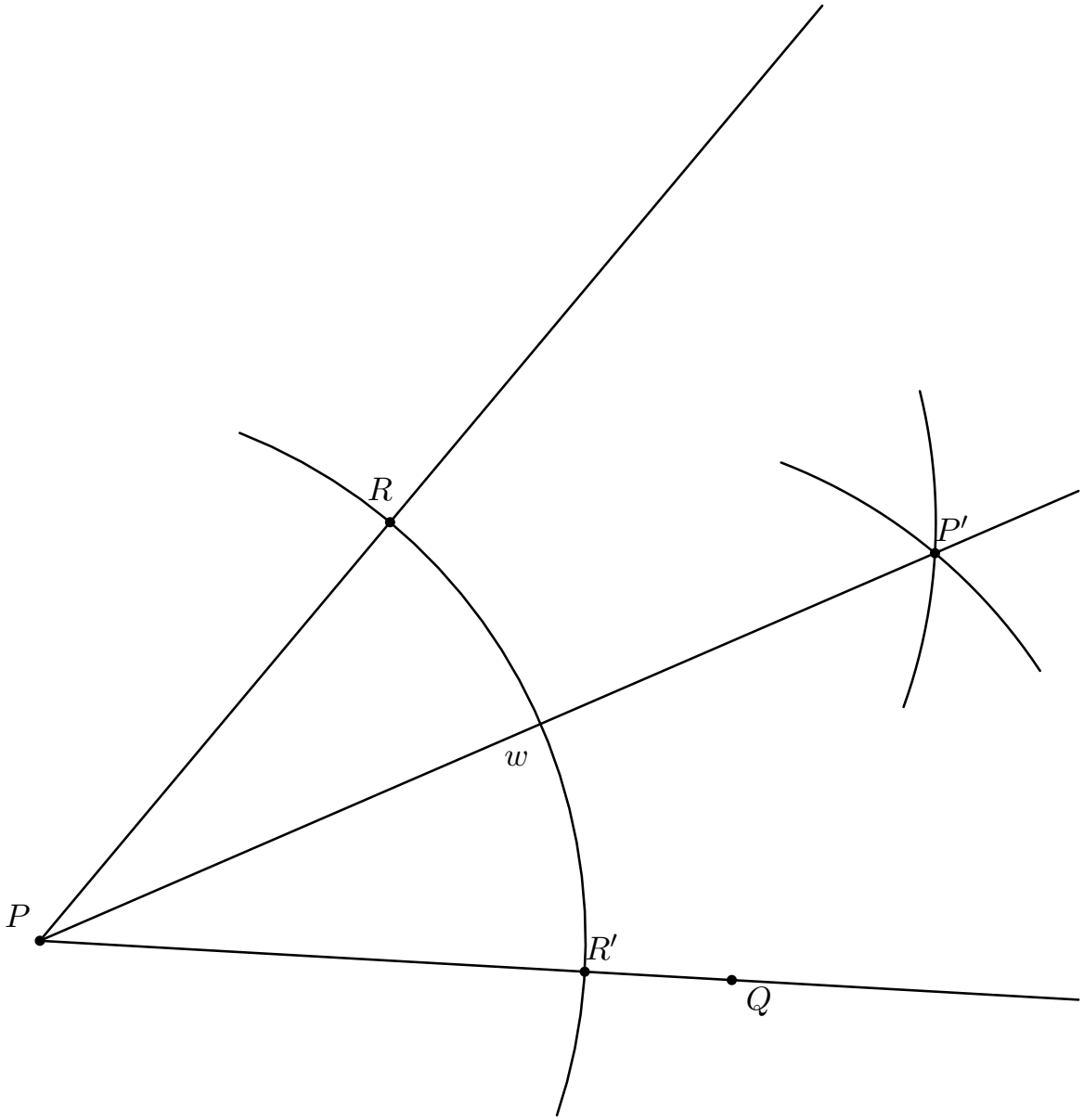
Elementare Geometrie
Lösungsvorschläge Probeklausur

19. Juli 2018

Aufgabe 1

Konstruktion



Aufgabe 1

Konstruktionsbeschreibung

(1) Kreis P_R schneidet $\overrightarrow{PQ}$ in R';

Aufgabe 1

Konstruktionsbeschreibung

(1) Kreis P_R schneidet $\overrightarrow{PQ}$ in R';

(2) Kreise R_P und R'_P schneiden sich in P und P';

Aufgabe 1

Konstruktionsbeschreibung

(1) Kreis P_R schneidet $\overrightarrow{PQ}$ in R';

(2) Kreise R_P und R'_P schneiden sich in P und P';

(3) Die Winkelhalbierende w ist dann die Gerade PP'.

Aufgabe 1

Begründung

Sei σ die Spiegelung an der Geraden PP'.

Aufgabe 1

Begründung

Sei σ die Spiegelung an der Geraden PP'. Weil P und P' auf der Spiegelgeraden liegen, sind sie Fixpunkte von σ.

Aufgabe 1

Begründung

Sei σ die Spiegelung an der Geraden PP'. Weil P und P' auf der Spiegelgeraden liegen, sind sie Fixpunkte von σ. R liegt nicht auf PP', wird also **nicht** auf sich selbst abgebildet.

Aufgabe 1

Begründung

Sei σ die Spiegelung an der Geraden PP'. Weil P und P' auf der Spiegelgeraden liegen, sind sie Fixpunkte von σ. R liegt nicht auf PP', wird also **nicht** auf sich selbst abgebildet. Das Bild $\sigma(R)$ ist also der zweite Schnittpunkt der Kreise P_R und P'_R.

Aufgabe 1

Begründung

Sei σ die Spiegelung an der Geraden PP'. Weil P und P' auf der Spiegelgeraden liegen, sind sie Fixpunkte von σ. R liegt nicht auf PP', wird also **nicht** auf sich selbst abgebildet. Das Bild $\sigma(R)$ ist also der zweite Schnittpunkt der Kreise P_R und P'_R. Dieser Punkt ist aber R', denn $|PR| = |PR'|$ und $|P'R| = |P'R'|$.

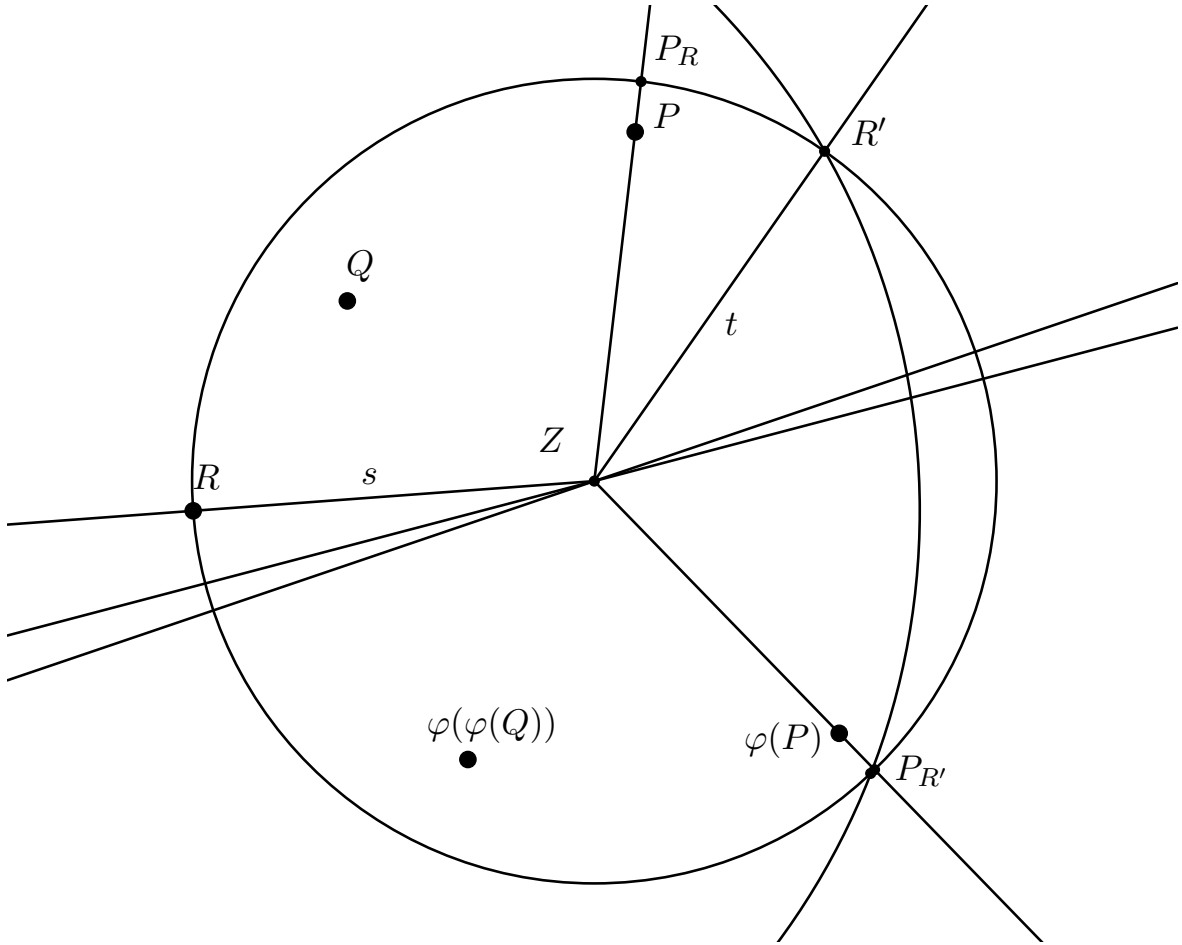
Aufgabe 1

Begründung

Sei σ die Spiegelung an der Geraden PP'. Weil P und P' auf der Spiegelgeraden liegen, sind sie Fixpunkte von σ. R liegt nicht auf PP', wird also **nicht** auf sich selbst abgebildet. Das Bild $\sigma(R)$ ist also der zweite Schnittpunkt der Kreise P_R und P'_R. Dieser Punkt ist aber R', denn $|PR| = |PR'|$ und $|P'R| = |P'R'|$. Daher sind die Dreiecke PRP' und $PR'P'$ kongruent und damit auch die Winkel $\angle RPP'$ und $\angle R'PP'$.

Aufgabe 2

Konstruktion



Aufgabe 2

Konstruktionsbeschreibung

(1) Mittelsenkrechten zu $\overline{P\varphi(P)}$ und zu $\overline{Q\varphi(\varphi(Q))}$ schneiden sich in Z;

Aufgabe 2

Konstruktionsbeschreibung

(1) Mittelsenkrechten zu $\overline{P\varphi(P)}$ und zu $\overline{Q\varphi(\varphi(Q))}$ schneiden sich in Z;

(2) Übertrage den **Drehwinkel** $\sphericalangle PZ\varphi(P)$ an $s = \overrightarrow{ZR}$, erhalte Strahl t;

Aufgabe 2

Konstruktionsbeschreibung

(1) Mittelsenkrechten zu $\overline{P\varphi(P)}$ und zu $\overline{Q\varphi(\varphi(Q))}$ schneiden sich in Z;

(2) Übertrage den **Drehwinkel** $\sphericalangle PZ\varphi(P)$ an $s = \overrightarrow{ZR}$, erhalte Strahl t;

(3) Kreis Z_R schneidet t in $R' = \varphi(R)$.

Aufgabe 2

Begründung

Weil $|Q\varphi(\varphi(Q))| < 2|P\varphi(P)|$ ist, kann φ keine Translation sein.

Aufgabe 2

Begründung

Weil $|Q\varphi(\varphi(Q))| < 2|P\varphi(P)|$ ist, kann φ keine Translation sein.
Als gerade Bewegung ist φ damit eine Drehung.

Aufgabe 2

Begründung

Weil $|Q\varphi(\varphi(Q))| < 2|P\varphi(P)|$ ist, kann φ keine Translation sein. Als gerade Bewegung ist φ damit eine Drehung. Das Drehzentrum Z hat aber von Punkt P und Bildpunkt $\varphi(P)$ denselben Abstand, womit Z auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{P\varphi(P)}$ liegen muss.

Aufgabe 2

Begründung

Weil $|Q\varphi(\varphi(Q))| < 2|P\varphi(P)|$ ist, kann φ keine Translation sein. Als gerade Bewegung ist φ damit eine Drehung. Das Drehzentrum Z hat aber von Punkt P und Bildpunkt $\varphi(P)$ denselben Abstand, womit Z auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{P\varphi(P)}$ liegen muss. Ebenso gilt $|ZQ| = |Z\varphi(Q)| = |Z\varphi(\varphi(Q))|$, also liegt Z auch auf der Mittelsenkrechten zu $Q\varphi(\varphi(Q))$.

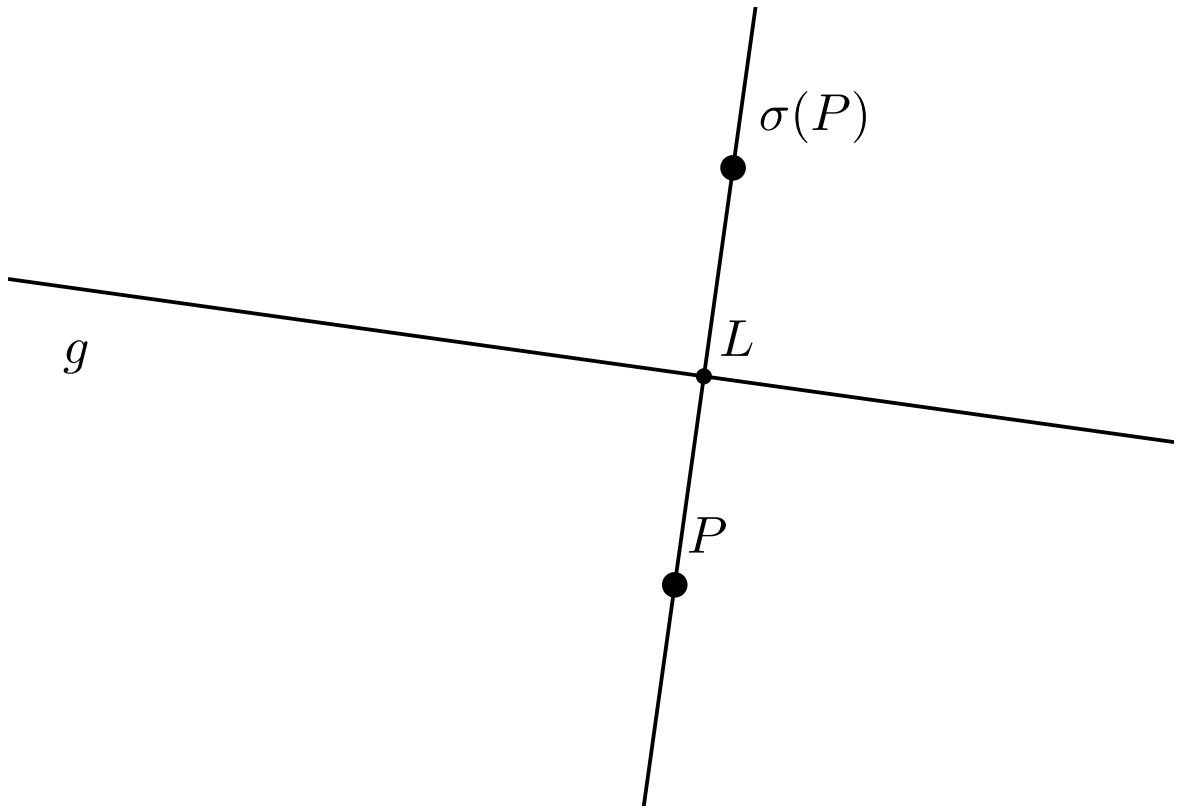
Aufgabe 2

Begründung

Weil $|Q\varphi(\varphi(Q))| < 2|P\varphi(P)|$ ist, kann φ keine Translation sein. Als gerade Bewegung ist φ damit eine Drehung. Das Drehzentrum Z hat aber von Punkt P und Bildpunkt $\varphi(P)$ denselben Abstand, womit Z auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{P\varphi(P)}$ liegen muss. Ebenso gilt $|ZQ| = |Z\varphi(Q)| = |Z\varphi(\varphi(Q))|$, also liegt Z auch auf der Mittelsenkrechten zu $Q\varphi(\varphi(Q))$. Das Bild $\varphi(R)$ muss wegen der Abstandstreue der Bewegung φ dann auf dem Kreis um Z mit Radius $|ZR|$ und auf dem Strahl liegen, der mit $\overrightarrow{ZR}$ den Drehwinkel $\mathrm{ang}(\varphi) = \sphericalangle(\overrightarrow{ZP}, \overrightarrow{Z\varphi(P)}) = \sphericalangle(s,t)$ einschließt.

Aufgabe 3

Skizze



Aufgabe 3

Begründung

Bei der Spiegelung an g wird L auf sich selbst abgebildet.

Aufgabe 3

Begründung

Bei der Spiegelung an g wird L auf sich selbst abgebildet.
Außerdem gilt wegen der Abstandtreue $|PL| = |\sigma(P)L|$.

Aufgabe 3

Begründung

Bei der Spiegelung an g wird L auf sich selbst abgebildet. Außerdem gilt wegen der Abstandtreue $|PL| = |\sigma(P)L|$. Damit ist L Mittelpunkt von $\overline{P\sigma(P)}$, woraus folgt, dass die Verschiebung P nach L dieselbe wie die von L nach $\sigma(P)$ ist.

Aufgabe 3

Begründung

Bei der Spiegelung an g wird L auf sich selbst abgebildet. Außerdem gilt wegen der Abstandtreue $|PL| = |\sigma(P)L|$. Damit ist L Mittelpunkt von $\overline{P\sigma(P)}$, woraus folgt, dass die Verschiebung P nach L dieselbe wie die von L nach $\sigma(P)$ ist. Zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned}\sigma(P) &= P + \sigma(P) - P = P + \sigma(P) - L + L - P \\ &= P + (\sigma(P) - L) + (L - P) = P + L - P + L - P.\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Wir betrachten die Dreiecke $PP'R$ und $Q'QR$.

Aufgabe 4

Wir betrachten die Dreiecke $PP'R$ und $Q'QR$. Weil PRQ' gleichseitig ist, gilt $|PR| = |Q'R|$.

Aufgabe 4

Wir betrachten die Dreiecke $PP'R$ und $Q'QR$. Weil PRQ' gleichseitig ist, gilt $|PR| = |Q'R|$. Ebenso folgt $|RP'| = |RQ|$.

Aufgabe 4

Wir betrachten die Dreiecke $PP'R$ und $Q'QR$. Weil PRQ' gleichseitig ist, gilt $|PR| = |Q'R|$. Ebenso folgt $|RP'| = |RQ|$. Außerdem gilt $\angle PRP' = \angle PRQ + \angle QRP'$ und $\angle Q'RQ = \angle Q'RP + \angle PRQ$.

Aufgabe 4

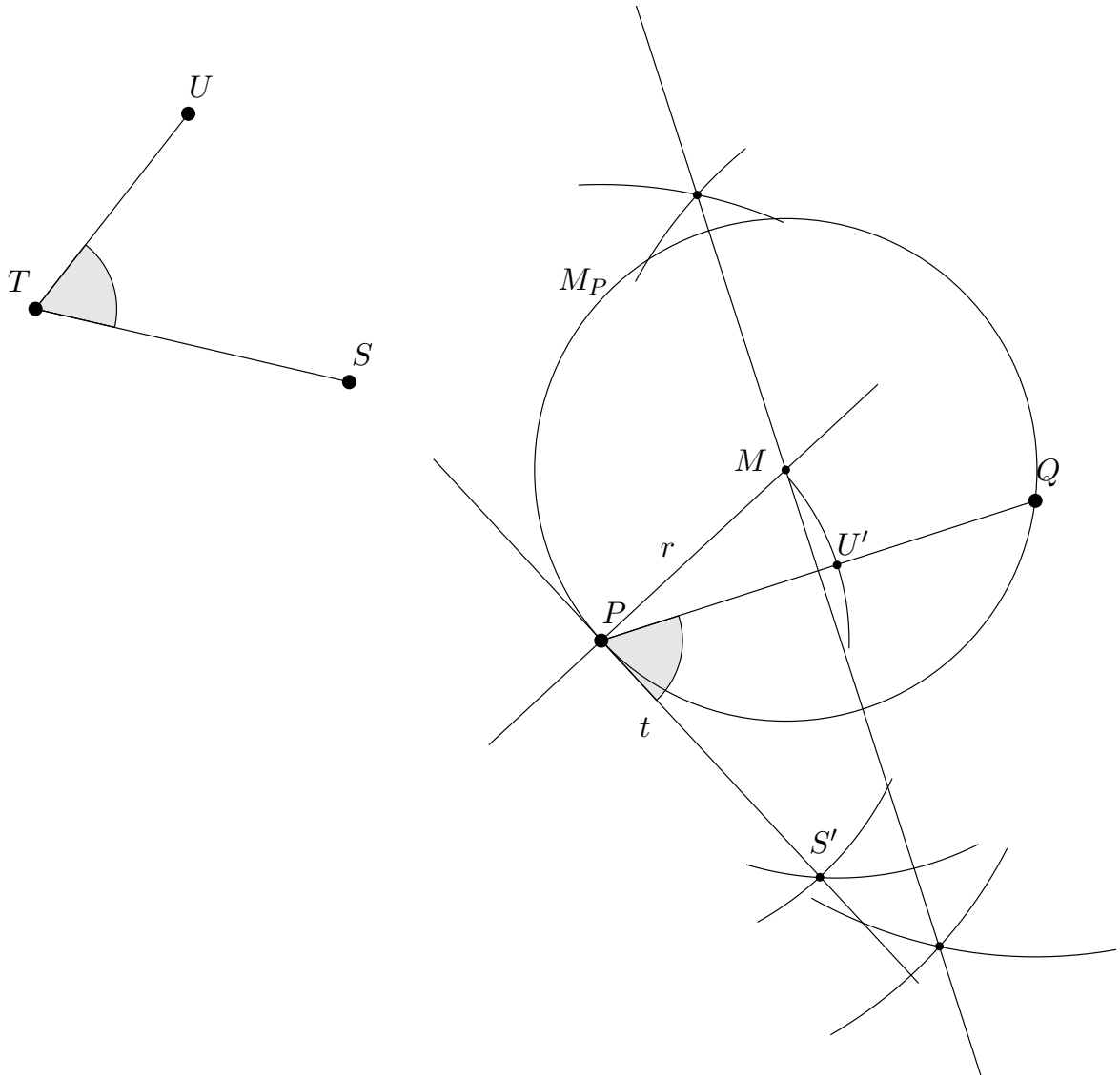
Wir betrachten die Dreiecke $PP'R$ und $Q'QR$. Weil PRQ' gleichseitig ist, gilt $|PR| = |Q'R|$. Ebenso folgt $|RP'| = |RQ|$. Außerdem gilt $\angle PRP' = \angle PRQ + \angle QRP'$ und $\angle Q'RQ = \angle Q'RP + \angle PRQ$. Da $\angle QRP' = \angle Q'RP = 60°$ ist, folgt $\angle PRP' = \angle Q'RQ$.

Aufgabe 4

Wir betrachten die Dreiecke $PP'R$ und $Q'QR$. Weil PRQ' gleichseitig ist, gilt $|PR| = |Q'R|$. Ebenso folgt $|RP'| = |RQ|$. Außerdem gilt $\angle PRP' = \angle PRQ + \angle QRP'$ und $\angle Q'RQ = \angle Q'RP + \angle PRQ$. Da $\angle QRP' = \angle Q'RP = 60°$ ist, folgt $\angle PRP' = \angle Q'RQ$. Nach Kongruenzsatz "SWS" sind die Dreiecke $PP'R$ und $Q'QR$ damit kongruent, woraus $|PP'| = |QQ'|$ folgt.

Aufgabe 5

Konstruktion



Aufgabe 5

Konstruktionsbeschreibung

(1) Übertrage den (Dreh-)Winkel $\sphericalangle UTS$ an $\overrightarrow{PQ}$, erhalte die Gerade t;

(2) Senkrechte zu t in P sei r;

(3) Mittelsenkrechte zu $\overline{PQ}$ schneidet r im Punkt M;

(4) Kreis M_P ist der gesuchte Umkreis.

Aufgabe 5

Begründung

Weil M auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{PQ}$ liegt, ist $\overline{PQ}$ eine Sehne des Kreises M_P.

Aufgabe 5

Begründung

Weil M auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{PQ}$ liegt, ist $\overline{PQ}$ eine Sehne des Kreises M_P. Weil nach Konstruktion $\overline{MP} \subset r \perp t$ ist (und der Kreispunkt P auf t liegt), ist t Tangente an M_P.

Aufgabe 5

Begründung

Weil M auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{PQ}$ liegt, ist $\overline{PQ}$ eine Sehne des Kreises M_P. Weil nach Konstruktion $\overline{MP} \subset r \perp t$ ist (und der Kreispunkt P auf t liegt), ist t Tangente an M_P. Nach dem Sehnen-Tangenten-Winkelsatz sind genau die Punkte auf der Peripherie des Kreises M_P über $\overline{PQ}$ diejenigen, welche $\angle PRQ = \angle STU$ erfüllen.

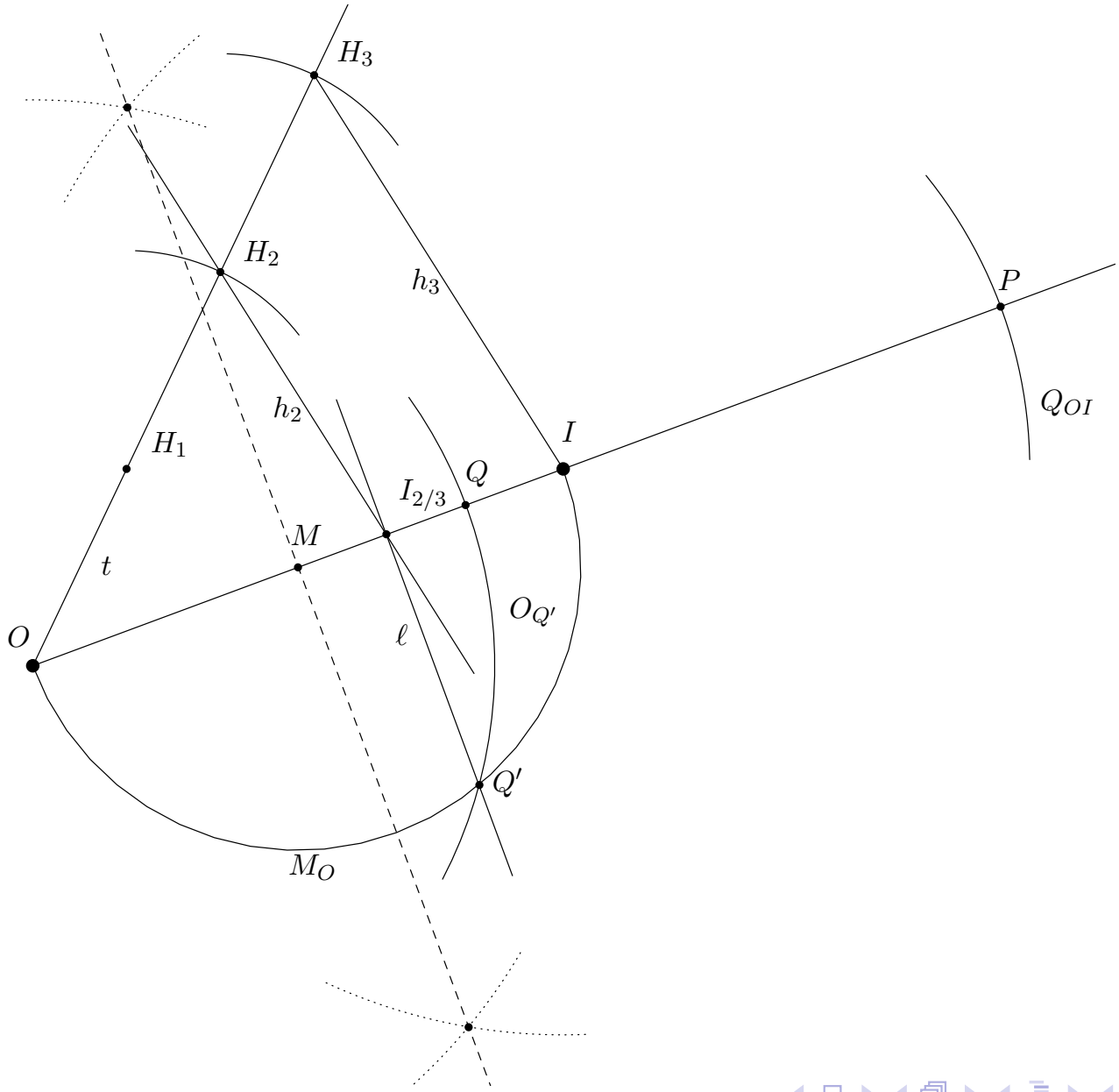
Aufgabe 5

Begründung

Weil M auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{PQ}$ liegt, ist $\overline{PQ}$ eine Sehne des Kreises M_P. Weil nach Konstruktion $\overline{MP} \subset r \perp t$ ist (und der Kreispunkt P auf t liegt), ist t Tangente an M_P. Nach dem Sehnen-Tangenten-Winkelsatz sind genau die Punkte auf der Peripherie des Kreises M_P über $\overline{PQ}$ diejenigen, welche $\angle PRQ = \angle STU$ erfüllen. Damit muss aber M_P der gesuchte Umkreis sein.

Aufgabe 6

Konstruktion



Aufgabe 6

Konstruktionsbeschreibung

(1) Sei t beliebiger Strahl durch O mit $t \nparallel \overrightarrow{OI}$; Sei H_1 beliebiger Punkt auf t;

(2) Kreis H_{1O} schneidet t in H_2; Kreis H_{2H_1} schneidet t in H_3;

(3) Parallele h_2 zu $h_3 = H_3I$ schneidet $\overrightarrow{OI}$ in $I_{2/3}$;

(4) M sei Mittelpunkt von OI;

(5) Kreis M_O schneidet die Senkrechte ℓ zu OI in $I_{2/3}$ im Punkt Q';

(6) Kreis $O_{Q'}$ schneidet $\overrightarrow{OI}$ in Q;

(7) Kreis Q_{OI} schneidet $\overrightarrow{OI}$ in P.

Aufgabe 6

Begründung

Weil $h_2 \parallel h_3$ ist, gilt nach dem ersten Strahlensatz

$$\frac{|OI_{2/3}|}{|OI|} = \frac{|OH_2|}{|OH_3|} = \frac{2}{3}.$$

Aufgabe 6

Begründung

Weil $h_2 \parallel h_3$ ist, gilt nach dem ersten Strahlensatz

$$\frac{|OI_{2/3}|}{|OI|} = \frac{|OH_2|}{|OH_3|} = \frac{2}{3}.$$

Nach dem Satz des Thales ist OIQ' rechtwinklig und damit nach Kathetensatz

$$|OQ'|^2 = |OI| \cdot |OI_{2/3}| \quad \overset{|:|OI|^2}{\Longrightarrow} \quad \frac{|OQ|^2}{|OI|^2} = \frac{|OI_{2/3}|}{|OI|} = \frac{2}{3}$$

$$\overset{|\sqrt{\cdot}}{\Longrightarrow} \quad \frac{|OQ|}{|OI|} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Aufgabe 6

Begründung

Weil $h_2 \parallel h_3$ ist, gilt nach dem ersten Strahlensatz

$$\frac{|OI_{2/3}|}{|OI|} = \frac{|OH_2|}{|OH_3|} = \frac{2}{3}.$$

Nach dem Satz des Thales ist OIQ' rechtwinklig und damit nach Kathetensatz

$$|OQ'|^2 = |OI| \cdot |OI_{2/3}| \quad \overset{|:|OI|^2}{\Longrightarrow} \quad \frac{|OQ|^2}{|OI|^2} = \frac{|OI_{2/3}|}{|OI|} = \frac{2}{3}$$

$$\overset{|\sqrt{\cdot}}{\Longrightarrow} \quad \frac{|OQ|}{|OI|} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Damit ist nach Konstruktion

$$\frac{|OP|}{|OI|} = \frac{|OQ| + |QP|}{|OI|} = \frac{|OQ|}{|OI|} + \frac{|OI|}{|OI|} = \sqrt{\frac{2}{3}} + 1.$$