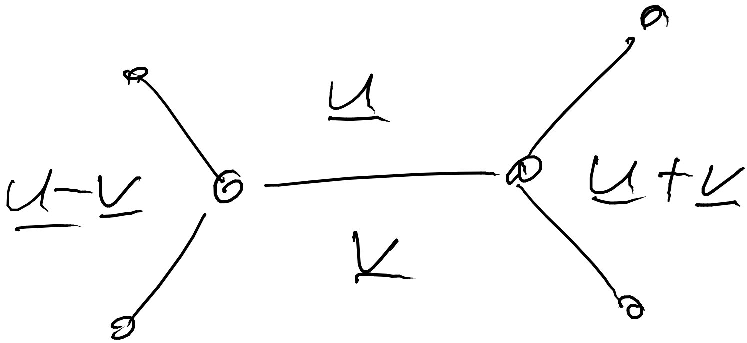
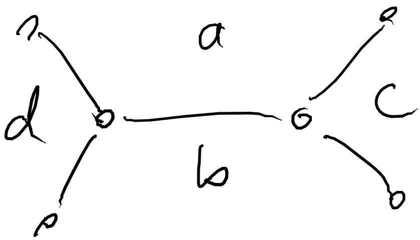
Erinnerung:

- $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$ ist primitiv, wenn a und b teilerfremd
- Ist $(\underline{u}\ \underline{v}) \in GL_2(\mathbb{Z})$, dann sind $\underline{u}$ und $\underline{v}$ primitiv
- Außerdem sind $\underline{w} = \underline{u} + \underline{v}$ und $\underline{w}' = \underline{u} - \underline{v}$ primitiv und $[\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}]$ und $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}'\}$ sind die einzigen projektiven Triplets die $\pm\underline{u}$ und $\pm\underline{v}$ enthalten
- T ist der Graph mit
  - Ecken projektive Triplets
  - Kanten $[\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}]$ ○———○ $[\underline{u}, \underline{v}, \underline{v}']$ mit $(\underline{u}\ \underline{v}) \in GL_2(\mathbb{Z})$

- "Gebiete" sind mit primitive Vektoren beschriftet



- Gegeben eine quadratische Form q gilt für $a = q(u), \ldots$



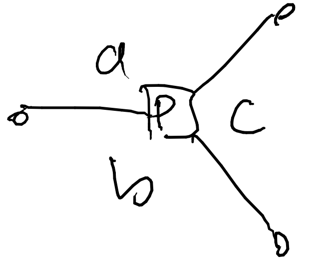
dass $h := (a+b) - d = c - (a+b)$

- Orientieren Kanten, so dass $h > 0$.
- T hat keine Zykel

Bisher: T ist ein Wald

Ziel heute: T ist zusammenhängend, also ein Baum.

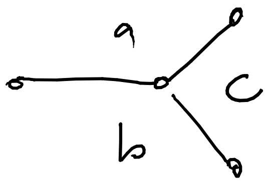
Beobachtung. Ein Knoten



ist eine Quelle gdw.

$a+b \geq c,\ b+c \geq a,\ c+a \geq b.$

Bew.



$$h = c-(a+b) \leq 0$$

$$\iff a+b \geq c$$

und zykl. $\square$

Lemma (Sellings Formel). Sei q eine quadratische Form und $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$ ein Triplet $\left(\begin{matrix}\text{primitiv,} \\ \underline{u}+\underline{v}+\underline{w}=0\end{matrix}\right)$.
Setze $a=q(\underline{u})$, $b=q(\underline{v})$, $c=q(\underline{w})$ und $\alpha=\frac{b+c-a}{2}$, $\beta=\frac{a+c-b}{2}$, $\gamma=\frac{a+b-c}{2}$.
Dann gilt für

$$\underline{s}=k\underline{u}+l\underline{v}+m\underline{w}$$

dass
$$q(\underline{s})=\alpha(l-m)^2+\beta(k-m)^2+\gamma(k-l)^2.$$

Beweis. Für $k'=k+n$, $l'=l+n$, $m'=m+n$ kommt derselbe Wert heraus.
Wir können also $m=0$ annehmen.
Dann sind beide Seiten quadratische Formen in k und l, die für $(k,l)=(1,0)$, $(k,l)=(0,1)$ und $(k,l)=(1,1)$

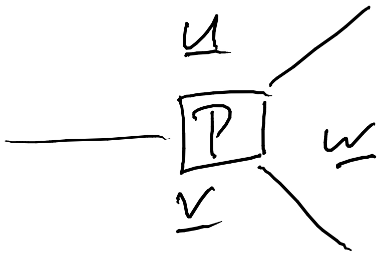
$\underline{s}=\underline{u}$ $\qquad$ $\underline{s}=\underline{v}$ $\qquad$ $\underline{s}=\underline{u}+\underline{v}$:

z. B.:

$$\alpha(0-0)^2 + \beta(1-0)^2 + \gamma(1-0)^2$$

$$= \beta + \gamma = 2 \cdot \frac{a}{2} = a = q(\underline{u}).$$ ☒

Lemma. Wenn



eine Quelle ist, dann sind $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ positive Vektoren auf denen q minimal ist.

Beweis. Schreibe beliebiges

$$\underline{s} \in \mathbb{Z}^2 \text{ als}$$

$$\underline{s} = k\underline{u} + l\underline{v} + m\underline{w}.$$

und setze
$$\alpha := \frac{b+c-a}{2} \geq 0$$
$$\beta := \frac{c+a-b}{2} \geq 0$$
$$\gamma := \frac{a+b-c}{2} \geq 0.$$

Bem. Ist $\underline{s} \notin \{\pm\underline{u}, \pm\underline{v}, \pm\underline{w}\}$ und primitiv, dann ist

$$q(\underline{s}) \geq \alpha+\beta+\gamma \geq \max(a,b,c)$$

Bew. Wenn $l \neq m$, $m \neq n$, $k \neq l$ gilt die Ungleichung. Andernfalls ist z.B. $k=l$ und

$$\underline{s} = k\underline{u} + n\underline{v} + m\underline{w}$$
$$= (m-n)\underline{w}.$$

Für $\underline{s}$ primitiv folgt $\underline{s} = \pm\underline{w}$. $\square$

Kor. Wenn $a = q(\underline{u})$, $b = q(\underline{v})$, $c = q(\underline{w})$ für ein Triplet $[\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}]$ die Ungleichungen

$$a+b>c, \quad b+c>a, \quad c+a>b$$

erfüllen, dann ist $[\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}]$ die einzige Quelle.

Bew. Die Ungleichung

$$\alpha+\beta+\gamma \geq \max\{a,b,c\}$$

in der 2. Beh. des letzten Beweises ist jetzt strikt. $\boxed{q}$

Kor. T ist zusammenhängend

Bew. Wähle q wie im letzten Korollar (z.B. $q\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x^2+y^2-xy$ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$).

Jeder Knoten ist durch Rückwärtslaufen mit der eind. Quelle verb. $\boxed{q}$

Bem. Die Gruppe $GL_2(\mathbb{Z})$ operiert auf T:

$$A\,[\underline{u},\underline{v},\underline{w}] = [A\underline{u}, A\underline{v}, A\underline{w}]$$

$\ulcorner$ Wohldef:

$$A\,(\underline{u}\ \underline{v}) = (A\underline{u}\ A\underline{v}) \in GL_2(\mathbb{Z})$$

und $$A\,\underline{w} = A\,(\underline{u} \pm \underline{v}) = A\underline{u} \pm A\underline{v}. \lrcorner$$

$\boxed{\mathbb{Z}}$

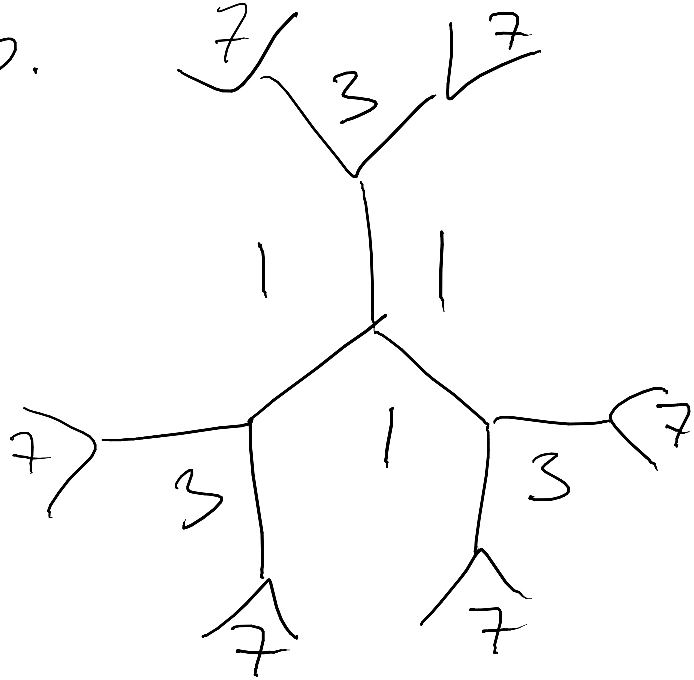
Beob. Die Wirkung ist transitiv auf Kanten.

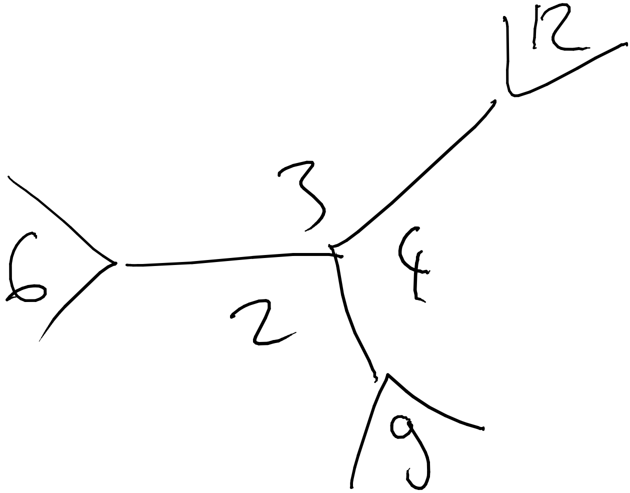
Bew. Ein Element, das die Kante von $(\underline{u}\ \underline{v}) \in GL_2\mathbb{Z}$ auf die Kante von $(\underline{u}'\ \underline{v}')$ abbildet ist

$$(\underline{u}'\ \underline{v}')(\underline{u}\ \underline{v})^{-1}.$$

$\boxed{S}$

Bsp.





Def. Sei q positiv definit,

$[\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}]$ eine Quelle,

$a = q(\underline{u}), b = q(\underline{v}), c = q(\underline{w})$

$\alpha = \frac{b+c-a}{2}, \beta = \frac{a+c-b}{2}, \gamma = \frac{a+b-c}{2}$

Sind $\alpha, \beta, \gamma > 0$, dann heißt die Quelle <u>einfach</u>.

Lemma. Wenn q pos. def. ist und eine nicht einfache Quelle $[\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}]$ hat, dann gibt es genau zwei Quellen, die durch eine Kante mit Beschriftung 0 verbunden sind.

Bew. O.E. ist $\gamma = 0$, also

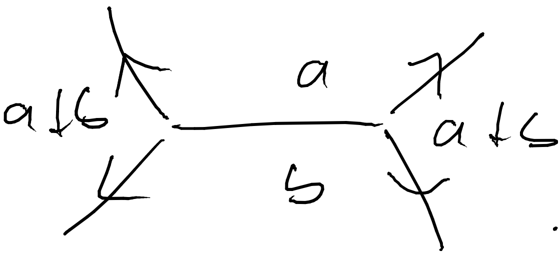
$\alpha = b$, $\beta = a > 0$.

Damit ist $q(x\underline{u} + v\underline{y}) = bx^2 + ay^2$

und insbesondere

$\underline{s}$	$\underline{u}$	$\underline{v}$	$\underline{u}+\underline{v}$	$\underline{u}-\underline{v}$
$q(\underline{s})$	b	a	$a+b$	$a+b$

mit $a+b > a, b$.

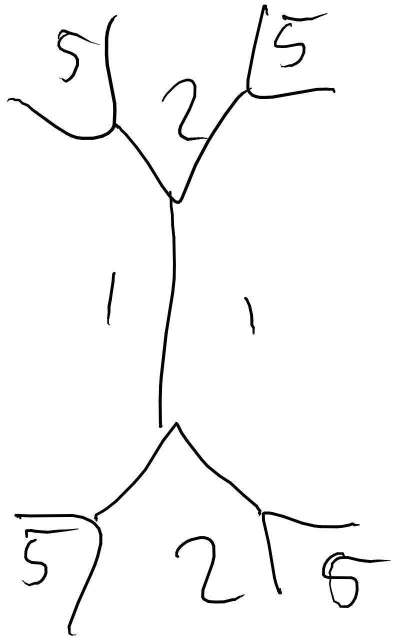


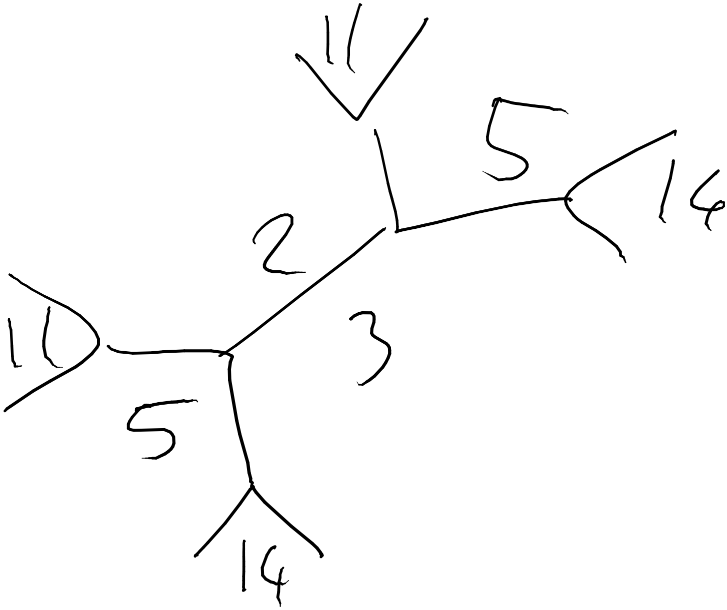
Da T zusammenhängend ist folgt

$q(\underline{s}) > q(\underline{u}), q(\underline{v})$ für $\underline{s} \notin \{\pm\underline{u}, \pm\underline{v}\}$

$\boxtimes$

Beispiel $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2$





Def. Ist q positiv definit und hat nicht-einfache Quelle, dann nennen wir die Kante, die die beiden Quellen verbindet (und die mit 0 beschriftet ist) <u>Doppelquelle</u>.

Zusammenfassend haben wir gesehen, dass eine positiv definite Form entweder eine einfache Quelle oder eine Doppelquelle hat und die Werte wachsen, wenn man sich von dieser entfernt.