PMQ$  und sei  $\ell = MQ$ . Da sich  $m$  und  $\ell$  in  $M$  schneiden, ist nach Proposition 3.5 ist  $\sigma_\ell \circ \sigma_m$  eine Drehung. Offensichtlich ist  $\sigma_\ell(\sigma_m(M)) = M$ . Außerdem ist  $\sigma_\ell(\sigma_m(P)) = \sigma_\ell(Q) = Q$ . Aus der Eindeutigkeit in Axiom 5(2) folgt, dass  $\rho = \sigma_\ell \circ \sigma_m$ .  $\square$

**Satz 3.7.** *Jede Bewegung ist eine Komposition von Spiegelungen.*

*Beweis.* Im Beweis von Satz 1.9 haben wir gesehen, dass jede Bewegung eine Komposition  $\varphi = \sigma \circ \rho \circ \tau$  einer Verschiebung  $\tau$ , einer Drehung  $\rho$  und einer Spiegelung  $\sigma$  ist. Nach Proposition 3.6 sind aber  $\rho = \sigma' \circ \sigma''$  und  $\tau = \sigma''' \circ \sigma''''$  Kompositionen von Spiegelungen. Also ist  $\varphi = \sigma \circ \sigma' \circ \sigma'' \circ \sigma''' \circ \sigma''''$  eine Komposition von Spiegelungen.  $\square$

Eine Bewegung ist *gerade*, wenn sie die Komposition einer geraden Anzahl von Spiegelungen ist. Sie ist *ungerade*, wenn sie die Komposition einer ungeraden Anzahl von Spiegelungen ist. Ungerade Bewegungen sind diejenigen, die im Uhrzeigersinn beschriftete Dreiecke auf in im Gegenuhrzeigersinn beschriftete Dreiecke abbilden, die lesbare Schrift auf spiegelverkehrte Schrift abbilden, und die algebraische Winkelmaße auf ihr negatives abbilden. Insbesondere erhalten gerade Bewegungen algebraische Winkelmaße.

**Beispiel 3.8.** Drehungen und Verschiebungen sind gerade Bewegungen. Spiegelungen sind ungerade Bewegungen.

Da „gerade plus gerade gleich gerade“, „ungerade plus ungerade gleich gerade“, „gerade plus ungerade gleich ungerade“ ist, erhalten wir:

**Proposition 3.9.** *Die Komposition von zwei geraden Bewegungen ist gerade. Die Komposition von zwei ungeraden Bewegungen ist gerade. Die Komposition einer geraden und einer ungeraden (oder einer ungeraden und einer geraden) Bewegung ist ungerade.*

**Folgerung 3.10.** *Die Menge der geraden Bewegungen ist eine Gruppe.*

*Bemerkung 3.11.* Wie schon angemerkt hießen unsere *Bewegungen* bei Herrn Bauer *Isometrien*. Unsere *geraden Bewegungen* sind nun gerade das, was bei Herrn Bauer *Bewegungen* hieß.

**Proposition 3.12.** *Die Fixpunktmenge einer geraden Bewegung ist entweder leer, ein einziger Punkt, oder die ganze Ebene.*

*Beweis.* Nach Proposition 1.5 ist die Fixpunktmenge einer beliebigen Bewegung eins von den genannten oder eine Gerade. Wenn die Fixpunktmenge eine Gerade ist, ist die Bewegung aber eine Spiegelung und damit ungerade.  $\square$

### 3.3 Verschiebungen

**Proposition 3.13.** *Eine Bewegung  $\tau$  ist eine Verschiebung genau dann, wenn für beliebige Punkte  $P$  und  $Q$  das Viereck  $PQ\tau(Q)\tau(P)$  ein Parallelogramm ist (eventuell degeneriert).*

*Insbesondere bewegen Verschiebungen jeden Punkt um denselben Abstand  $|P\tau(P)| = |Q\tau(Q)|$ .*

*Beweis.* Seien  $P$  und  $Q$  zwei Punkte. Wir nehmen an, dass  $\tau$  eine Verschiebung ist und zeigen, dass  $PQ\tau(Q)\tau(P)$  ein Parallelogramm ist. Da  $\tau$  eine Verschiebung ist, bildet es die Gerade  $P\tau(P)$  auf eine parallele Gerade ab, die  $\tau(P)$  enthält, also auf sich selbst. Außerdem sind  $PQ$  und  $\tau(PQ)$  parallel weil  $\tau$  eine Bewegung ist. Damit ist  $PQ\tau(Q)\tau(P)$  ein Parallelogramm (eventuell degeneriert, wenn die zwei der parallelen Geraden gleich sind).

Aus der Parallelogramm-Bedingung folgt zusammen mit Proposition 2.4 die Aussage, dass alle Punkte um denselben Abstand bewegt werden.

Sei jetzt  $\tau$  eine Bewegung, die die Parallelogramm-Bedingung erfüllt. Da sie jeden Punkt um denselben Abstand bewegt ist entweder jeder Punkt ein Fixpunkt (und  $\tau = \text{id}$ ) oder keiner. Wenn  $\tau$  keinen Fixpunkt hat, folgt außerdem, dass eine beliebige Gerade  $PQ$  auf die parallele Gerade  $\tau(P)\tau(Q)$  abgebildet wird. Damit ist  $\tau$  eine Verschiebung.  $\square$

**Proposition 3.14.** *Wenn  $\tau_1$  und  $\tau_2$  Verschiebungen sind, ist  $\tau_2 \circ \tau_1$  auch eine Verschiebung.*

*Beweis.* Seien  $P$  und  $Q$  Punkte. Da  $\tau_1$  eine Verschiebung ist, ist  $\overline{PQ}$  parallel zu  $\overline{\tau_1(P)\tau_1(Q)}$ . Da  $\tau_2$  eine Verschiebung ist, ist  $\overline{\tau_1(P)\tau_1(Q)}$  parallel zu  $\overline{\tau_2(\tau_1(P))\tau_2(\tau_1(Q))}$ . Also ist  $\overline{PQ}$  parallel zu  $\overline{\tau_2(\tau_1(P))\tau_2(\tau_1(Q))}$  und damit  $PQ\tau_2(\tau_1(Q))\tau_2(\tau_1(P))$  nach Proposition 2.5 ein Parallelogramm. Damit folgt die Behauptung aus Proposition 3.13.  $\square$

Außerdem gilt:

**Proposition 3.15.** *Wenn  $\tau_1$  und  $\tau_2$  Verschiebungen sind, ist  $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$ .*

*Beweis.* Sei  $P \in \mathbb{E}^2$  beliebig. Die Segmente  $\overline{P\tau_2(P)}$  und  $\overline{\tau_1(P)\tau_2(\tau_1(P))}$  sind parallel. Also ist  $P\tau_2(P)\tau_2(\tau_1(P))\tau_1(P)$  nach Proposition 2.5 ein Parallelogramm. Folglich sind  $\overline{P\tau_1(P)}$  und  $\overline{\tau_2(P)\tau_2(\tau_1(P))}$  parallel. Das heißt  $\tau_2(\tau_1(P))$  ist das Bild unter  $\tau_1$  von  $\tau_2(P)$  oder kurz  $\tau_2(\tau_1(P)) = \tau_1(\tau_2(P))$ .  $\square$

Nach Definition ist die Identität eine Verschiebung, außerdem ist die Inverse einer Verschiebung eine Verschiebung. Aus Proposition 3.14 folgt deshalb, dass Verschiebungen eine Gruppe bilden (eine Untergruppe der Gruppe der Bewegungen). Eine Gruppe in der  $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$  ist heißt *abelsch*, nach Proposition 3.15 ist die Gruppe der Verschiebungen also abelsch.

**Proposition 3.16.** *Wenn  $\varphi$  eine Bewegung ist und  $\tau'$  eine Verschiebung, dann ist  $\tau := \varphi \circ \tau' \circ \varphi^{-1}$  eine Verschiebung.*

*Beweis.* Seien  $P$  und  $Q$  beliebige Punkte. Wir wollen zeigen, dass  $PQ\tau(Q)\tau(P)$  ein Parallelogramm ist. Sei dazu  $P' := \varphi^{-1}(P)$  und  $Q' := \varphi^{-1}(Q)$ . Da  $\tau'$

eine Verschiebung ist, ist  $P'Q'\tau'(Q')\tau'(P')$  ein Parallelogramm (Proposition 3.13). Nun ist aber

$$\begin{aligned} P &= \varphi(P') \\ Q &= \varphi(Q') \\ \tau(P) &= \varphi(\tau(\varphi^{-1}(P))) = \varphi(\tau'(P')) \\ \tau(Q) &= \varphi(\tau(\varphi^{-1}(Q))) = \varphi(\tau'(Q')) \end{aligned}$$

also  $PQ\tau(Q)\tau(P) = \varphi(P'Q'\tau'(Q')\tau'(P'))$ . Weil die Bewegung  $\varphi$  parallele Geraden auf parallele Geraden abbildet, ist also  $PQ\tau(Q)\tau(P)$  ebenfalls ein Parallelogramm. Damit ist  $\tau$  nach Proposition 3.13 eine Verschiebung.  $\square$

### 3.4 Drehungen und Verschiebungen

Die Beweise mit Verschiebungen waren etwas kompliziert, weil es eine Art von Drehungen gibt, die ebenfalls Geraden auf parallele Geraden abbildet: die Drehungen um  $180^\circ$ . Wir nennen sie auch *Punktspiegelungen*. Wir müssen allerdings beachten, dass sie trotz dieser Bezeichnung keine Spiegelungen sind.

**Proposition 3.17.** *Wenn  $\tau \neq \text{id}$  eine Verschiebung ist und  $\rho$  eine Drehung, dann ist  $\tau \circ \rho \neq \rho \circ \tau$ .*

*Beweis.* Sei  $P$  der Fixpunkt von  $\rho$ . Wäre  $\tau \circ \rho = \rho \circ \tau$ , dann wäre insbesondere  $\tau(P) = \tau(\rho(P)) = \rho(\tau(P))$ , also  $\tau(P)$  ein Fixpunkt von  $\rho$ . Der einzige Fixpunkt von  $\rho$  ist  $P$ . Aber  $\tau(P) \neq P$  weil  $\tau$  eine Verschiebung und nicht die Identität ist. Also ist  $\tau \circ \rho \neq \rho \circ \tau$ .  $\square$

**Problem 3.18.** *Konstruiere ein Dreieck  $PQR$  mit  $|PQ| = |PR|$  wobei  $|QR|$  und  $\angle RPQ$  vorgegeben sind.*

*Konstruktion.* Konstruiere mithilfe von Übung 1 das Dreieck  $MPQ$  wobei  $\angle PQM$  die Hälfte des vorgegebenen Winkels ist,  $|MP|$  die Hälfte der vorgegebenen Länge und  $\angle QMP$  ein rechter Winkel. Sei  $R$  der zweite Schnittpunkt von  $M_P$  mit  $MP$ .  $\diamond$

*Beweis.* Da  $\angle QMP$  ein rechter Winkel ist, sind die beiden Dreiecke  $PQM$  und  $PRM$  kongruent zueinander durch Spiegelung an  $QM$ . Damit ist der Winkel  $\angle PQM$  doppelt so groß wie der Winkel  $\angle QMP$ , also so groß wie gefordert. Außerdem ist  $|PR| = 2|MP|$  also so groß wie gefordert. Schließlich ist  $|PQ| = |RQ|$ .  $\square$

**Proposition 3.19.** *Wenn  $\tau$  eine Verschiebung ist und  $\rho$  eine Drehung, dann ist  $\rho \circ \tau$  eine Drehung.*

*Beweis.* Wenn  $\tau = \text{id}$  ist die Behauptung trivial, wir nehmen also an, dass  $\tau \neq \text{id}$ . Sei  $P$  der Fixpunkt von  $\rho$ . Um die Behauptung zu beweisen, wollen wir den Fixpunkt von  $\rho \circ \tau$  bestimmen, also den Punkt  $Q$  mit  $\rho(\tau(Q)) = Q$ . Mit anderen Worten wollen wir, dass  $\tau(Q) = \rho^{-1}(Q)$  ist. Sei  $PQR$  das Dreieck, das wie folgt beschrieben ist:  $P$  ist der Fixpunkt von  $\rho$ ; das Segment  $\overline{QR}$  ist parallel zu  $\overline{P\tau(P)}$ , der Winkel  $\angle RPQ$  ist der Winkel um den  $\rho$  dreht (wenn also  $\rho(A) = B$ , dann ist  $\angle RPQ \equiv \angle APB$ ), es ist  $|PQ| = |QR|$ . Diese Art Dreieck haben wir in Problem 3.18 konstruiert. Wir behaupten, dass  $Q$  der gewünschte Fixpunkt ist.

Da  $\overline{QR}$  parallel zu  $\overline{P\tau(P)}$  ist, ist  $\tau(Q) = R$ . Da außerdem  $|PQ| = |QR|$  ist und  $\angle RPQ$  der Drehwinkel, ist  $\rho(R) = Q$ . Damit ist  $Q$  der gewünschte Fixpunkt. Es bleibt zu zeigen, dass  $\rho \circ \tau$  keinen weiteren Fixpunkt hat. Da  $\rho \circ \tau$  gerade ist, bleibt nach Proposition 3.12 nur die Möglichkeit, dass es die Identität sein könnte, was aber nicht der Fall ist, weil  $P$  kein Fixpunkt ist.  $\square$

**Folgerung 3.20.** *Wenn  $\tau$  eine Verschiebung ist und  $\rho$  eine Drehung, dann ist  $\tau \circ \rho$  eine Drehung.*

*Beweis.* Nach der Proposition ist  $\rho^{-1} \circ \tau^{-1}$  eine Drehung  $\rho'$ . Dann ist aber  $\tau \circ \rho = \rho'^{-1}$  ebenfalls eine Drehung.  $\square$

**Folgerung 3.21.** *Jede Bewegung ist eine Komposition von höchstens drei Spiegelungen.*

*Beweis.* Im Beweis von Satz 1.9 haben wir gesehen, dass jede Bewegung  $\varphi$  geschrieben werden kann als  $\varphi = \sigma \circ \rho \circ \tau$  wobei  $\sigma$  die Identität oder eine Spiegelung,  $\rho$  eine Drehung und  $\tau$  eine Verschiebung ist. Nach Proposition 3.19 ist aber  $\rho \circ \tau = \rho'$  eine Drehung, die nach Proposition 3.6 die Komposition  $\rho' = \sigma' \circ \sigma''$  zweier Spiegelungen ist. Es ist also  $\varphi = \sigma \circ \sigma' \circ \sigma''$  die Komposition von höchstens drei Spiegelungen.  $\square$

*Bemerkung 3.22.* Man kann Folgerung 3.21 auch zeigen, indem im Beweis von Satz 1.9 statt der Verschiebung und der Drehung jeweils eine Spiegelung verwendet.

Aus Proposition 3.19 folgt, dass die Menge der Drehungen und Verschiebungen eine Gruppe ist. Proposition 3.17 besagt, dass diese Gruppe nicht

abelsch ist. Wir haben hier allerdings keine neue Gruppe gefunden, sondern die Gruppe der geraden Bewegungen wiederentdeckt:

**Proposition 3.23.** *Jede gerade Bewegung ist eine Verschiebung oder eine Drehung.*

*Beweis.* Sei  $\varphi$  eine gerade Bewegung. Nach Folgerung 3.21 können wir  $\varphi$  als Komposition von höchstens drei Spiegelungen schreiben. Da  $\varphi$  gerade ist, sind es entweder null oder zwei Spiegelungen. Wenn es zwei Spiegelungen sind, ist die Komposition nach Proposition 3.5 eine Verschiebung oder eine Drehung. Wenn es null Spiegelungen sind, ist  $\varphi = \text{id}$ , was nach Definition sowohl eine Verschiebung als auch eine Drehung ist.  $\square$

### 3.5 Gleitspiegelungen

Bisher wissen wir, dass jede Bewegung die Komposition von höchstens drei Spiegelungen ist. Die Komposition von null Spiegelungen bzw. einer Spiegelung ist die Identität bzw. eine Spiegelung. Die Komposition von zwei Spiegelungen ist eine Drehung oder Verschiebung. Die Frage, die offen bleibt, ist: gibt es Bewegungen, für die man tatsächlich drei Spiegelungen braucht, oder kann jede Bewegung in Wirklichkeit als Komposition von höchstens zwei Spiegelungen geschrieben werden? Wir werden sehen, dass ersteres der Fall ist. Die Bewegungen, für die man drei Spiegelungen braucht, heißen *Gleitspiegelungen*.

Wir wissen auch bereits, dass die Fixpunktmenge einer Bewegung die Ebene, eine Gerade, ein Punkt, oder leer ist. Wenn die Fixpunktmenge die Ebene ist, ist die Bewegung die Identität. Ist die Fixpunktmenge eine Gerade, ist die Bewegung nach Definition eine Spiegelung. Ist die Fixpunktmenge ein Punkt, ist die Bewegung nach Definition eine Drehung. Das heißt, Gleitspiegelungen können keinen Fixpunkt haben.

Um Gleitspiegelungen zu konstruieren, beobachten wir zunächst folgendes:

**Proposition 3.24.** *Seien  $P$  und  $Q$  Punkte, sei  $\tau$  die Verschiebung, die  $P$  auf  $Q$  abbildet, und  $\sigma$  die Spiegelung an  $PQ$ . Dann ist  $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$ .*

*Beweis.* Sei  $R$  ein beliebiger Punkt. Wenn  $R \in PQ$  ist  $\sigma(R) = R$  und  $\sigma(\tau(R)) = \tau(R)$ , und die Behauptung ist klar. Wir betrachten also den Fall, wo  $R$  nicht auf  $PQ$  liegt. Die Verschiebung  $\tau$  bildet jeden der Halbräume von  $PQ$  auf sich ab. Die Spiegelung  $\sigma$  vertauscht die beiden Halbräume von

$PQ$ . Die Punkte  $R$  und  $\sigma(R)$  sind die beiden Schnittpunkte von  $P_R$  und  $Q_R$  und die Punkte  $\tau(R)$  und  $\sigma(\tau(R))$  sind die beiden Schnittpunkte von  $P_{\tau(R)}$  und  $Q_{\tau(R)}$ . Da  $\tau(\sigma(R))$  der von  $\tau(R)$  verschiedene Schnittpunkt von  $P_{\tau(R)}$  und  $Q_{\tau(R)}$  ist, ist  $\tau(\sigma(R)) = \sigma(\tau(R))$ .  $\square$

Die *Gleitspiegelung mit Achse  $PQ$ , die  $P$  auf  $Q$  abbildet*, ist die Abbildung  $\gamma = \tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$  wobei  $\tau$  die Verschiebung ist, die  $P$  auf  $Q$  abbildet und  $\sigma$  die Spiegelung an  $PQ$ . Wenn  $P = Q$ , ist  $\tau = \text{id}$  und  $\gamma = \sigma$  ist eine Spiegelung. Um diesen Fall auszuschließen sagen wir, dass  $\gamma$  eine *echte Gleitspiegelung* ist, wenn  $P \neq Q$  ist.

**Proposition 3.25.** *Eine echte Gleitspiegelung ist die Komposition von (nicht weniger als) drei Spiegelungen. Sie hat keinen Fixpunkt.*

*Beweis.* Sei  $\gamma$  die Gleitspiegelung mit Achse  $PQ$ , die  $P$  auf  $Q$  abbildet, wobei  $P \neq Q$ . Sei  $\tau$  die Verschiebung, die  $P$  auf  $Q$  abbildet und  $\sigma$  die Spiegelung an  $PQ$ . Wir zeigen zunächst, dass  $\gamma$  keinen Fixpunkt hat. Eine Gerade  $g$ , die senkrecht zu  $PQ$  ist, von  $\sigma$  auf sich selbst abgebildet und von  $\tau$  auf eine von  $g$  verschiedene Parallele. Ist jetzt  $R$  irgendein Punkt und  $g$  das Lot auf  $PQ$  durch  $R$ , dann ist  $g = \sigma(g) \neq \tau(\sigma(g)) = \tau(g)$ . Jetzt liegt  $R$  auf  $g$  und  $\gamma(R)$  auf  $\tau(g)$ . Da  $g$  und  $\tau(g)$  sich nicht schneiden, ist  $R \neq \gamma(R)$ .

Nach Definition ist  $\gamma$  eine Komposition einer ungeraden Anzahl von Spiegelungen (wenn wir  $\tau$  als Komposition von zwei Spiegelungen schreiben). Da  $\gamma$  keinen Fixpunkt hat, ist es keine Spiegelung, kann also nicht als Komposition von nur einer Spiegelung geschrieben werden. Da  $\gamma$  ungerade ist, sind drei Spiegelungen also die minimale Anzahl an Spiegelungen, die nötig ist.  $\square$

**Proposition 3.26.** *Eine ungerade Bewegung, die keine Spiegelung ist, ist eine echte Gleitspiegelung.*

*Beweis.* Sei  $\varphi$  eine ungerade Bewegung, die keine Spiegelung ist. Da  $\varphi$  keine Drehung (sondern ungerade) ist und keine Spiegelung ist, hat  $\varphi$  keinen Fixpunkt. Dann hat auch  $\varphi \circ \varphi$  keinen Fixpunkt, denn wäre  $F$  ein Fixpunkt von  $\varphi \circ \varphi$ , dann wäre der Mittelpunkt von  $F$  und  $\varphi(F)$  ein Fixpunkt von  $\varphi$ .

Da  $\varphi \circ \varphi$  eine gerade Bewegung ohne Fixpunkt ist, ist es eine Verschiebung. Sei  $\tau$  die Verschiebung mit  $\tau \circ \tau = \varphi \circ \varphi$  (konstruiert als die Verschiebung, die einen Punkt  $A$  auf den Mittelpunkt von  $A$  und  $\varphi \circ \varphi(A)$  abbildet). Sei  $g = P\tau(P)$  und  $h = \varphi(g) = \varphi(P)\varphi(\tau(P))$ . Wir behaupten, dass  $\varphi(h) = g$ . In

Typ	Fixpunktmenge	Komposition von ... Spiegelungen	gerade/ ungerade
Identität	Ebene	0	gerade
Spiegelung	Gerade	1	ungerade
echte Drehung	Punkt	2	gerade
echte Verschiebung	leer	2	gerade
echte Gleitspiegelung	leer	3	ungerade

Tabelle 1: Klassifikation von Bewegungen. Mit einer „echten“ Drehung bzw. Verschiebung ist eine Drehung/Verschiebung gemeint, die nicht die Identität ist. Mit einer echten Gleitspiegelung ist eine gemeint, die keine Spiegelung ist.

der Tat ist  $\varphi(\varphi(P)) \in g$  und  $\varphi(\varphi(\tau(P))) = \tau(\tau(\tau(P))) \in g$ . Die Abbildung  $\varphi$  vertauscht also die beiden Geraden  $g$  und  $h$ . Da  $\varphi$  keinen Fixpunkt hat, müssen  $g$  und  $h$  parallel sein (sonst wäre der eindeutige Schnittpunkt ein Fixpunkt von  $\varphi$ ). Insbesondere bildet  $\varphi$  jede Gerade, die parallel zu  $g$  ist, auf eine Gerade parallel zu  $g$  ab.

Sei nun  $f$  eine Senkrechte zu  $g$  und  $h$  die  $g$  im Punkt  $G$  und  $h$  im Punkt  $H$  schneidet und sei  $M$  der Mittelpunkt von  $G$  und  $H$ . Sei  $\ell$  die Parallele zu  $g$  und  $h$  durch  $M$ . Nach Konstruktion bildet  $\varphi$  die Gerade  $\ell$  auf sich ab (ebenso wie  $\tau$ ). Es folgt, dass für Punkte  $P \in \ell$  gilt  $\tau(P) = \varphi(P)$ . Also ist  $\ell$  die Fixpunktmenge von  $\sigma = \varphi^{-1} \circ \tau$ , was damit eine Spiegelung ist. Folglich ist  $\varphi = \tau \circ \sigma$  eine Gleitspiegelung.  $\square$

Wir können also Bewegungen wie in Tabelle 1 dargestellt klassifizieren.

### 3.6 Vektoren

In diesem und den folgenden beiden Abschnitten beschäftigen wir uns damit, wie man Bewegungen durch einfache Parameter beschreiben kann. Diese Parameter sind Verschiebungsvektor, Drehwinkel und Parität. Dabei werden wir auch die Gruppe der Bewegungen in kleinere Gruppen zerlegen.

Vektoren sind ein formales Konstrukt mit dem man unter anderem Verschiebungen beschreiben kann. Wenn  $\tau$  eine Verschiebung ist, wollen wir die Beziehung

$$Q = \tau(P) \quad \text{schreiben als} \quad Q = P + \underline{v} \quad (3.1)$$

wobei  $\underline{v} = \text{vec } \tau$  der *Vektor von*  $\tau$  ist. Da die Verschiebung  $\tau$  durch (3.1)

eindeutig bestimmt ist, ist auch der Vektor  $\underline{v}$  eindeutig bestimmt. Aus diesen Überlegungen leitet sich die folgende Definition ab.

Wenn  $P$  und  $Q$  Punkte sind gibt es einen *Vektor von  $P$  nach  $Q$*  den wir  $\underline{v} = Q - P$  schreiben. Zwei Vektoren  $Q - P$  und  $S - R$  sind gleich genau dann, wenn die Verschiebung, die  $P$  auf  $Q$  abbildet auch  $R$  auf  $S$  abbildet, was nach Proposition 3.13 genau dann der Fall ist, wenn  $PRSQ$  ein Parallelogramm ist.

Wir können die Summe aus einem Punkt  $P$  und einem Vektor  $\underline{v}$  bilden, das Ergebnis ist ein Punkt  $P + \underline{v}$ . Diesen Punkt können wir wie folgt bestimmen. Wenn  $\underline{v} = S - R$  ist, gibt es einen (eindeutigen) Punkt  $Q$ , so dass  $PRSQ$  ein Parallelogramm ist. Also ist  $\underline{v} = Q - P$  und dann ist

$$P + \underline{v} = P + (Q - P) = Q.$$

Wir können auch die Summe von zwei Vektoren  $\underline{v}, \underline{w}$  bilden, das Ergebnis ist ein Vektor  $\underline{v} + \underline{w}$ . Diesen Vektor können wir wie folgt bestimmen. Wenn  $\underline{v} = P - O$  und  $\underline{w} = S - R$ , dann gibt es, wie eben, einen Punkt  $Q$ , so dass  $\underline{w} = Q - P$  ist. Die Summe ist dann

$$\underline{v} + \underline{w} = (P - O) + (Q - P) = Q - O.$$

Der Null-Vektor  $\underline{0}$  kann zu einem Punkt oder Vektor hinzuaddiert werden ohne diesen zu ändern:  $P + \underline{0} = P$ ,  $\underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$ .

Zu jedem Vektor  $\underline{v}$  gibt es den negativen Vektor  $-\underline{v}$  mit der Eigenschaft  $\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$ . Wenn  $\underline{v} = Q - P$ , dann ist  $-\underline{v} = P - Q$ . Daraus ergibt sich, dass wir auch die Differenz von Vektoren bilden können: Wenn  $\underline{v} = Q - P$  und  $\underline{w} = S - R$ , dann ist

$$\underline{v} - \underline{w} = \underline{v} + (-\underline{w}) = (Q - P) + (-(S - R)) = (Q - P) + (R - S).$$

Die ganze Konstruktion ist so gemacht, dass Vektoren und Verschiebungen sich eineindeutig entsprechen:

**Proposition 3.27.** *Jede Verschiebung  $\tau$  verschiebt um einen Vektor  $\text{vec } \tau$  und zu jedem Vektor  $\underline{v}$  gibt es eine Verschiebung  $\tau_{\underline{v}}$  um  $\underline{v}$ . Diese Zuordnungen sind zueinander invers.*

Es gelten die folgenden Übersetzungen zwischen Verschiebungen  $\tau, \tau_1, \tau_2$  und

den zugehörigen Vektoren  $\underline{v}, \underline{v}_1, \underline{v}_2$ :

$$\begin{array}{lll}
 Q = \tau(P) & \text{genau dann wenn} & Q = P + \underline{v} \\
 \tau = \tau_2 \circ \tau_1 & \text{genau dann wenn} & \underline{v} = \underline{v}_2 + \underline{v}_1 \\
 \tau(P) = \tau_2(\tau_1(P)) & \text{genau dann wenn} & \underline{v} = P + \underline{v}_2 + \underline{v}_1 \\
 \tau = \text{id} & \text{genau dann wenn} & \underline{v} = \underline{0} \\
 \tau_1 = \tau_2^{-1} & \text{genau dann wenn} & \underline{v}_1 = -\underline{v}_2.
 \end{array}$$

Da die Reihenfolge von Verschiebungen nach Proposition 3.15 keine Rolle spielt, gilt dasselbe für Vektoren:  $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}_1$ . Daraus folgt unter anderem, dass für zwei Punkte  $P$  und  $Q$  und einen Vektor  $\underline{v}$  gilt  $Q - P = (Q + \underline{v}) - (P + \underline{v})$ , denn es ist

$$P + \underline{v} + (Q - P) = P + (Q - P) + \underline{v} = Q + \underline{v}.$$

Damit erhalten wir eine weitere Vereinfachung: bisher haben wir darauf geachtet Summen von Vektoren zu klammern. Das ist nicht nötig, es ist:

$$(Q - P) + (S - R) = (Q - R) + (S - P).$$

In der Tat sagt diese Gleichung im Fall  $Q = R$  nur, dass  $(Q - P) + (S - Q) = S - P = (S - P) + (Q - Q)$  ist und den allgemeinen Fall erhalten wir, indem wir  $R$  durch  $Q = R + (Q - R)$  und  $S$  durch  $S + (Q - R)$  ersetzen.

Zusammenfassend stellen wir fest:

**Proposition 3.28.** *Eine Summe  $P_1 \pm P_2 \pm \dots \pm P_k$  von Punkten mit Vorzeichen beschreibt einen wohldefinierten Vektor, wenn es gleich viele negative wie positive Vorzeichen gibt. Sie beschreibt einen wohldefinierten Punkt, wenn es ein positives Vorzeichen mehr als negative Vorzeichen gibt.*

### 3.7 Drehwinkel

Algebraischer Winkel und gerade Bewegungen sind eng miteinander verknüpft. Das zeigt sich zum Beispiel daran, dass gerade Bewegungen (anders als ungerade) das algebraische Winkelmaß erhalten. Das legt nahe, Kongruenz von algebraischen Winkeln durch gerade Bewegungen zu definieren: wir sagen, dass zwei algebraische Winkel  $\sphericalangle(s, t)$  und  $\sphericalangle(u, v)$  kongruent sind, geschrieben  $\sphericalangle(s, t) \equiv \sphericalangle(u, v)$ , wenn es eine gerade Bewegung gibt, die den einen in den anderen überführt.

Dieser Begriff passt mit dem Maß von algebraischen Winkeln so zusammen, dass algebraischen Winkel kongruent sind genau dann, wenn sie gleiches Maß haben.

*Bemerkung 3.29.* Genau genommen, ist das Attribut “algebraisch” keine Eigenschaft des Winkels sondern der Kongruenz-Beziehung. Man könnte also davon sprechen, dass zwei Winkel *geometrisch kongruent* oder *algebraisch kongruent* sind. Wir machen die Unterscheidung auf Ebene der Winkel um mit Tradition und früheren Vorlesungen konsistent zu sein.

Eine wichtige Eigenschaft von geraden Bewegungen und algebraischen Winkeln ist die folgende:

**Proposition 3.30.** *Für einen Strahl  $s$  und einen algebraischen Winkel  $\sphericalangle(u, v)$  gibt es genau einen Strahl  $t$ , so dass  $\sphericalangle(s, t) \equiv \sphericalangle(u, v)$ .*

*Beweis.* Sei  $P$  der Ausgangspunkt von  $s$ , sei  $u = \overrightarrow{RS}$  und  $v = \overrightarrow{RT}$ . Sei  $\{Q\} = s \cap P_{RS}$ . Sei  $\tau$  die Verschiebung, die  $R$  auf  $P$  abbildet und  $\rho$  die Drehung mit Fixpunkt  $P$ , die  $\tau(R)$  auf  $Q$  abbildet. Dann ist  $s = \rho(\tau(s))$ , also bildet  $t = \rho(\tau(v))$  den gewünschten Winkel.

Wenn  $\sphericalangle(s, t')$  ein weiterer solcher Winkel ist, gibt es eine gerade Bewegung  $\varphi$ , die  $s$  festhält und  $t$  auf  $t'$  abbildet. Insbesondere ist also die von  $s$  aufgespannte Gerade in der Fixpunktmenge von  $\varphi$  und nach Proposition 3.12 ist  $\varphi = \text{id}$ , also  $t = t'$ .  $\square$

**Folgerung 3.31.** *Eine Drehung  $\rho$  ist eindeutig festgelegt durch ihren Fixpunkt  $P$  und den Winkel  $\sphericalangle(s, \rho(s))$  für irgendeinen Strahl  $ab P$ .*

**Proposition 3.32.** *Für eine Drehung  $\rho$  ist der Winkel  $\sphericalangle(s, \rho(s))$  bis auf Kongruenz vom Strahl  $s$  unabhängig.*

*Beweis.* Sei  $\rho$  eine Drehung und  $s$  und  $s'$  Strahlen ab dem Fixpunkt von  $\rho$ . Da  $\rho$  eine gerade Bewegung ist, ist  $\sphericalangle(s, s')$  kongruent zu  $\sphericalangle(\rho(s), \rho(s'))$ . Also ist

$$\sphericalangle(s, \rho(s)) \equiv \sphericalangle(s, s') + \sphericalangle(s', \rho(s)) \equiv \sphericalangle(\rho(s), \rho(s')) + \sphericalangle(s', \rho(s)) \equiv \sphericalangle(s', \rho(s'))$$

wie behauptet.  $\square$

Wir nennen den Winkel  $\sphericalangle(s, \rho(s))$  den *Drehwinkel* von  $\rho$  und schreiben dafür  $\text{ang } \rho$ . Wenn  $\alpha$  ein algebraischen Winkel ist, schreiben wir  $\rho_{P, \alpha}$  um die Drehung mit Fixpunkt  $P$  und Drehwinkel  $\alpha$  zu bezeichnen.

**Folgerung 3.33.** *Sei  $P$  ein Punkt. Der Drehwinkel ist additiv: für Drehungen  $\rho_1$  und  $\rho_2$  mit Fixpunkt  $P$  gilt  $\sphericalangle(\rho_2 \circ \rho_1) = \sphericalangle(\rho_2) + \sphericalangle(\rho_1)$ .*

*Beweis.* Sei  $s$  ein Strahl ab  $P$ . Es ist

$$\sphericalangle(s, \rho_2(\rho_1(s))) \equiv \sphericalangle(s, \rho_1(s)) + \sphericalangle(\rho_1(s), \rho_2(\psi(s))) \equiv \sphericalangle(s, \rho_1(s)) + \sphericalangle(s, \rho_2(s)).$$

Die zweite Kongruenz gilt wegen Proposition 3.32.  $\square$

Wir haben eine eindeutige Übersetzung zwischen Drehungen mit Fixpunkt  $P$  und deren Drehwinkel erhalten. Wenn  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  algebraische Winkel sind, ist

$$\rho_{P,\alpha_1} \circ \rho_{P,\alpha_2} = \rho_{P,\alpha_1+\alpha_2} = \rho_{P,\alpha_2+\alpha_1} = \rho_{P,\alpha_2} \circ \rho_{P,\alpha_1},$$

also können Drehungen mit demselben Fixpunkt in beliebiger Reihenfolge komponiert werden.

Unser nächstes Ziel ist, den Drehwinkel unabhängig vom Fixpunkt zu identifizieren. Dazu definieren wir den algebraischen Winkel zwischen zwei beliebigen Strahlen  $s$  und  $t$ , die nicht notwendigerweise den gleichen Ausgangspunkt haben. Sei  $s$  ein Strahl ab  $P$  und  $t$  ein Strahl ab  $Q$  und sei  $\tau$  die Translation, die  $Q$  auf  $P$  abbildet. Wir definieren

$$\sphericalangle(s, t) := \sphericalangle(s, \tau(t)).$$

Die folgende Proposition besagt im Wesentlichen, dass der Winkel nur bis auf Parallelität von den Strahlen abhängt, wenn wir verschobene Strahlen als parallel betrachten.

**Proposition 3.34.** *Seien  $s$  und  $t$  Strahlen und  $\tau_1$  und  $\tau_2$  Verschiebungen. Es ist  $\sphericalangle(\tau_1(s), \tau_2(t)) = \sphericalangle(s, t)$ .*

*Beweis.* Sei  $P$  der Ausgangspunkt von  $s$  und  $Q$  der Ausgangspunkt von  $t$  und sei  $\tau$  die Verschiebung, die  $Q$  auf  $P$  abbildet. Dann ist  $\tau' = \tau_1 \circ \tau \tau_2^{-1}$  die Verschiebung, die  $\tau_2(Q)$  auf  $\tau_1(P) = \tau_1(\tau(Q))$  abbildet. Es ist

$$\begin{aligned} \sphericalangle(s, t) &= \sphericalangle(s, \tau(t)) \\ &\equiv \sphericalangle(\tau_1(s), \tau_1(\tau(t))) \\ &= \sphericalangle(\tau_1(s), \tau'(\tau_2(t))) = \sphericalangle(\tau_1(s), \tau_2(t)). \end{aligned}$$

Hier gelten die erste und die letzte Gleichung nach Definition des Winkels. Die verbleibende Gleichung nach Definition von  $\tau'$  und die Kongruenz weil die gerade Bewegung  $\tau_1$  (herkömmliche) algebraische Winkel erhält.  $\square$

**Folgerung 3.35.** Für Strahlen  $s, t, u$  gilt  $\sphericalangle(s, u) = \sphericalangle(s, t) + \sphericalangle(t, u)$ .

*Beweis.* Mit Proposition 3.34 können wir die Strahlen ohne Änderung der Winkel so verschieben, dass sie denselben Ausgangspunkt haben. In dem Fall ist die Aussage bekannt.  $\square$

**Proposition 3.36.** Seien  $s$  und  $t$  Strahlen und  $\rho$  eine Drehung. Es ist  $\sphericalangle(\rho(s), \rho(t)) = \sphericalangle(s, t)$ .

*Beweis.* Sei  $P$  der Ausgangspunkt von  $s$  und  $Q$  der Ausgangspunkt von  $t$  und sei  $\tau$  die Verschiebung, die  $Q$  auf  $P$  abbildet. Dann ist  $\tau' = \rho \circ \tau \circ \rho^{-1}$  die Verschiebung, die  $\rho(Q)$  auf  $\rho(P)$  abbildet.

$$\begin{aligned} \sphericalangle(s, t) &= \sphericalangle(s, \tau(t)) \\ &\equiv \sphericalangle(\tau_1(s), \tau_1(\tau(t))) \\ &= \sphericalangle(\tau_1(s), \tau'(\tau_2(t))) = \sphericalangle(\tau_1(s), \tau_2(t)). \end{aligned}$$

Hier gelten die erste und die letzte Gleichung nach Definition des Winkels. Die verbleibende Gleichung nach Definition von  $\tau'$  und die Kongruenz weil die gerade Bewegung  $\tau_1$  (herkömmliche) algebraische Winkel erhält.  $\square$

**Folgerung 3.37.** Gerade Bewegungen erhalten den (verallgemeinerten) algebraischen Winkel: wenn  $\varphi$  eine gerade Bewegung ist, ist  $\sphericalangle(\varphi(s), \varphi(t)) = \sphericalangle(s, t)$ .

*Beweis.* Jede gerade Bewegung ist eine Verschiebung oder eine Drehung. Für Verschiebungen gilt die Aussage nach Proposition 3.34, für Drehungen nach Proposition 3.36.  $\square$

Wir definieren den *Drehwinkel*  $\text{ang } \varphi$  einer geraden Bewegung  $\varphi$  durch

$$\text{ang } \varphi = \sphericalangle(s, \varphi(s))$$

wobei  $s$  irgendein Strahl ist.

**Proposition 3.38.** Der Drehwinkel ist wohldefiniert, d.h.  $\sphericalangle(s, \varphi(s))$  hängt bis auf Kongruenz nicht von  $s$  ab.

Der Beweis ist völlig Analog zu dem von Proposition 3.32.

*Beweis.* Sei  $s'$  ein weiterer Strahl. Nach Folgerung 3.37 ist  $\sphericalangle(s, s')$  kongruent zu  $\sphericalangle(\rho(s), \rho(s'))$ . Also ist

$$\sphericalangle(s, \varphi(s)) \equiv \sphericalangle(s, s') + \sphericalangle(s', \varphi(s)) \equiv \sphericalangle(\varphi(s), \varphi(s')) + \sphericalangle(s', \varphi(s)) \equiv \sphericalangle(s', \varphi(s'))$$

wie behauptet.  $\square$

Wie in Folgerung 3.35 erhalten wir:

**Proposition 3.39.** *Der Drehwinkel ist additiv:  $\text{ang}(\varphi \circ \psi) = \text{ang } \varphi + \text{ang } \psi$ .*

*Beweis.* Sei  $s$  ein Strahl. Es ist

$$\sphericalangle(s, \varphi(\psi(s))) \equiv \sphericalangle(s, \psi(s)) + \sphericalangle(\psi(s), \varphi(\psi(s))) \equiv \sphericalangle(s, \psi(s)) + \sphericalangle(s, \varphi(s)).$$

Die erste Kongruenz gilt wegen Folgerung 3.35, die zweite wegen Folgerung 3.37.  $\square$

**Folgerung 3.40.** *Wenn  $\varphi$  eine gerade Bewegung ist, ist  $\text{ang } \varphi^{-1} = -\text{ang } \varphi$ .*

*Beweis.* Es ist  $\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{id}$  also  $\text{ang } \varphi + \text{ang } \varphi^{-1} = \text{ang id} = 0^\circ$ .  $\square$

**Proposition 3.41.** *Eine gerade Bewegung  $\varphi$  hat Drehwinkel  $\text{ang } \varphi = 0^\circ$  genau dann, wenn  $\varphi$  eine Verschiebung ist.*

*Beweis.* Dass Verschiebungen Drehwinkel  $0^\circ$  haben ist leicht zu sehen. Umgekehrt haben nicht-triviale Drehungen von  $0^\circ$  verschiedenen Drehwinkel.  $\square$

**Proposition 3.42.** *Sei  $P$  ein Punkt. Jede gerade Bewegung  $\psi$  lässt sich eindeutig schreiben als  $\psi = \tau \circ \rho$  wobei  $\tau$  eine Verschiebung ist und  $\rho$  eine Drehung mit Fixpunkt  $P$ . Genauer ist  $\rho$  die Drehung mit Drehwinkel  $\text{ang } \psi$ .*

*Beweis.* Wenn  $\rho$  die Drehung mit Fixpunkt  $P$  und Drehwinkel  $\text{ang } \psi$  ist, hat die Bewegung  $\tau = \psi \circ \rho^{-1}$  Drehwinkel

$$\text{ang } \tau = \text{ang } \psi + \text{ang}(\rho_{\text{ang } \psi}^{-1}) = \text{ang } \psi - \text{ang } \rho_{\text{ang } \psi} = \text{ang } \psi - \text{ang } \psi = 0^\circ,$$

ist also eine Verschiebung.

Umgekehrt muss die Drehung  $\rho$  den gleichen Drehwinkel haben wie  $\psi$ , da Verschiebungen Drehwinkel  $0^\circ$  haben.  $\square$

Damit ist jede gerade Bewegung beschrieben durch einen Verschiebungsvektor und einen Drehwinkel. Es bleibt, mit ungeraden Bewegungen umzugehen.

### 3.8 Parität

Wir definieren die *Parität* einer Bewegung als  $\text{par } \varphi := 0$  wenn  $\varphi$  gerade ist und als  $\text{par } \varphi := 1$  wenn  $\varphi$  ungerade ist.

**Proposition 3.43.** *Sei  $\ell$  eine beliebige Gerade. Jede Bewegung  $\varphi$  lässt sich eindeutig schreiben als  $\varphi = \psi \circ \zeta$  wobei  $\psi$  eine gerade Bewegung ist und  $\zeta$  die Gerade  $\ell$  fixiert. Genauer ist  $\zeta = \sigma_\ell^{\text{par } \varphi}$ .*

*Beweis.* Wenn  $\zeta = \sigma_\ell^{\text{par } \varphi}$  ist, ist  $\psi = \varphi \circ \zeta$  gerade.

Soll umgekehrt  $\psi$  gerade sein, muss  $\zeta = \sigma_\ell$  sein wenn  $\varphi$  ungerade ist und die Identität wenn  $\varphi$  gerade ist.  $\square$

Mithilfe der Proposition haben wir allgemeine Bewegungen in zwei Teile zerlegt: die Parität und eine gerade Bewegung. Der nächste Schritt ist, gerade Bewegungen weiter zu zerlegen.

Wir setzen jetzt Proposition 3.27, Proposition 3.42 und Proposition 3.43 zusammen und erhalten den folgenden Satz.

**Satz 3.44.** *Sei  $P$  ein beliebiger Punkt und  $\ell$  eine beliebige Gerade. Jede Bewegung  $\varphi$  ist eindeutig beschrieben durch einen Vektor  $\underline{v}$ , einen algebraischen Winkel  $\alpha$  und eine Parität  $\varepsilon$  so dass gilt*

$$\varphi = \tau_{\underline{v}} \circ \rho_{P,\alpha} \circ \sigma_\ell^\varepsilon.$$

*Diese Parameter ergeben sich wie folgt: die Parität  $\varepsilon = \text{par } \varphi$  ist die von  $\varphi$ , der Winkel ist der Drehwinkel  $\alpha = \sphericalangle \psi$  von  $\psi = \varphi \circ \sigma_\ell^\varepsilon$ , der Vektor ist der Verschiebungsvektor  $\underline{v} = \text{vec } \tau$  von  $\tau = \psi \circ \rho_{P,\alpha}^{-1}$ .*

*Beweis.* Nach Proposition 3.43 lässt sich  $\varepsilon$  eindeutig in eine gerade Bewegung  $\psi$  und  $\sigma_\ell^{\text{par } \varphi}$  zerlegen. Nach Proposition 3.42 lässt sich die Gerade Bewegung  $\psi$  eindeutig in eine Verschiebung  $\tau$  und eine Drehung  $\rho_{P,\sphericalangle \psi}$  zerlegen. Schließlich ist nach Proposition 3.27 die Verschiebung  $\tau$  eindeutig durch ihren Verschiebungsvektor bestimmt.  $\square$

## 4 Verhältnisse, Ähnlichkeiten

Viele Konstruktionsprobleme bestehen im Wesentlichen darin, einen bestimmten Winkel oder eine bestimmte Zahl zu konstruieren.

Ein wesentliches Beispiel ist das folgende: die Konstruktion eines regelmäßigen  $n$ -Ecks besteht im Wesentlichen in der Konstruktion eines Winkels von  $\zeta_n = 360^\circ/n$ . Kann man einen solchen Winkel konstruieren, schlägt man einen Kreis  $M_P$  und trägt  $(n-1)$ -mal an den Strahl  $\overrightarrow{MP}$  den Winkel  $\zeta_n$  an um Punkte  $P_1$  bis  $P_{n-1}$  zu konstruieren. Dann bildet  $P_1, \dots, P_n$  ein regelmäßiges  $n$ -Eck.

Was mit Konstruktion von Zahlen gemeint ist und was der Zusammenhang zu Winkeln ist, wird in diesem Abschnitt erörtert.

## 4.1 Längenverhältnisse

Zahlen treten in der Geometrie natürlich auf als Verhältnisse von Längen: wenn  $P, Q, R, S$  Punkte sind mit  $R \neq S$ , gibt es eine Zahl  $a$ , sodass  $|PQ| = a \cdot |RS|$ . Selbst wenn man sich nur für den Fall interessiert, wo  $b = |PQ|$  und  $c = |RS|$  natürliche Zahlen sind, also  $0, 1, 2, 3, \dots$ , sieht man, dass  $a$  im Allgemeinen eine rationale Zahl sein kann, ein Bruch, nämlich  $a = b/c$ .

Für uns sind also Zahlen Längenverhältnisse. Jede Länge kann mit einer beliebigen Zahl multipliziert werden im folgenden Sinn:

**Problem 4.1.** Sei  $\overrightarrow{OI}$  ein Strahl und seien  $P_1, Q_1, Q_2 \in \overrightarrow{OI}$  Punkte mit  $Q_1 \neq O$ . Konstruiere den Punkt  $P_2$  mit  $|OP_2| = |OP_1|/|OQ_1| \cdot |OQ_2|$ .

Um dieses Konstruktionsproblem zu lösen brauchen wir den Strahlensatz.

**Satz 4.2** (1. Strahlensatz). Seien  $g$  und  $h$  Geraden die sich in einem Punkt  $Z$  schneiden und seien  $\ell$  und  $m$  Geraden, die nicht durch  $Z$  gehen und weder zu  $g$  noch zu  $h$  parallel sind. Seien  $\{P\} = g \cap \ell$ ,  $\{P'\} = g \cap m$ ,  $\{Q\} = h \cap \ell$ ,  $\{Q'\} = h \cap m$ . Wenn  $\ell$  und  $m$  parallel sind, dann ist

$$\frac{|P'Z|}{|PZ|} = \frac{|Q'Z|}{|QZ|}. \quad (4.1)$$

Wenn (4.1) gilt, dann sind  $\ell$  und  $m$  parallel.

*Beweis.* Wir nehmen an, dass  $\ell$  und  $m$  parallel sind und zeigen zunächst, dass

$$\frac{|P'P|}{|PZ|} = \frac{|Q'Q|}{|QZ|}. \quad (4.2)$$

Sei dazu  $L_P$  der Lotfußpunkt von  $P$  auf  $h$  und  $L_Q$  der Lotfußpunkt von  $Q$  auf  $g$ . Der Flächeninhalt von  $ZPQ$  ist also  $1/2 \cdot |ZQ| \cdot |QL_Q| = 1/2 \cdot |ZP| \cdot |PL_P|$ .

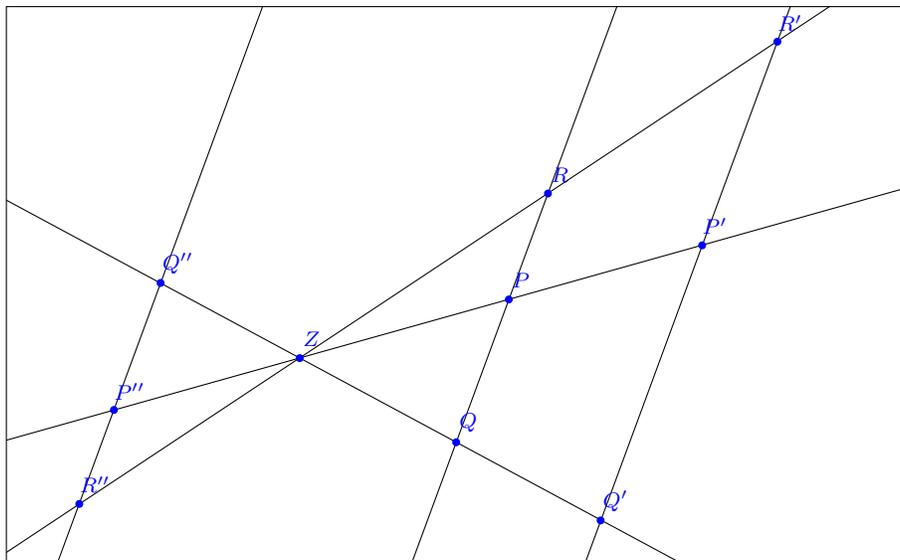


Abbildung 16: Die Strahlensätze:  $|P'Z|/|PZ| = |Q'Z|/|QZ|$ ,  $|P'Q'|/|P'Z| = |PQ|/|PZ|$  und  $|P'Q'|/|P'R'| = |PQ|/|PR|$ .

Außerdem ist der Flächeninhalt von  $PQQ'$  gleich  $1/2 \cdot |QQ'| \cdot |QL_Q|$  und der Flächeninhalt von  $PQP'$  gleich  $1/2 \cdot |PP'| \cdot |PL_P|$ . Wenn wir zeigen können, dass die letzten beiden Dreiecke gleichen Flächeninhalt haben, kürzen sich beim Verhältnis der Dreiecke die Höhen und wir erhalten (4.2). Die beiden Dreiecke  $PQQ'$  und  $PQP'$  haben aber gleichen Flächeninhalt nach Folgerung 2.9 weil sie Grundseite  $PQ$  haben und zwischen zwei parallelen Geraden liegen.

Aus Gleichung (4.2) folgt (4.1), weil  $\pm|P'P| \pm |PZ| = |P'Z|$  und  $\pm|Q'Q| \pm |QZ| = |Q'Z|$ . Die Vorzeichen hängen davon ab, in welcher Reihenfolge  $Z, P, P'$  und  $Z, Q, Q'$  auf  $g$  bzw.  $h$  liegen. Die Reihenfolge ist aber die gleiche, weil  $\ell$  und  $m$  parallel sind. Also ist

$$\begin{aligned} \frac{|P'Z|}{|PZ|} &= \pm \frac{|P'P|}{|PZ|} \pm \frac{|PZ|}{|PZ|} = \pm \frac{|P'P|}{|PZ|} \pm 1 \\ &= \pm \frac{|Q'Q|}{|QZ|} \pm 1 = \pm \frac{|Q'Q|}{|QZ|} \pm \frac{|QZ|}{|QZ|} = \frac{|Q'Z|}{|QZ|} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Wenn umgekehrt (4.1) gilt, dann zeigt eine ähnliche Umformung wie (4.3), dass auch (4.2) gilt. Diesmal sind die Vorzeichen die gleichen, weil alle beteiligten Terme nicht-negativ sind und dies die Vorzeichen eindeutig festlegt.

Aus (4.2) folgt, dass die Verhältnisse der Flächeninhalte der Dreiecke gleich sind und somit die Dreiecke  $PQQ'$  und  $PQP'$  die gleiche Höhe haben. Damit ist aber  $P'Q'$  parallel zu  $PQ$ .  $\square$

*Bemerkung 4.3.* Im Beweis des Strahlensatzes haben wir gesehen, dass man die Gleichung (4.1) auch durch (4.2) ersetzen kann. Aus denselben Gründen kann man sie auch durch die dritte Variante

$$\frac{|P'P|}{|P'Z|} = \frac{|Q'Q|}{|Q'Z|} \quad (4.4)$$

ersetzen.

*Konstruktion.* Sei  $I'$  nicht auf  $OI$ . Sei  $\{Q'_1\} = O_{Q_1} \cap \overrightarrow{OI'}$  und  $\{Q'_2\} = O_{Q_2} \cap \overrightarrow{OI'}$ . Sei  $g_1 = Q'_1P_1$  und sei  $g_2$  die Parallele zu  $g_1$  durch  $Q'_2$ . Der Schnittpunkt  $P_2$  von  $g_2$  und  $\overrightarrow{OI'}$  ist der gesuchte Punkt.  $\diamond$

*Beweis.* Nach dem Strahlensatz ist  $|OP_1|/|OQ'_1| = |OP_2|/|OQ'_2|$ . Die Behauptung folgt weil  $|OQ_1| = |OQ'_1|$  und  $|OQ_2| = |OQ'_2|$ .  $\square$

*Bemerkung 4.4.* Man kann Längenverhältnisse und Längen ineinander übersetzen, wenn man eine Referenzlänge einführt, die man sich als Einheitslänge denkt. Die Einheitslänge werden wir typischerweise durch ein Segment  $\overline{OI}$  repräsentieren ( $O$  für 0 und  $I$  für 1). Dann kann man die Länge  $|PQ|$  mit dem Längenverhältnis  $|PQ|/|OI|$  identifizieren und umgekehrt.

In algebraischer Sprache ausgedrückt sagt die Lösung von Problem 4.1, dass man durch Konstruktion lineare Gleichungen lösen kann: wenn  $a$  und  $b$  Längen (oder Längenverhältnisse) sind, kann man ein Längenverhältnis  $x$  konstruieren, so dass

$$a \cdot x = b.$$

Neben dem Strahlensatz 4.2, der über Längenverhältnisse entlang der Strahlen spricht, gibt es noch zwei weitere Strahlensätze, die Verhältnisse auf den parallelen Geraden betreffen. Sie lassen sich aus Satz 4.2 herleiten.

**Folgerung 4.5** (2. Strahlensatz). *Seien die Punkte und Geraden wie im 1. Strahlensatz und seien  $\ell$  und  $m$  parallel. Dann ist*

$$\frac{|PQ|}{|ZP|} = \frac{|P'Q'|}{|ZP'|}.$$

*Beweis.* Sei  $h'$  die Parallele zu  $h$  durch  $P$  und  $G$  der Schnittpunkt von  $h'$  mit  $m$ . Wir wenden den 1. Strahlensatz (in der Formulierung (4.4)) mit Zentrum  $P'$  an. Es ist  $|ZP|/|ZP'| = |Q'G|/|Q'P'|$ . Da  $PQQ'G$  ein Parallelogramm ist, ist  $|Q'G| = |PQ|$  und die Behauptung folgt.  $\square$

**Folgerung 4.6** (3. Strahlensatz). *Seien die Punkte und Geraden wie im 1. Strahlensatz und seien  $\ell$  und  $m$  parallel. Sei  $i$  eine weitere Gerade durch  $Z$ , die  $\ell$  und  $m$  in Punkten  $R$  und  $R'$  schneidet. Dann ist*

$$\frac{|PQ|}{|PR|} = \frac{|P'Q'|}{|P'R'|}.$$

*Beweis.* Wir wenden zweimal den 2. Strahlensatz an und erhalten

$$\frac{|PQ|}{|PZ|} = \frac{|P'Q'|}{|P'Z|} \quad \text{und} \quad \frac{|PR|}{|PZ|} = \frac{|P'R'|}{|P'Z|}.$$

Umformen ergibt  $|PQ|/|P'Q'| = |PZ|/|P'Z| = |PR|/|P'R'|$  und die Behauptung folgt.  $\square$

## 4.2 Ähnlichkeiten

Wenn Zahlen als Längenverhältnisse auftreten, ist es natürlich, statt Bewegungen (Abbildungen, die Längen respektieren), Abbildungen zu betrachten, die Längenverhältnisse respektieren. Diese heißen Ähnlichkeiten. Eine bijektive Abbildung  $\varphi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$  heißt *Ähnlichkeit* wenn für beliebige vier Punkte  $P, Q, R, S$  gilt

$$|PQ| \cdot |\varphi(R)\varphi(S)| = |RS| \cdot |\varphi(P)\varphi(Q)|. \quad (4.5)$$

Die Gleichung (4.5) ist äquivalent zu den Gleichungen

$$\frac{|PQ|}{|RS|} = \frac{|\varphi(P)\varphi(Q)|}{|\varphi(R)\varphi(S)|} \quad \text{und} \quad \frac{|RS|}{|PQ|} = \frac{|\varphi(R)\varphi(S)|}{|\varphi(P)\varphi(Q)|} \quad (4.6)$$

wann immer diese definiert sind, Ähnlichkeiten erhalten also Längenverhältnisse.

Die Gleichung (4.5) hat gegenüber (4.6) den Vorteil, dass die immer sinnvoll ist, auch wenn  $P = Q$  oder  $R = S$ . Die Gleichungen (4.6) hat dagegen den Vorteil, näher an unserer Anschauung zu sein. Wir werden häufig über Längenverhältnisse sprechen und diese typischerweise als Brüche wie (4.6)

schreiben, dabei aber daran denken, dass wir aus dem Fall, wo die Nenner 0 sind, Sinn geben können, indem wir die Gleichung wie (4.5) umformen.

Zwei Figuren  $f$  und  $f'$  heißen *ähnlich*, geschrieben  $f \sim f'$ , wenn es eine Ähnlichkeit  $\varphi$  gibt, die  $f$  auf  $f'$  abbildet:  $\varphi(f) = f'$ .

**Proposition 4.7.** *Die Komposition von zwei Ähnlichkeiten ist eine Ähnlichkeit. Die Inverse einer Ähnlichkeit ist eine Ähnlichkeit.*

*Beweis.* Seien  $P \neq Q$  und  $R \neq S$  Punkte. Wenn  $\varphi$  und  $\psi$  Ähnlichkeiten sind ist

$$\frac{|\psi(\varphi(P))\psi(\varphi(Q))|}{|\psi(\varphi(R))\psi(\varphi(S))|} = \frac{|\varphi(P)\varphi(Q)|}{|\varphi(R)\varphi(S)|} = \frac{|PQ|}{|RS|}$$

also ist  $\psi \circ \varphi$  eine Ähnlichkeit.

Wenn  $\varphi$  eine Ähnlichkeit ist, wenden wir (4.5) auf die Punkte  $\varphi^{-1}(P)$ ,  $\varphi^{-1}(Q)$ ,  $\varphi^{-1}(R)$  und  $\varphi^{-1}(S)$  an und erhalten

$$\frac{|PQ|}{|RS|} = \frac{|\varphi(\varphi^{-1}(P))\varphi(\varphi^{-1}(Q))|}{|\varphi(\varphi^{-1}(R))\varphi(\varphi^{-1}(S))|} = \frac{|\varphi^{-1}(P)\varphi^{-1}(Q)|}{|\varphi^{-1}(R)\varphi^{-1}(S)|}$$

also ist  $\varphi^{-1}$  eine Ähnlichkeit. □

**Folgerung 4.8.** *Die Menge der Ähnlichkeiten ist eine Gruppe.*

Sei  $M$  ein Punkt und  $P$  und  $Q$  zwei von  $M$  verschiedene Punkte auf einem Strahl ab  $M$ . Mit anderen Worten sind  $M, P, Q$  kollinear und  $M$  liegt nicht zwischen  $P$  und  $Q$ . Die Abbildung  $\varphi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$  die jeden Strahl ab  $M$  invariant lässt und jeden Punkt  $R \neq M$  auf einen Punkt  $\varphi(R)$  mit  $|M\varphi(R)|/|MR| = |MQ|/|MP|$  abbildet ist eine *Streckung* mit *Zentrum*  $M$  und *Streckungsfaktor*  $|MQ|/|MP|$ .

**Proposition 4.9.** *Streckungen sind Ähnlichkeiten.*

*Beweis.* Sei  $\alpha$  die Streckung mit Mittelpunkt  $M$  und Streckungsfaktor  $x = |MQ|/|MP|$ . Seien  $R$  und  $S$  beliebige Punkte. Wir müssen zeigen, dass  $|\alpha(R)\alpha(S)|/|RS| = x$  ist. Nach Definition von Streckungen ist  $|M\alpha R|/|MR| = x = |M\alpha S|/|MS|$ . Aus dem zweiten Punkt des Strahlensatzes folgt, dass  $RS$  und  $\alpha(R)\alpha(S)$  parallel sind. Aus dem 2. Strahlensatz folgt dann, dass  $|\alpha(R)\alpha(S)|/|M\alpha(R)| = |RS|/|MR|$ . Umformen ergibt  $|\alpha(R)\alpha(S)|/|RS| = |M\alpha(R)|/|MR| = x$ . □

**Proposition 4.10.** *Jede Ähnlichkeit  $\varphi$  kann geschrieben werden als Komposition  $\varphi = \iota \circ \alpha$  einer Streckung  $\alpha$  und einer Bewegung  $\iota$ . Das Zentrum der Streckung kann dabei beliebig gewählt werden.*

*Beweis.* Sei  $M$  ein beliebiger Punkt. Sei  $P \neq M$  beliebig und sei  $Q \in \overrightarrow{MP}$  der Punkt mit  $|MQ| = |\varphi(M)\varphi(P)|$ . Sei  $\alpha$  die Streckung mit Zentrum  $M$ , die  $P$  auf  $Q$  abbildet. Für irgend Punkte  $A \neq B$  und  $C \neq D$  gilt dann

$$\frac{|\varphi(A)\varphi(B)|}{|AB|} = \frac{|\varphi(M)\varphi(P)|}{|MP|} = \frac{|MQ|}{|MP|} = \frac{|\alpha(C)\alpha(D)|}{|CD|}. \quad (4.7)$$

Wir definieren  $\iota := \alpha^{-1} \circ \varphi$ , so dass gilt  $\varphi = \alpha \circ \iota$ . Wenn wir in (4.7)  $C = \iota(A)$  und  $D = \iota(B)$  setzen, erhalten wir

$$\frac{|\varphi(A)\varphi(B)|}{|AB|} = \frac{|\alpha(\alpha^{-1}(\varphi(A)))\alpha(\alpha^{-1}(\varphi(B)))|}{|\iota(A)\iota(B)|} = \frac{|\varphi(A)\varphi(B)|}{|\iota(A)\iota(B)|}.$$

Umformen ergibt, dass  $|\iota(A)\iota(B)| = |AB|$ . Wir sehen also, dass  $\iota$  eine Bewegung ist.  $\square$

**Folgerung 4.11.** *Ähnliche Winkel sind kongruent: Wenn  $\angle(s, t)$  ein Winkel ist und  $\alpha$  eine Ähnlichkeit, dann ist  $\angle(s, t) \equiv \angle(\alpha(s), \alpha(t))$ .*

*Beweis.* Sei  $Z$  der Scheitel von  $\angle(s, t)$ . Mit Proposition 4.10 schreiben wir  $\alpha$  als Komposition einer Streckung mit Zentrum  $Z$  und einer Bewegung. Die Streckung bildet  $\angle(s, t)$  auf sich selbst ab und die Bewegung auf einen kongruenten Winkel.  $\square$

Der folgende Satz illustriert den Zusammenhang zwischen Winkeln und Längenverhältnissen (statt Längen): es gibt keinen Kongruenzsatz „WWW“, aber einen Ähnlichkeitssatz „WWW“.

**Satz 4.12** (Ähnlichkeitssatz „WWW“). *Wenn  $PQR$  und  $P'Q'R'$  Dreiecke sind mit  $\angle RPQ = \angle R'P'Q'$ ,  $\angle PQR \equiv \angle P'Q'R'$  und  $\angle QRP \equiv \angle Q'R'P'$ , dann ist  $PQR$  ähnlich zu  $P'Q'R'$ .*

*Beweis.* Sei  $\iota$  die Bewegung, die  $\angle RPQ$  auf  $\angle R'P'Q'$  abbildet. Wir ersetzen  $PQR$  durch sein Bild unter  $\iota$  und können also annehmen, dass  $\angle RPQ = \angle R'P'Q'$  ist. Da die beiden innen liegenden Winkel  $\angle PQR$  und  $\angle P'Q'R'$

kongruent sind, folgt aus Proposition 2.3, dass  $QR$  und  $Q'R'$  parallel sind. Mit dem Strahlensatz folgt

$$\frac{|P'R'|}{|PR|} = \frac{|P'Q'|}{|PQ|}.$$

Ist also  $\alpha$  die Streckung mit Zentrum  $P$  und Streckungsfaktor  $|P'R'|/|PR|$ , dann ist  $\alpha(PQR) = P'Q'R'$  wie gewünscht.  $\square$

*Bemerkung 4.13.* Im Beweis von Satz 4.12 haben wir die Kongruenz des dritten Paares von Winkeln gar nicht benutzt. Tatsächlich liefert diese aber auch keine zusätzliche Information, weil der dritte Winkel bereits durch die Winkelsumme im Dreieck festgelegt ist (Proposition 1.22). Es handelt sich also genau genommen um einen Ähnlichkeitssatz „WW“.

### 4.3 Seitenverhältnisse und Winkel

Der Ähnlichkeitssatz gibt uns einen Zusammenhang zwischen Seitenverhältnissen und Winkeln:

**Proposition 4.14.** *Seien  $PQR$  und  $P'Q'R'$  gleichschenklige Dreiecke mit  $|PQ| = |QR|$  und  $|P'Q'| = |Q'R'|$ . Es ist  $\sphericalangle PQR \equiv \sphericalangle P'Q'R'$  genau dann, wenn  $|PQ|/|PR| = |P'Q'|/|P'R'|$ .*

*Beweis.* Wenn die Bedingung an die Winkel erfüllt ist, folgt aus der Gleichschenkligkeit und der Winkelsumme im Dreieck (Proposition 1.22), dass alle Winkel paarweise kongruent sind. Aus dem Ähnlichkeitssatz 4.12 folgt, dass die Dreiecke ähnlich sind, also sind insbesondere die Seitenverhältnisse gleich.

Sind umgekehrt die Seitenverhältnisse gleich, sind die Dreiecke nach einer zentrischen Streckung kongruent und haben damit gleiche Winkel.  $\square$

Eine noch wichtigere Rolle als in gleichschenkligen Dreiecken spielt der Zusammenhang zwischen Winkel und Seitenverhältnis in rechtwinkligen Dreiecken. Da jedes rechtwinklige Dreieck die Hälfte eines gleichschenkligen Dreiecks ist, sind beide Beziehungen eng verwandt.

Sei  $PQR$  ein rechtwinkliges Dreieck mit  $\sphericalangle PQR = \alpha$  und  $\sphericalangle QRP = 90^\circ$ . In diesem Fall bezeichnet man  $\overline{PQ}$  als *Hypothense*,  $\overline{QR}$  als *Ankathete* (die zu  $\alpha$

benachbarte Kathete) und  $\overline{PR}$  als *Gegenkathete* (die zu  $\alpha$  gegenüberliegende Kathete). Wir definieren die folgenden Verhältnisse:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{|PR|}{|PQ|} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ \cos \alpha &= \frac{|QR|}{|PQ|} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ \tan \alpha &= \frac{|PR|}{|QR|} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}\end{aligned}$$

Die Funktionen *Sinus*, *Kosinus* und *Tangens* helfen uns, den Zusammenhang zwischen Winkeln und Längenverhältnissen zu *beschreiben* und — mit algebraische und analytischen Kenntnissen ausgestattet — auch zu *berechnen*. Sie helfen uns allerdings wenig dabei, Winkel oder Längenverhältnisse zu *konstruieren*.

Wenn wir ein gleichschenkliges Dreieck  $PQR$  mit  $|PQ| = |QR|$  in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen, stellen wir fest, dass

$$\frac{|PR|}{|PQ|} = 2 \sin \left( \frac{\angle PQR}{2} \right) = 2 \cos \angle RPQ \quad (4.8)$$

ist.

#### 4.4 Der goldene Schnitt

Ein *goldenes Rechteck* ist ein Rechteck, von dem man ein Quadrat abziehen kann, so dass das resultierende Rechteck ähnlich zum ursprünglichen ist. Das heißt,  $PQRS$  ist ein goldenes Rechteck, wenn  $|PQ| > |QR|$  und das Rechteck  $PTUS$ , das durch abziehen des Quadrats  $TQRU$  entsteht ähnlich zu  $PQRS$  ist. Rechtecke sind ähnlich, wenn ihre Seitenlängen das gleiche Verhältnis haben. Damit  $PQRS$  golden ist muss also

$$\frac{|PQ|}{|QR|} = \frac{|PQ|}{|PT|} = \frac{|PQ|}{|PQ| - |QR|}$$

sein.

Setzen wir  $\varphi = |PQ|/|QR|$  erhalten wir die Gleichung

$$\varphi = \frac{1}{\varphi - 1}. \quad (4.9)$$



Abbildung 17: Der goldene Schnitt in Kunst und Architektur. Links da Vincis Vitruvianischer Mensch, rechts das Pantheon in Athen.

Die Lösung  $\varphi > 1$  dieser Gleichung ist der *goldene Schnitt*. Er spielt in der Kunst und Architektur eine wichtige Rolle (Abbildung 17).

Lösen der Gleichung (4.9) ergibt

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Man sagt, dass ein Punkt  $T$  ein Segment  $\overline{PQ}$  im goldenen Schnitt teilt, wenn  $\frac{|PQ|}{|PT|} = \varphi$ , d.h. wenn gilt

$$\frac{|PQ|}{|PT|} = \frac{|PT|}{|PQ| - |PT|}.$$

Ein *DIN-Rechteck* ist ein Rechteck, von dem man ein Quadrat abziehen kann, dann noch einmal ein Quadrat abziehen, so dass das daraus resultierende Rechteck ähnlich zum ursprünglichen ist. Wenn das große Rechteck Seitenlängen  $|PQ| > |QR|$  hat, hat sind die Seitenlängen des kleinen Rechtecks  $|PQ| - |QR|$  und  $|QR| - (|PQ| - |QR|) = 2|QR| - |PQ|$ .

Das heißt, das Seitenverhältnis  $\delta := |PQ|/|QR|$  erfüllt

$$\delta = \frac{|PQ|}{|QR|} = \frac{2|QR| - |PQ|}{|PQ| - |QR|} = \frac{2 - \delta}{\delta - 1}.$$

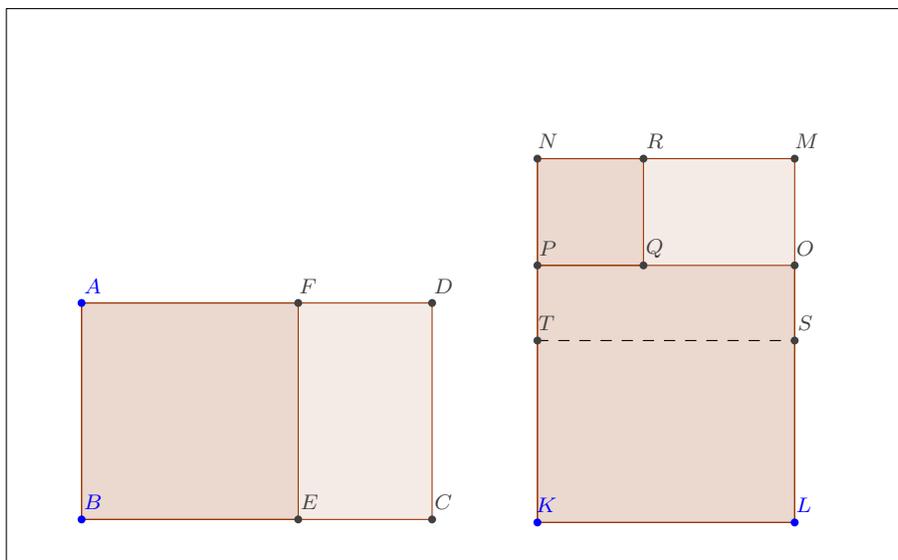


Abbildung 18: Ein goldenes Rechteck (links) und ein DIN-Rechteck (rechts). Das Rechteck links ist golden, weil  $ABCD$  kongruent zu  $ECDF$  ist. Das Rechteck rechts ist DIN weil  $KLMN$  kongruent zu  $OMQR$  ist. Außerdem ist  $KLMN$  kongruent zu  $KLST$ . Auch der Rand der Abbildung ist golden und die umgebende Seite (in der PDF-Version) ist DIN.

Diese Gleichung kann man umformen zu  $\delta^2 = 2$ . Wir nennen die positive Lösung  $\delta = \sqrt{2}$  den *DIN-Schnitt*.

Die definierende Gleichung für  $\delta$  kann man weiter umformen zu  $\delta = 2/\delta$  oder

$$\frac{|PQ|}{|QR|} = \frac{|QR|}{\frac{1}{2}|PQ|}.$$

Das heißt, DIN-Rechtecke sind auch genau diejenigen Rechtecke, deren Hälfte ähnlich zum ursprünglichen Rechteck ist.

**Beispiel 4.15.** DIN-Rechtecke treten auf in Form von Blättern im DIN-A-Format. Dieses ist definiert durch die Bedingung, dass das Seitenverhältnis  $\sqrt{2}$  ist, DIN-A0 einen Quadratmeter groß ist, und DIN-A(n+1) die Hälfte von DIN-A(n) ist. Insbesondere hat also ein DIN-A(n)-Blatt eine Fläche von  $2^{-n} \text{ m}^2$ .

Ein *goldenenes Dreieck* ist ein gleichschenkliges Dreieck  $ABC$  mit  $|AB| = |AC|$  und  $|AB|/|BC| = \varphi$  (spitzwinklig) oder  $|BC|/|AB| = \varphi$  (stumpfwinklig).

Ein *DIN-Dreieck* ist ein gleichschenkliges Dreieck  $ABC$  mit  $|AB| = |AC|$  und  $|AB|/|BC| = \delta$  (spitzwinklig) oder  $|BC|/|AB| = \delta$ . Im zweiten Fall ist  $|AB|^2 + |AC|^2 = 2|AB|^2 = |BC|^2$ , das heißt, es handelt sich um ein *rechtwinkliges*, gleichschenkliges Dreieck.

Ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck lässt sich zerlegen in zwei rechtwinklige, gleichschenklige Dreiecke. Aus dieser Eigenschaft allein können wir bereits die Winkel rekonstruieren: Wenn ein gleichschenkliges Dreieck Winkel  $\alpha, \alpha, \beta$  hat und sich in zwei zum ursprünglichen Dreieck ähnliche Dreiecke zerlegen lässt, ist  $\beta = 2\alpha$  und damit wegen der Winkelsumme im Dreieck

$$\alpha = 45^\circ \quad \text{und} \quad \beta = 90^\circ.$$

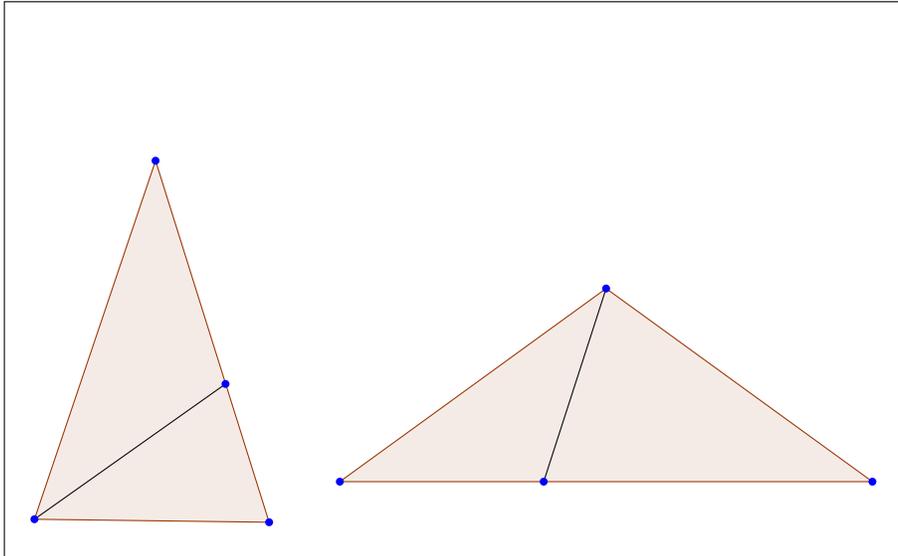


Abbildung 19: Ein spitzwinkliges und ein stumpfwinkliges goldenes Dreieck.

Durch Probieren stellt man fest, dass etwas ähnliches auch für goldene Dreiecke gilt:

**Satz 4.16.** *Jedes goldene Dreieck lässt sich zerlegen in ein spitzwinkliges und ein stumpfwinkliges goldenes Dreieck.*

Der Beweis ist einer der Höhepunkte von Euklids Elementen. Wir verschieben ihn auf später. Jetzt beobachten wir einige wichtige Konsequenzen: bezeichnen wir die Winkel des spitzen goldenen Dreiecks mit  $\alpha, \beta, \beta$  und die des

stumpfen goldenen Dreiecks mit  $\alpha, \alpha, \gamma$ . Dabei haben wir bereits Satz 4.16 indem wir die kleineren Winkel gleich bezeichnet haben. Außerdem erhalten wir die Gleichung  $\beta + \gamma = 180^\circ$ .

Es gilt also

$$\begin{aligned}\alpha + 2\beta &= 180^\circ \\ 2\alpha + \gamma &= 180^\circ \\ \beta + \gamma &= 180^\circ.\end{aligned}$$

Die erste plus zweimal die zweite minus zweimal die dritte Gleichung ergibt

$$5\alpha = 180^\circ.$$

Demnach ist

$$\alpha = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ, \quad \beta = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{3}{5} \circ 180^\circ = 108^\circ.$$

Also ist  $\beta = 2\alpha$  der Winkel, den wir brauchen, um ein regelmäßiges Fünfeck zu konstruieren!

Man kann also sagen, dass Euklid mit Satz 4.16 gezeigt hat, dass

$$\frac{1}{\varphi} = 2 \sin(18^\circ) = 2 \cos(72^\circ)$$

Tatsächlich lässt sich das Teilungsverhalten, das wir zwischen goldenen Dreiecken beobachtet haben, im Fünfeck erkennen, siehe Abbildung 20

## 4.5 Quadratische Gleichungen

Wenn wir ein goldenes Fünfeck konstruieren wollen, bleibt das Problem, den goldenen Schnitt zu konstruieren. Aus Abschnitt 4.1 wissen wir, dass wir lineare Gleichungen durch Konstruktion lösen können. Die Gleichung (4.9), die den goldenen Schnitt definiert, ist aber eine *quadratische* Gleichung. Dass der Versuch, quadratische Gleichungen zu lösen, zumindest nicht hoffnungslos ist, sehen wir am DIN-Schnitt.

**Problem 4.17.** *Konstruiere  $O, I, P$  so dass  $|OP|/|OI| = \sqrt{2}$ .*

*Konstruktion.* Konstruiere ein Quadrat  $OIPS$ .

◇

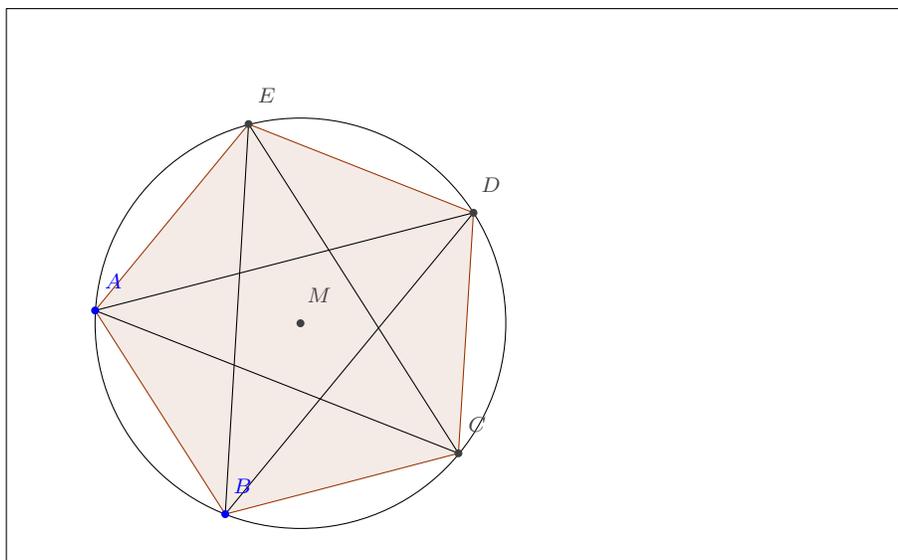


Abbildung 20: Goldene Dreiecke im regelmäßigen Fünfeck.

*Beweis.* Sei  $M$  der Mittelpunkt von  $\overline{OP}$ . Nach dem Kathetensatz ist  $|OI|^2 = |OP| \cdot |OM|$ . Aber  $|OM| = 1/2|OP|$ , also ist  $|OP|^2/|OI|^2 = 2$ .  $\square$

Wenn wir uns die Lösung von Problem 4.17 genauer ansehen, erkennen wir, dass wir sogar Wurzeln von allgemeinen Längenverhältnissen ziehen können:

**Übung 3.** Sei  $OP$  ein beliebiges Segment und  $I \in OP$ ,  $I \neq O$ . Konstruiere einen Punkt  $Q$ , so dass  $|OQ|/|OI| = \sqrt{|OP|/|IO|}$ .

Wir wissen, dass wir mithilfe der  $(p, q)$ -Formel (oder der  $(a, b, c)$ -Formel) alle reellen Lösungen einer quadratischen Gleichung nur mithilfe von Wurzelziehen erhalten können. Aus der Übung folgt also, dass  $\varphi$  als Lösung einer quadratischen Gleichung konstruierbar sein muss.

**Übung 4.** Konstruieren Sie ein goldenes Dreieck.

**Übung 5.** Konstruieren Sie ein regelmäßiges Fünfeck.

## 4.6 Konstruktiv rechnen

In den vergangenen Abschnitten haben wir gesehen, wie man Zahlen konstruieren kann und dadurch effektiv durch Konstruktionen rechnen kann.

Wir fassen diese Konstruktionen hier noch einmal zusammen. Dazu betrachten wir eine Gerade durch zwei Punkte  $O$  und  $I$ . Wir stellen uns die Gerade als Zahlengerade vor und die Punkte  $O$  und  $I$  als 0 und 1.

Wir beginnen mit vorbereitenden Konstruktionen. Erstens können wir jede Länge als Länge ab  $O$  auf  $\overrightarrow{OI}$  betrachten.

**Problem 4.18** (Segment auf  $\overrightarrow{OI}$ ). *Gegeben Punkte  $P$  und  $Q$ , konstruiere  $A \in \overrightarrow{OI}$  mit  $|OA| = |PQ|$ .*

*Konstruktion.* Der Punkt ist  $A = O_{PQ}$ . ◇

Zweitens können wir jedes Längenverhältnis als Längenverhältnis zu  $|OI|$  betrachten.

**Problem 4.19** (Verhältnis auf  $|OI|$  beziehen). *Gegeben Punkte  $A, B \in \overrightarrow{OI}$  mit  $B \neq O$  konstruiere  $C \in \overrightarrow{OI}$  mit  $|OC|/|OI| = |OA|/|OB|$ .*

*Konstruktion.* Das ist gerade Problem 4.1 mit  $P_1 = A$ ,  $Q_1 = B$ ,  $Q_2 = I$ . Der gesuchte Punkt ist  $C = P_2$ . ◇

Jetzt können wir die Grundrechenarten „konstruieren“.

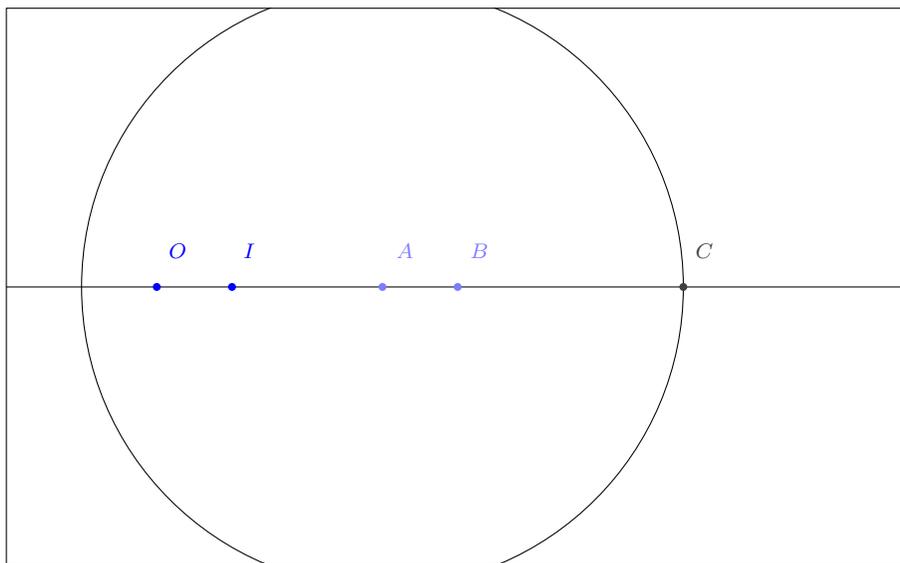


Abbildung 21: Konstruktion von  $C$  mit  $|OC| = |OA| + |OB|$  (Addition).

**Problem 4.20** (Addition). Gegeben Punkte  $A, B \in \overrightarrow{OI}$  konstruiere  $C \in \overrightarrow{OI}$  mit  $\frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OA|}{|OI|} + \frac{|OB|}{|OI|}$ .

*Konstruktion.* Die Gleichung fordert einfach, dass  $|OC| = |OA| + |OB|$ . Wir können also  $C$  als den Schnittpunkt von  $A_{OB}$  mit  $OI$  wählen, der nicht auf  $\overrightarrow{AO}$  liegt (oder gleich  $A$  ist falls  $B = O$ ).  $\diamond$

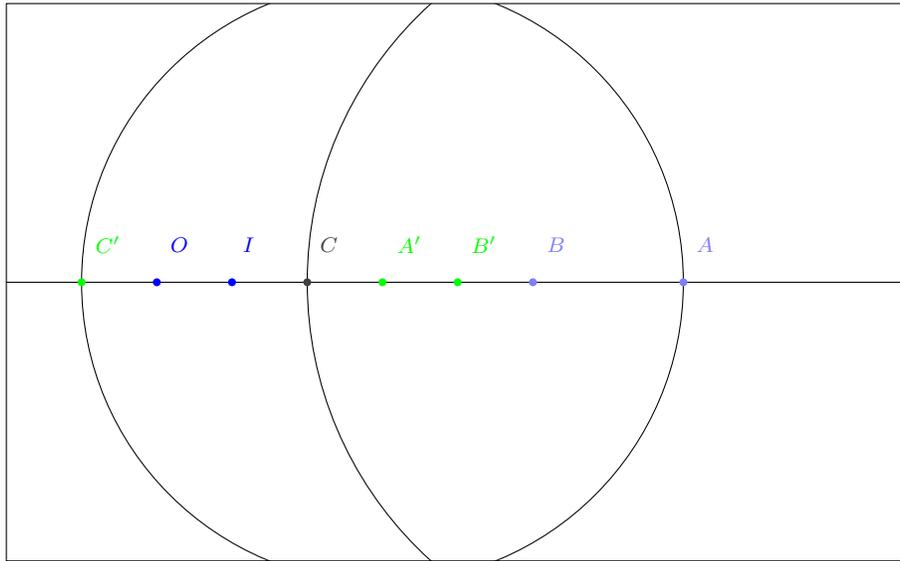


Abbildung 22: Konstruktion von  $C$  mit  $|OC| = |OA| - |OB|$  (Subtraktion). Wenn  $B$  nicht in  $\overrightarrow{OA}$  liegt (grün) ist die Konstruktion immer noch sinnvoll, allerdings muss der resultierende Punkt  $C$  mit negativem Vorzeichen interpretiert werden, da er nicht auf  $\overrightarrow{OI}$  liegt.

**Problem 4.21** (Subtraktion). Gegeben Punkte  $A, B \in \overrightarrow{OI}$  mit  $B \in \overrightarrow{OA}$  konstruiere  $C \in \overrightarrow{OI}$  mit  $\frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OA|}{|OI|} - \frac{|OB|}{|OI|}$ .

Die Bedingung  $B \in \overrightarrow{OA}$  garantiert, dass  $|OA| - |OB|$  nicht negativ ist. Die Konstruktion ist auch dann sinnvoll, wenn die Differenz negativ ist, allerdings liegt dann der Punkt  $C$  nicht auf  $\overrightarrow{OI}$  und muss als negative Zahl interpretiert werden, nicht als Abstand von  $O$ .

*Konstruktion.* Die Gleichung fordert, dass  $|OC| = |OA| - |OB|$ . Wir können also  $C$  als den Schnittpunkt von  $A_{OB}$  mit  $OI$  wählen, der auf  $\overrightarrow{AO}$  liegt.  $\diamond$

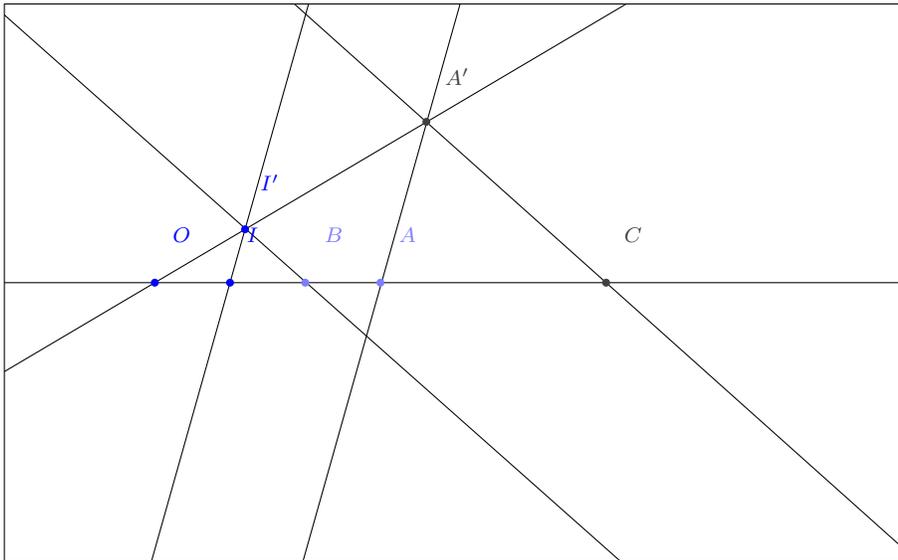
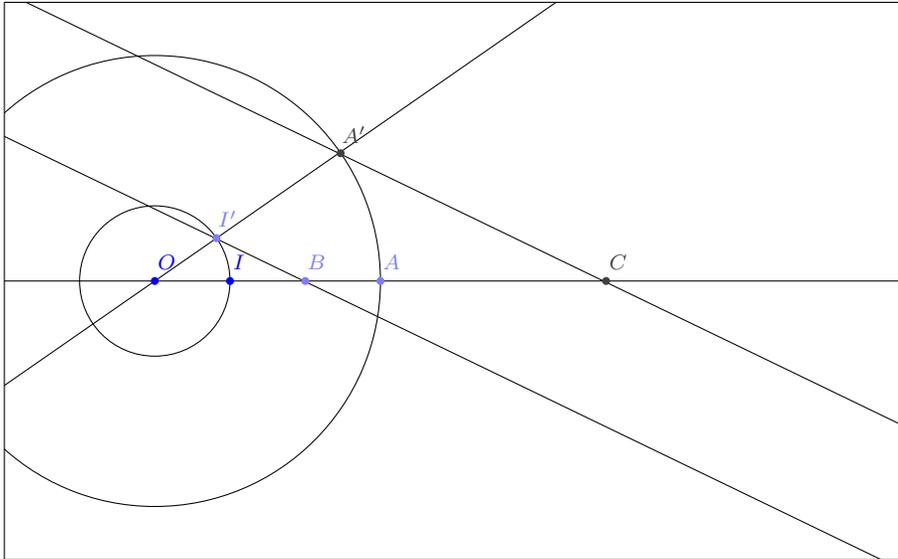


Abbildung 23: Konstruktion von  $C$  mit  $\frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OA|}{|OI|} \cdot \frac{|OB|}{|OI|}$  (Multiplikation). Gezeigt sind zwei mögliche Konstruktionen. In der oberen werden die Längen  $|OI|$  und  $|OA|$  mit Kreisen auf die Hilfsgerade übertragen. In der Unteren wird mittels Strahlensatz das Längenverhältnis  $|OA|/|OI|$  auf die Hilfsgerade übertragen.

**Problem 4.22** (Multiplikation). Gegeben Punkte  $A, B \in \overrightarrow{OI}$  konstruiere  $C \in \overrightarrow{OI}$  mit  $\frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OA|}{|OI|} \cdot \frac{|OB|}{|OI|}$ .

*Konstruktion.* Die Gleichung fordert, dass  $|OC| = |OA|/|OI| \cdot |OB|$ . Das ist gerade Problem 4.1 im Fall  $P_1 = A$ ,  $Q_1 = I$ ,  $Q_2 = B$ . Der gesuchte Punkt ist  $C = P_2$ .  $\diamond$

**Problem 4.23** (Division). Gegeben Punkte  $A, B \in \overrightarrow{OI}$  mit  $B \neq O$  konstruiere  $C$  mit  $\frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OA|}{|OI|} \cdot \frac{|OI|}{|OB|}$ .

*Konstruktion.* Die Gleichung fordert, dass  $|OC| = |OA|/|OB| \cdot |OI|$ . Das ist gerade Problem 4.1 im Fall  $P_1 = A$ ,  $Q_1 = B$ ,  $Q_2 = I$ . Der gesuchte Punkt ist  $C = P_2$ .  $\diamond$

Schließlich gibt uns die Lösung von Übung 3 die Möglichkeit Wurzeln zu ziehen. Sie macht vom Satz des Thales (Folgerung 5.6) Gebrauch.

**Problem 4.24** (Wurzeln). Gegeben Punkte  $A \in \overrightarrow{OI}$ , konstruiere  $B \in \overrightarrow{OI}$  mit  $\frac{|OB|}{|OI|} = \sqrt{\frac{|OA|}{|OI|}}$ .

*Konstruktion.* Sei  $M$  der Mittelpunkt von  $\overline{OA}$ . Sei  $k = M_A$ . Sei  $g$  die Senkrechte zu  $OI$  durch  $I$ . Sei  $B'$  der Schnittpunkt von  $k$  und  $g$ . Der Schnittpunkt  $B$  von  $O_{B'}$  und  $\overrightarrow{OI}$  ist der gesuchte Punkt.  $\diamond$

*Beweis.* Da  $M$  der Mittelpunkt von  $\overline{OA}$  ist, geht  $k$  durch  $O$ . Das Dreieck  $OB'A$  ist also nach dem Satz des Thales rechtwinklig. Aus dem Kathetensatz folgt  $|OB'|^2 = |OA| \cdot |OI|$ . Teilen durch  $|OI|^2$  ergibt  $(|OB'|/|OI|)^2 = |OA|/|OI|$ .  $\square$

Zusammenfassend habe wir die erste Aussage des folgenden Satzes gezeigt. Der Beweis des zweiten Teils fällt in ein anderes Themengebiet der Mathematik.

**Satz 4.25.** Jede Zahl, die man (aus 0 und 1) durch die Grundrechenarten und Wurzelziehen erhalten kann lässt sich mit Zirkel und Lineal konstruieren.

Umgekehrt lässt sich jede Zahl, die man mit Zirkel und Lineal konstruieren kann durch die Grundrechenarten und Wurzelziehen erhalten.

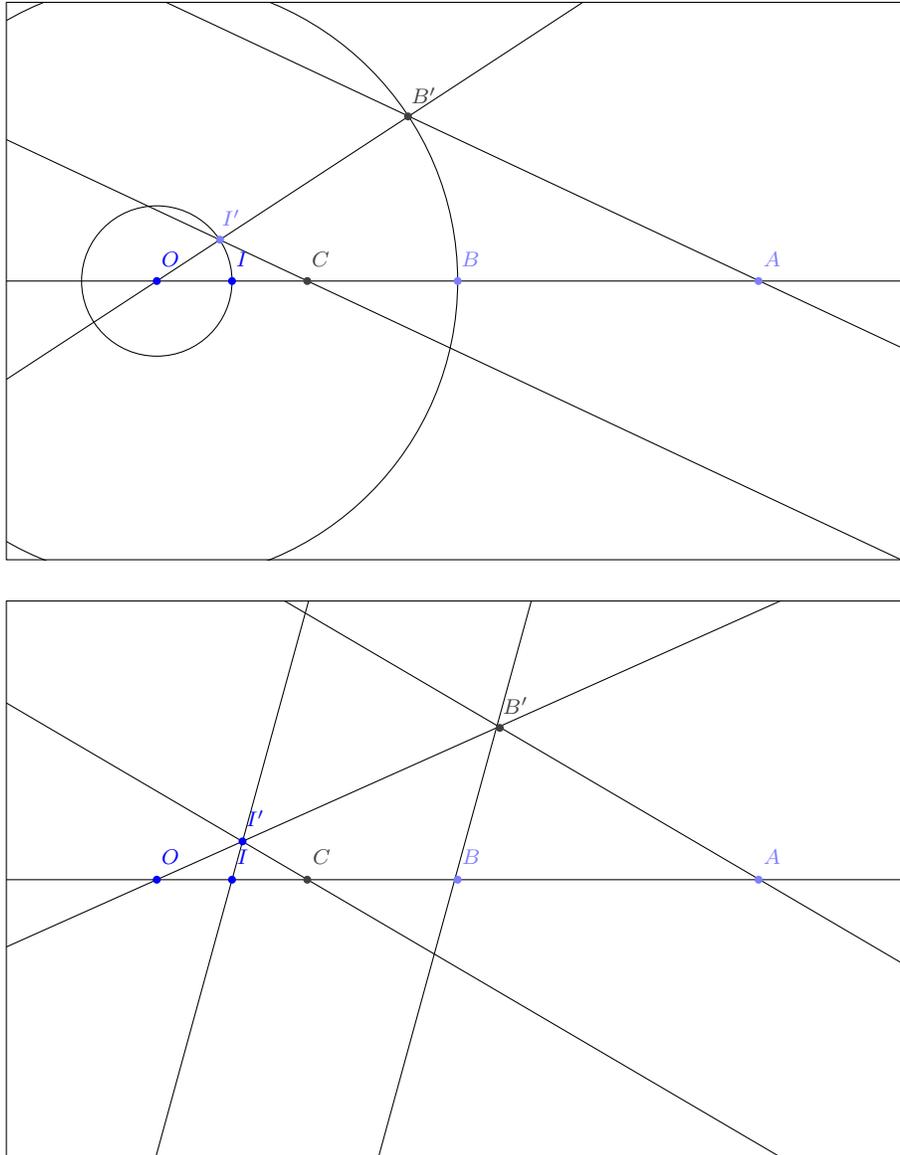


Abbildung 24: Konstruktion von  $C$  mit  $\frac{|OC|}{|OI|} = \frac{|OA|}{|OB|}$  (Division). Gezeigt sind zwei mögliche Konstruktionen. In der oberen werden die Längen  $|OI|$  und  $|OB|$  mit Kreisen auf die Hilfsgerade übertragen. In der Unteren wird mittels Strahlensatz das Längenverhältnis  $|OB|/|OI|$  auf die Hilfsgerade übertragen.

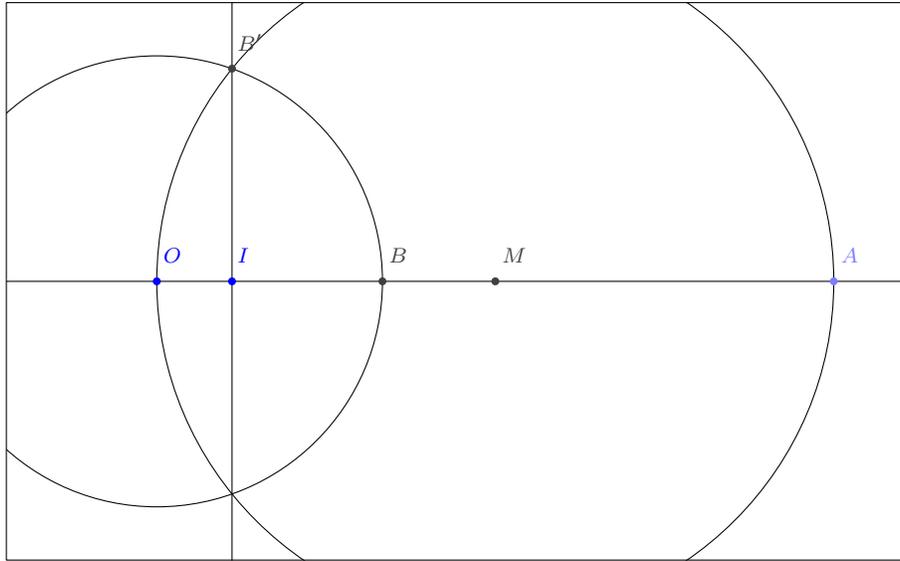


Abbildung 25: Konstruktion von  $C$  mit  $\frac{|OB|}{|OI|} = \sqrt{\frac{|OA|}{|OI|}}$  (Wurzel).

Da die Konstruktion eines regelmäßigen  $n$ -Ecks im Wesentlichen darin besteht, einen Winkel von  $360^\circ/n$  zu konstruieren, was im Wesentlichen das gleiche ist, wie die Zahl  $\sin(180^\circ/n)$  zu konstruieren erhalten wir:

**Folgerung 4.26.** *Ein regelmäßiges  $n$ -Eck kann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden genau dann, wenn man  $\sin(180^\circ/n)$  durch die Grundrechenarten und Wurzelziehen erhalten kann.*

**Übung 6.** Sei

$$\varepsilon = \sqrt{17 + \sqrt{17}}$$

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{17 - \sqrt{17}}$$

$$\alpha = \sqrt{34 + 6\sqrt{17} + 2\sqrt{2}(\sqrt{17} - 1)\bar{\varepsilon} - 8\sqrt{2}\varepsilon}.$$

Dann ist  $\sin\left(\frac{180^\circ}{17}\right) = \frac{1}{8}\sqrt{2}\sqrt{\bar{\varepsilon}^2 - \sqrt{2}(\alpha + \bar{\varepsilon})}$ . Konstruieren Sie ein regelmäßiges 17-Eck.

Da man Winkel halbieren und Verdoppeln kann, kann man ein regelmäßiges  $n$ -Eck konstruieren, genau dann, wenn man ein regelmäßiges  $2n$ -Eck konstruieren kann, d.h. Potenzen von 2 in  $n$  bedeuten keine Schwierigkeit. Gauß hat allgemeiner gezeigt:

**Satz 4.27** (Gauß). *Ein regelmäßiges  $n$ -Eck ist konstruierbar genau dann, wenn  $n = 2^k \cdot p_1 \cdots p_\ell$  ist, wobei die  $p_i$  Fermat-Primzahlen sind.*

Eine *Fermat-Primzahl* ist eine Primzahl der Form  $2^{2^n} + 1$ . Die einzigen bekannten Fermat-Primzahlen sind 3, 5, 17, 257, 65537. Die einzigen bekannten, ungeraden  $n$  für die ein regelmäßiges  $n$ -Eck konstruierbar ist sind also die Zahlen

$$3^{\varepsilon_3} \cdot 5^{\varepsilon_5} \cdot 17^{\varepsilon_{17}} \cdot 257^{\varepsilon_{257}} \cdot 65537^{\varepsilon_{65537}}$$

wo jedes  $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$  aber nicht alle 0 sind. Dies sind die Zahlen 3, 5, 15, 17, 51, 85, 255, 257, 771, 1285, 3855, 4369, 13107, 21845, 65535, 65537, 196611, 327685, 983055, 1114129, 3342387, 5570645, 16711935, 16843009, 50529027, 84215045, 252645135, 286331153, 858993459, 1431655765, 4294967295. Es ist unbekannt, ob es unendlich viele Fermat-Primzahlen gibt, also ob es unendlich viele konstruierbare  $n$ -Ecke mit  $n$  ungerade gibt.

## 5 Kreise

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Konstruktionen rund um den Kreis.

Sei  $k$  ein Kreis. Eine *Sekante* ist eine Gerade, die  $k$  in zwei Punkten schneidet, eine *Tangente* ist eine Gerade, die  $k$  in einem Punkt schneidet (bzw. berührt). Eine *Sehne* ist ein Segment  $\overline{PQ}$  mit  $P, Q \in k$ . Ein *Durchmesser* ist eine Sehne, die den Mittelpunkt von  $k$  enthält.

### 5.1 Kreise am Dreieck

**Proposition 5.1.** *Durch drei nicht kollineare Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$  geht genau ein Kreis.*

*Beweis.* Nach Folgerung 1.11 ist die Menge der Punkte  $L$ , die gleichen Abstand von  $P$  und  $Q$  haben die Mittelsenkrechte  $\ell$ . Ebenso ist die Menge der Punkte  $N$ , die gleichen Abstand von  $Q$  und  $R$  haben die Mittelsenkrechte  $n$ . Die Menge der Punkte, die gleichen Abstand von  $P$ ,  $Q$  und  $R$  haben, ist also der Schnittpunkt von  $\ell$  und  $n$ . Er existiert weil  $PQ$  und  $QR$  nicht parallel sind und somit auch  $\ell$  und  $n$  nicht parallel sind.  $\square$

Diese Proposition ist in der folgenden Form vertraut. Ein *Umkreis* eines Dreiecks  $PQR$  ist ein Kreis, der jeden der Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$  enthält.

**Folgerung 5.2.** *Jedes Dreieck hat einen (eindeutigen) Umkreis. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.*

*Beweis.* Der Kreis in Proposition 5.1 ist offensichtlich der Umkreis. Der Mittelpunkt wurde konstruiert als der Schnittpunkt zweier beliebiger Mittelsenkrechter. Da der Kreis eindeutig ist, geht die dritte Mittelsenkrechte ebenso durch den Punkt.  $\square$

Der Umkreis ist der kleinste Kreis, in den das Dreieck einbeschrieben werden kann. Das Gegenstück ist der größte Kreis, der in das Dreieck einbeschrieben werden kann: ein *Inkreis* eines Dreiecks  $PQR$  ist ein Kreis, der jede Seite in genau einem Punkt trifft.

Um ihn zu beschreiben brauchen wir zunächst das Gegenstück zu Folgerung 1.11. Wenn  $P$  ein Punkt ist und  $g$  eine Gerade, meinen wir mit dem *Abstand* zwischen  $P$  und  $g$  den kleinsten Abstand zwischen  $P$  und einem Punkt  $Q$  auf  $g$ . Dieser Punkt  $Q$  ist eindeutig, nämlich der Fußpunkt des Lots von  $P$  auf  $g$  (das folgt aus dem Satz des Pythagoras). Insbesondere ist  $PQ$  der eindeutige Kreis, der die Gerade  $g$  nur in einem Punkt trifft.

**Proposition 5.3.** *Sei  $\angle PQR$  ein Winkel und  $\ell$  die Winkelhalbierende. Ein Punkt  $N$  liegt auf  $\ell$  genau dann, wenn er gleichen Abstand zu  $PQ$  wie zu  $QR$  hat.*

*Beweis.* Sei  $\sigma$  die Spiegelung an  $\ell$ . Sie vertauscht die Strahlen  $\overrightarrow{QP}$  und  $\overrightarrow{QR}$ . Wenn  $N$  auf  $\ell$  liegt, ist  $\sigma(N) = N$  also vertauscht  $\sigma$  die Lotfußpunkte von  $N$  auf  $QP$  und auf  $QR$ . Damit hat  $N$  den gleichen Abstand zu  $QP$  und  $QR$ .

Umgekehrt, angenommen  $N$  hat gleichen Abstand zu  $QP$  wie zu  $QR$ . Seien  $P'$  und  $R'$  die entsprechenden Lotfußpunkte. Dann sind  $P'NQ$  und  $R'NQ$  rechtwinklige Dreiecke mit zwei gleich langen Seiten. Aus dem Satz des Pythagoras folgt, dass auch die dritten Seiten gleich lang sein müssen:  $|P'Q| = |R'Q|$ . Der Punkt  $N$  hat also gleichen Abstand von zwei Punkten auf  $QP$  und  $QR$  die gleichen Abstand von  $Q$  haben. Damit liegt  $N$  auf  $\ell$ .  $\square$

**Proposition 5.4.** *Ein Dreieck  $PQR$  hat einen eindeutigen Inkreis. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.*

*Beweis.* Sei  $\ell$  die Winkelhalbierende von  $\angle PQR$  und  $m$  die Winkelhalbierende von  $\angle RPQ$ . Sei  $M$  der Schnittpunkt von  $\ell$  und  $m$ . Sei  $A$  der Lotfußpunkt

von  $M$  auf  $PQ$ ,  $B$  der Lotfußpunkt auf  $QR$  und  $C$  der Lotfußpunkt auf  $RP$ . Nach Proposition 5.3 ist  $M_A = M_B$  und trifft  $PQ$  und  $QR$  jeweils nur in einem Punkt. Nach derselben Proposition ist auch  $M_B = M_C$  und trifft  $RP$  nur in einem Punkt.

Da der gesamte Kreis  $M_A = M_B = M_C$  im Halbraum von  $PQ$  liegt, der  $R$  enthält, liegt insbesondere  $B$  auf dem Strahl  $\overrightarrow{QR}$ . Aus ähnlichen Gründen liegt  $B$  auf dem Strahl  $\overrightarrow{RQ}$  und damit in  $\overline{QR}$ . Analoge Argumente zeigen, dass  $A \in \overline{PQ}$  und  $C \in \overline{RP}$ .  $\square$

## 5.2 Euklids Elemente: drittes Buch

In diesem Abschnitt beweisen wir Resultate aus dem dritten Buch von Euklids Elementen und schließlich Satz 4.16.

In den Übungsaufgaben haben Sie bewiesen.

**Proposition 5.5** (Zentriwinkelsatz). *Wenn  $P$  und  $Q$  Punkte auf einem Kreis  $k$  sind und  $R \in k$  im gleichen Halbraum von  $PQ$  liegt wie der Mittelpunkt  $M$  von  $k$ , dann ist der (Zentri-)Mittelpunktswinkel  $\angle PMQ$  doppelt so groß wie der Peripheriewinkel  $\angle PRQ$ .*

Ein Spezialfall ist:

**Folgerung 5.6** (Satz des Thales). *Wenn zwei Punkte  $P$  und  $R$  auf einem Kreis  $k$  gegenüberliegen, ist für jeden Punkt  $Q \in k$  der Winkel  $\angle PQR$  ein rechter.*

Mit dem Zentriwinkelsatz können wir zeigen:

**Proposition 5.7.** *Ist  $k$  ein Kreis und  $PQRS$  ein Viereck dessen Punkte auf  $k$  liegen (ein Sehnenviereck), dann ist  $\angle SPQ + \angle QRS = 180^\circ$ .*

*Beweis.* Nach eventueller Umbenennung können wir annehmen, dass  $R$  auf der gleichen Seite von  $SQ$  liegt wie der Mittelpunkt  $M$  des Kreises. Insbesondere sind nach Proposition 5.5 die Peripheriewinkel  $\angle PQS$  und  $\angle PRS$  gleich groß, ebenso wie die Winkel  $\angle QSP$  und  $\angle QRP$ . Nun ist aber  $\angle QRP + \angle PRS = \angle QRS$  und  $\angle PQS + \angle QSP = 180^\circ - \angle SPQ$  da die Winkelsumme im Dreieck  $PQS$   $180^\circ$  ist.  $\square$

Daraus leiten wir ab:

**Proposition 5.8** (Peripheriewinkelsatz, Euklid III.27). *Wenn  $P$  und  $Q$  Punkte auf einem Kreis  $k$  sind, dann ist der Peripheriewinkel  $\angle PRQ$  für alle Punkte  $R \in k$  im gleichen Halbraum von  $PQ$  gleich.*

*Beweis.* Für die Punkte im gleichen Halbraum wie der Mittelpunkt von  $k$  folgt die Behauptung unmittelbar aus Proposition 5.5.

Für die Punkte im anderen Halbraum folgt sie durch anwenden von Proposition 5.7.  $\square$

**Proposition 5.9** (Sehnen-Tangentenwinkelsatz, Euklid III.32). *Seien  $A, B, D$  Punkte auf einem Kreis  $k$  und  $F$  ein Punkt, der auf der Tangente an  $k$  in  $B$  liegt, und zwar im Halbraum von  $BD$ , der  $A$  nicht enthält. Dann ist der Tangentenwinkel  $\angle FBD$  gleich groß wie der Peripheriewinkel  $\angle BAD$ .*

*Beweis.* Sei  $M$  der Mittelpunkt von  $k$ . Dann ist  $\angle FBM = 90^\circ$ , also  $\angle FBD = 90^\circ - \angle DBM$ . Da die Winkelsumme im gleichschenkligen Dreieck  $BDM$  gleich  $180^\circ$  ist, ist  $\angle DBM = 1/2(180^\circ - \angle BMD)$ . Nach Proposition 5.5 ist aber  $\angle DMB = 2\angle BAD$ . Zusammensetzen ergibt

$$\angle FBD = 90^\circ - \angle DBM = 90^\circ - (90^\circ - \angle BAD) = \angle BAD.$$

$\square$

Zum Beweis von Satz 4.16 benötigen wir einige Aussagen über Kreise, die wir durch die Benutzung von Ähnlichkeiten jetzt leichter beweisen können, als wir es in Abschnitt 5 hätten tun können.

**Proposition 5.10** (Sekanten-Tangenten-Satz, Euklid III.36). *Sei  $k$  ein Kreis und  $P$  ein Punkt außerhalb von  $k$ . Sei  $g$  eine Gerade durch  $P$ , die  $k$  in  $Q$  berührt und sei  $h$  eine Gerade durch  $P$ , die  $k$  in  $R$  und  $S$  schneidet. Dann ist  $|PQ|/|PS| = |PR|/|PQ|$ .*

*Beweis.* Nach Umbenennung können wir annehmen, dass  $R$  zwischen  $P$  und  $Q$  liegt. Nach Proposition 5.9 ist dann  $\angle PQR \equiv \angle QSR$ . Es folgt, dass die Dreiecke  $PQR$  und  $PSQ$  ähnlich sind. Also ist  $|PQ|/|PS| = |PR|/|PQ|$ .  $\square$

**Proposition 5.11** (Sekanten-Satz). *Sei  $k$  ein Kreis und  $P$  ein Punkt außerhalb des Kreises. Seien  $h$  und  $h'$  Geraden durch  $P$ , die  $k$  in Punkten  $R, S$  und  $R', S'$  schneiden. Dann ist  $|PR| \cdot |PS| = |PR'| \cdot |PS'|$*

*Beweis.* Sei  $Q \in k$  so, dass  $PQ$  eine Tangente an  $k$  ist. Nach Proposition 5.10 ist  $|PR| \cdot |PS| = |PQ|^2 = |PR'| \cdot |PS'|$ .  $\square$

**Proposition 5.12** (Umkehrung des Sekanten-Tangenten-Satzes, Euklid III.37).

*Sei  $k$  ein Kreis und  $P$  ein Punkt außerhalb von  $k$ . Seien  $g$  eine Gerade durch  $P$ , die  $k$  in  $Q$  schneidet und sei  $h$  eine Gerade, die  $k$  in  $R$  und  $S$  schneidet. Wenn  $|PQ|/|PS| = |PR|/|PQ|$  ist, dann ist  $g$  eine Tangente und  $Q$  ein Berührungspunkt.*

*Beweis.* Angenommen  $g$  hätte einen zweiten Schnittpunkt  $Q' \neq Q$ , dann wäre nach dem Sekanten-Satz  $|PQ|^2 \neq |PQ| \cdot |PQ'| = |PR'| \cdot |PS'|$  im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

Einer der Höhepunkte von Euklids Elementen ist der Beweis dessen, was wir oben vermutet haben:

**Proposition 5.13** (Euklid IV.10). *Jedes spitzwinklige goldene Dreieck lässt sich zerlegen in ein spitzwinkliges und ein stumpfwinkliges goldenes Dreieck.*

Die Tatsache, dass sich auch jedes stumpfwinklige goldene Dreieck in zwei goldene Dreiecke zerlegen lässt, ist dann nicht mehr schwer zu sehen.

*Beweis.* Sei  $ABC$  ein spitzwinkliges goldenes Dreieck mit  $|AB| = |AC| = \varphi \cdot |BC|$ . Sei  $D$  der Schnittpunkt von  $A_{BC}$  mit  $\overline{AB}$ . Sei  $k$  der Kreis durch  $A$ ,  $C$  und  $D$ . Es ist  $|AB| \cdot |BD| = \varphi \cdot |BC| \cdot (\varphi - 1) \cdot |BC| = \varphi \cdot (\varphi - 1) \cdot |BC|^2$ . Nach der definierenden Gleichung für den goldenen Schnitt ist aber  $\varphi \cdot (\varphi - 1) = 1$ , also

$$|AB| \cdot |BD| = |BC|^2.$$

Nach der Umkehrung des Sekanten-Tangenten-Satzes, Proposition 5.12, folgt, dass  $BC$  eine Tangente an  $k$  ist. Nach dem Sehnen-Tangentenwinkelsatz, Proposition 5.9 ist also  $\angle BCD \cong \angle CAB$ .

Folglich ist nach dem Ähnlichkeitssatz  $ABC$  ähnlich zu  $CBD$ . Insbesondere ist  $CBD$  gleichschenkelig und damit  $|BC| = |CD|$ , also auch  $ACD$  gleichschenkelig.

Nach Konstruktion ist damit  $ACD$  ein stumpfwinkliges und  $BCD$  ein spitzwinkliges goldenes Dreieck.  $\square$

## A Axiome

Wir betrachten eine Menge  $\mathbb{E}^2$ , deren Elemente wir als *Punkte* bezeichnen. Je zwei Punkte  $P, Q \in E$  haben einen *Abstand*  $|PQ| \geq 0$ .

**Axiom 1** (Metrik). Für Punkte  $P, Q, R \in \mathbb{E}^2$  gilt:

1.  $|PQ| = 0$  genau dann, wenn  $P = Q$ ,
2.  $|PQ| = |QP|$ ,
3.  $|PQ| + |QR| \geq |PR|$  (Dreiecksungleichung).

Für Punkte  $P, Q, R$  sagen wir, dass  $Q$  *zwischen*  $P$  und  $R$  liegt, wenn  $|PR| = |PQ| + |QR|$ . Das *Segment*  $\overline{PQ}$  besteht aus Punkten, die zwischen  $P$  und  $Q$  liegen:

$$\overline{PQ} = \{R \in \mathbb{E}^2 \mid |PR| + |RQ| = |PQ|\}.$$

Sei jetzt  $P \neq Q$ . Der *Strahl* ab  $P$  durch  $Q$  besteht aus dem Segment sowie Punkten zwischen denen und  $P$  der Punkt  $Q$  liegt:

$$\overrightarrow{PQ} = \{R \in \mathbb{E}^2 \mid |PR| + |RQ| = |PQ| \text{ oder } |PQ| + |QR| = |PR|\}.$$

Die *Gerade* durch  $P$  und  $Q$  besteht aus den Strahlen ab  $P$  durch  $Q$  und ab  $Q$  durch  $P$ :

$$PQ = \left\{ R \in \mathbb{E}^2 \mid \begin{array}{l} |PR| + |RQ| = |PQ| \text{ oder} \\ |PQ| + |QR| = |PR| \text{ oder} \\ |QP| + |PR| = |QR| \end{array} \right\}.$$

Wegen Axiom 1(1) liegen  $P$  und  $Q$  in  $\overline{PQ}$ ,  $\overrightarrow{PQ}$ ,  $PQ$ . Drei Punkte heißen *kollinear* wenn sie auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

*Bemerkung A.1* (Für Experten). Wir waren bewusst vage bezüglich der Frage welche Werte der Abstand zweier Punkte annehmen kann. Man kann einwenden, dass auf diesem Wege die reellen Zahlen zum Teil der Axiome gemacht werden. Dies kann man dadurch umgehen, dass man folgende Tatsache nutzt: jede abelsche Gruppe mit einer archimedischen Ordnung ist, als geordnete Gruppe, isomorph zu einer Untergruppe von  $\mathbb{R}$ . Das heißt, man kann den Abstand definieren mit Werten in irgendeiner abelschen, archimedisch geordneten Gruppe.

**Axiom 2** (Punkte und Geraden). 1. *Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.*

Für zwei verschiedene Punkte  $P$  und  $Q$  gilt:

2. *Es gibt nur eine einzige Gerade, die durch  $P$  und  $Q$  geht.*
3. *Es gibt in  $\overline{PQ}$  einen Punkt außer  $P$  und  $Q$ .*
4. *Es gibt auf dem Strahl  $\overrightarrow{PQ}$  einen Punkt außerhalb von  $\overline{PQ}$ .*
5. *Wenn eine Gerade  $g$  das Segment  $\overline{PQ}$  trifft und  $R$  ein weiterer Punkt ist, dann trifft  $g$  auch  $\overline{PR}$  oder  $\overline{QR}$ .*

Seien  $M, Q, R$  Punkte. Der Kreis mit Mittelpunkt  $M$  und Radius  $|QR|$  ist die Menge

$$M_{QR} = \{P \in \mathbb{E}^2 \mid |MP| = |QR|\}.$$

Wenn  $M = R$  ist dies der Kreis mit Mittelpunkt  $M$  durch  $Q$  und wird mit  $M_Q$  bezeichnet.

**Axiom 3** (Kreis-Schnittpunkte). 1. *Seien  $M_P$  und  $N_Q$  Kreise. Wenn  $M_P$  mindestens einen Punkt innerhalb von  $N_Q$  und einen Punkt außerhalb davon, dann haben  $M_P$  und  $N_Q$  in jedem Halbraum von  $MN$  einen eindeutigen Schnittpunkt.*

2. *Sei  $M_P$  ein Kreis und  $\overrightarrow{QR}$  ein Strahl. Wenn  $Q$  im Innern von  $M_P$  liegt, dann haben  $M_P$  und  $\overrightarrow{QR}$  einen eindeutigen Schnittpunkt.*

Wir nennen zwei Geraden *parallel* wenn sie entweder gleich sind, oder keinen gemeinsamen Punkt haben.

**Axiom 4** (Parallelen-Axiom). *Wenn  $g$  eine Gerade ist und  $P$  ein Punkt, dann existiert genau eine Gerade, die parallel zu  $g$  ist und durch  $P$  geht.*

Eine *Bewegung* ist eine bijektive Abbildung  $\varphi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$  die den Abstand erhält:  $|\varphi(P)\varphi(Q)| = |PQ|$ .

Eine Bewegung  $\varphi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$  ist eine *Translation* (Verschiebung) wenn sie keinen Fixpunkt hat und jede Gerade auf eine zu ihr parallele Gerade abbildet. Wir verabreden außerdem, dass auch die Identität als Translation gilt. Eine Bewegung ist eine *Rotation* (Drehung) wenn sie genau einen Fixpunkt hat. Wieder gilt gemäß Vereinbarung auch die Identität als Rotation.

Eine Bewegung ist eine *Reflektion* (Spiegelung) wenn ihre Fixpunktmenge eine Gerade ist. Dass Translationen, Rotationen und Reflektionen existieren, folgt nicht aus den bisherigen Axiomen, wir fordern es axiomatisch:

- Axiom 5** (Bewegungen).    1. Gegeben zwei Punkte  $P$  und  $Q$  existiert genau eine Translation  $\tau$  mit  $\tau(P) = Q$ .
2. Gegeben drei Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $Q'$  mit  $|PQ| = |PQ'|$  existiert genau eine Rotation  $\rho$  mit  $\rho(P) = P$  und  $\rho(Q) = Q'$ .
3. Gegeben eine Gerade  $\ell$  gibt es genau eine Spiegelung  $\sigma$ , deren Fixpunktmenge die Gerade  $\ell$  ist.