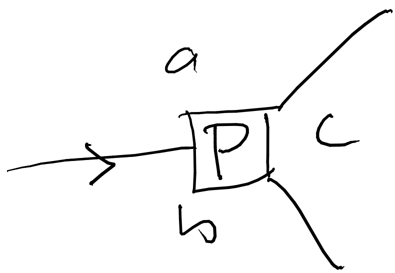
Negativ definite Formen sind negierte positiv definite Formen.

<u>Indefinite Formen, die nicht 0 darst.</u>

Sei jetzt q so, dass $\underline{s}, \underline{t} \in \mathbb{Z}^2$ existieren mit $q(\underline{s})>0$, $q(\underline{t})<0$ aber $q(\underline{v})=0 \Rightarrow \underline{v}=0$.

Beob. Es existieren $(\underline{u}\ \underline{v}) \in Gl_2\mathbb{Z}$ mit $q(\underline{u})>0$, $q(\underline{v})<0$.

Beweis. Wir orientieren die Pfeile wie vorher. Betrachte eine bel. Ecke:

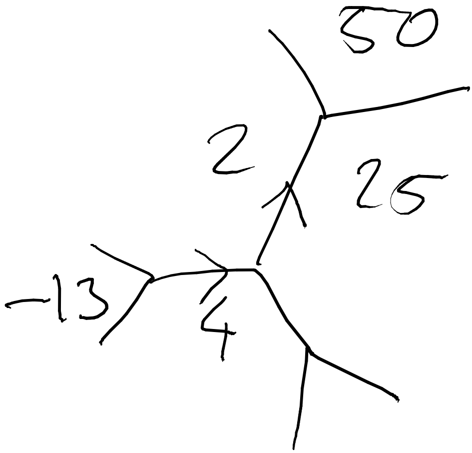


Falls $a,b,c>0$ muss eine Kante eingehend sein.

Andernfalls wäre P eine Quelle und $q(\underline{s})>0$ für alle $\underline{s}$.

Folgen wir sukzessive eingehenden Kanten rückwärts, verkleinern wir die q-Werte. Da O nicht dargestellt wird, erreichen wir endl. einen neg. Wert.
(für a, b, c ist das Argument umgekehrt). $\boxed{a}$

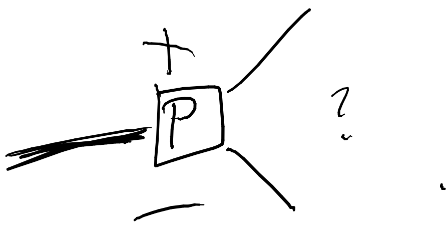
Bsp.



Def. Eine solche Kante heißt <u>Flusskante</u>.

Lemma. Die Flusskanten bilden einen linearen Kantenzug.

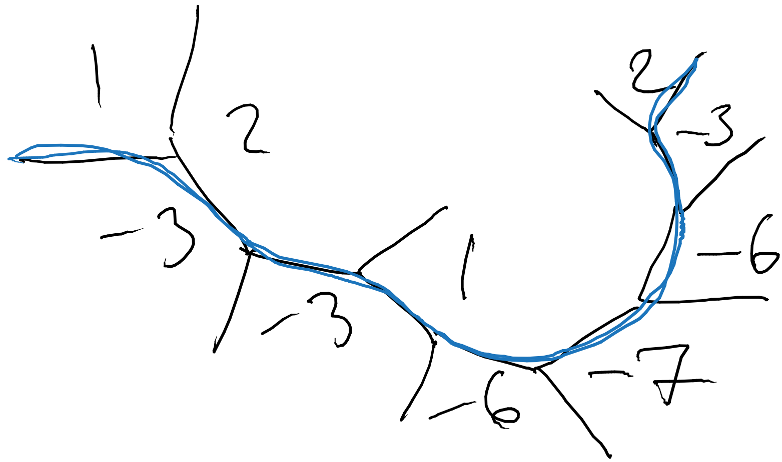
Beweis. Wenn P an einer Flusskante liegt, ist genau eine der beiden anderen Kanten auch eine Flusskante:



Also ist jede Flusskante Teil eines linearen Kantenzugs von Flusskanten. Alle davon wegführenden Kanten sind aber aufsteigend oder absteigend und führen deshalb wie wieder zu Flusskanten. [9]

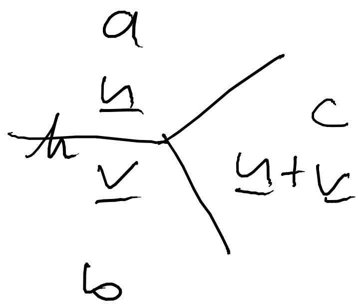
Def. Die Vereinigung der Flusskanten nennen wir den <u>Fluss</u>.

Bsp.



Lemma. Die Werte entlang des Flusses wiederholen sich periodisch.

Beweis. Für einen Knoten



ist $q(x\underline{u}+y\underline{v}) = ax^2 + hxy + by^2$

Die Determinante ist

$$d = ab - \left(\tfrac{1}{2}h\right)^2.$$

Für Flusskanten ist $ab < 0$, also

$$|d| = -d = \left(\tfrac{1}{2}h\right)^2 + |ab|.$$

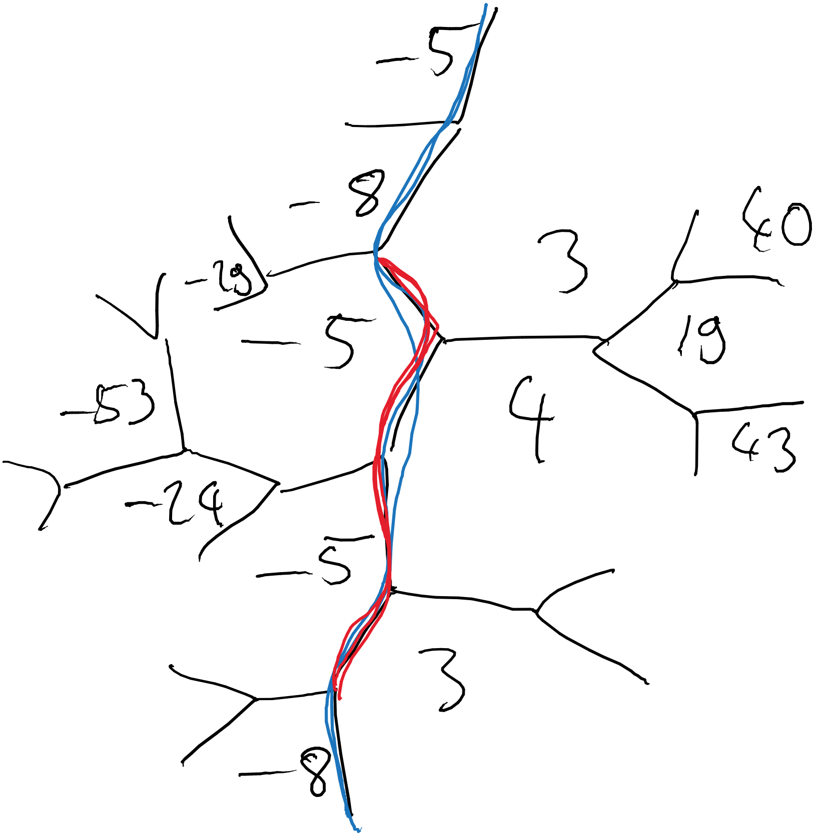
Also $\left|\tfrac{1}{2}h\right| < \sqrt{|d|}$ und

$$|ab| = |d| - \left(\tfrac{1}{2}h\right)^2.$$

Dafür gibt es nur endlich viele ganzzahlige Lösungen.
Da die Werte an einem Knoten die folgenden Werte entlang des Flusses bestimmen, sind die Werte periodisch.

Bsp. Welche Werte nimmt

$3x^2 + 6xy - 5y^2$ an?



Die Form nimmt Werte $n^2 \cdot c$ an

wobei $c \in \{3, 4, 19, 40, 43, \dots\}$

$\cup \{-5, -8, -24, -29, -53, \dots\}$

Insbesondere gibt es z.B keine Lösung

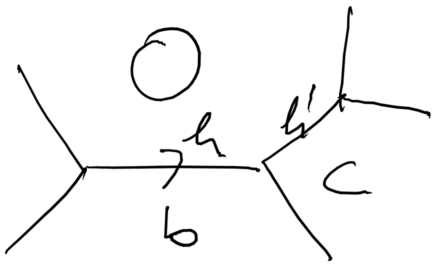
für $3x^2 + 6xy - 5y^2 = 7$

<u>Semidefinite Formen</u>

Def. Ein <u>See</u> ist eine Region zu einem Vektor $\underline{u}$ mit $q(\underline{u})=0$.

Beob. Die Werte der an einen See angrenzenden Regionen bilden eine arithmetische Progression.

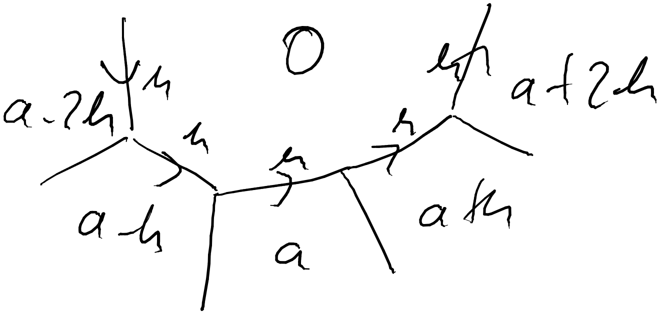
Bew.



$$h = c - (0+b)$$
$$h' = (c+0) - b.$$

$\square$

"Bsp."



Beob. Ist q semidefinit (aber nicht trivial oder definit) gibt es genau einen See und alle angrenzenden Gebiete tragen denselben Wert.

Bew. q ist nicht definit, also gibt es einen See. Wäre h wie oben $\neq 0$, dann würde q sowohl pos als auch neg. Werte darstellen also ist $h=0$. Wenn $a=0$ ist, ist q trivial. Wenn nicht, gibt es keine weiteren See.

$\square$

Indefinite Formen, die 0 darstellen

Beob. Ist q indefinit und stellt 0 dar, dann gibt es genau zwei Seen. Diese sind entweder durch einen Fluss verbunden oder benachbart.

Def. Eine Kante, die zwischen zwei Seen liegt heißt Wehr.

Bew. Da q 0 darstellt gibt es einen See. Die Werte um den See bilden eine arithmetische Progression mit pos. und neg. Werten. Falls 0 nicht in der Progression ist, verläuft zwischen pos. und neg. Zahl ein Fluss.

Wäre der Fluss unendlich, wäre er periodisch. Also ist er endlich und endet in einem weiteren See.

Seen und Fluss teilen den Graph in zwei Teile, auf der einen wachsen pos. Werte nach ∞, auf der anderen neg nach $-\infty$.

Falls die Progression 0 enthält, sind beide Seen dicht benachbart. ☐

Mit den beschriebenen Methoden sieht man:

Satz. Für eine diophantische Gleichung $ax^2+hxy+by^2=n$ ist entscheidbar, ob sie Lösungen besitzt. Falls ja, können Lösungen algebraisch gefunden werden.
Auch die Äquivalenz von Formen kann entschieden werden und die Isometriegruppe bestimmt werden.