Beob. Die Gruppe $GL_2(\mathbb{Z})$ wirkt auf T und den umgebenden Gebieten.

Beweis. Seien $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{Z}^2$ primitive Vektoren und $g \in GL_2(\mathbb{Z})$.

Wenn $(\underline{u}\ \underline{v}) \in GL_2(\mathbb{Z})$, dann ist auch $g(\underline{u}\ \underline{v}) = (\underline{u}'\ \underline{v}') \in GL_2(\mathbb{Z})$.

Insbesondere sind $\underline{u}'$ und $\underline{v}'$ primitiv.

Wenn $\underline{u} + \underline{v} + \underline{w} = \underline{0}$, dann ist auch

$$g\underline{u} + g\underline{v} + g\underline{w} = g(\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}) = 0.$$

$\square$

Beob. $GL_2(\mathbb{Z})$ wirkt auf der Menge der quadratischen Formen durch

$$g \cdot \begin{pmatrix} a & \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} & b \end{pmatrix} = g^{-t} \cdot \begin{pmatrix} a & \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} & c \end{pmatrix} g^{-1}.$$

Beweis. $1.A = 1^t \cdot A \cdot 1$

und
$$\begin{aligned}(g \cdot h).A &= (g \cdot h)^{-t} A \cdot (gh)^{-1} \\ &= g^{-t} h^{-t} \cdot A \cdot h^{-1} \cdot g^{-1} \\ &= g^{-t} (h.A) g^{-1} \\ &= g.h.A.\end{aligned}$$
$\square$

Beob. Für $g \in GL_2(\mathbb{Z})$ gilt

$$(g \cdot q)(g \cdot \underline{u}) = q(\underline{u}).$$

Beweis.
$$\begin{aligned}(g\underline{u})^t (g.A)(g\underline{u}) &= (\underline{u}^t g^t)(g^{-t} A g^{-1})(g\underline{u}) \\ &= \underline{u}^t A \underline{u} \\ &= q(\underline{u}).\end{aligned}$$
$\square$

Def. Wir nennen zwei quadratische Formen <u>ähnlich</u> wenn sie im selben $GL_2\mathbb{Z}$-Orbit liegen.

Beobachtung. Seien $(\underline{u},\underline{v},\underline{w})$ und $(\underline{u}',\underline{v}',\underline{w}')$ geordnete Tripletts. Dann existiert ein $g \in GL_2\mathbb{Z}$ mit

$$(g\underline{u}, g\underline{v}, g\underline{w}) = (\underline{u}', \underline{v}', \underline{w}')$$

Beweis. Es sind $(\underline{u}\ \underline{v}), (\underline{u}'\ \underline{v}') \in GL_2\mathbb{Z}$. Das Element $g := (\underline{u}'\ \underline{v}')(\underline{u}\ \underline{v})^{-1}$ erfüllt

$$g(\underline{u}\ \underline{v}) = (\underline{u}'\ \underline{v}')(\underline{u}\ \underline{v})^{-1}(\underline{u}\ \underline{v})$$
$$= (\underline{u}'\ \underline{v}').$$

Außerdem ist $g\underline{w} = g(-\underline{u}-\underline{v}) = -g\underline{u}-g\underline{v}$
$$= -\underline{u}'-\underline{v}' = \underline{w}' \qquad \square$$

Kor. Die Gruppe $SL_2\mathbb{Z}$ wirkt transitiv auf geordneten Paaren von benachbarten Gebieten.

Bew. Seien $\underline{u},\underline{v}$ und $\underline{u}',\underline{v}'$ die zugehörigen Vektoren. Es ist

$$(\underline{u}\ \underline{v}),\ (\underline{u}'\ \underline{v}') \in GL_2\mathbb{Z}.$$

Da das Gebiet zu $\pm\underline{u}$ gehört können wir $\underline{u}$ durch $-\underline{u}$ ersetzen falls nötig um $\det(\underline{u}\ \underline{v})=1$ zu erreichen und analog für $(\underline{u}'\ \underline{v}')$. Dann ist

$$(\underline{u}\ \underline{v}),\ (\underline{u}'\ \underline{v}') \in SL_2\mathbb{Z}$$

und

$$g = (\underline{u}'\ \underline{v}')(\underline{u}\ \underline{v})^{-1}$$

bildet $(\underline{u},\underline{v})$ auf $(\underline{u}',\underline{v}')$ ab. $\square$

Sei $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{im}(z) > 0\}$

Lemma:

Die Gruppe $SL_2(\mathbb{R})$ wirkt auf H durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Beweis.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(x+iy) = \frac{ax+b+aiy}{cx+d+ciy}$$

$$= \frac{(ax+b+aiy)(cx+d-ciy)}{(cx+d)^2+(cy)^2}$$

$$= \frac{(ax+b)(cx+d)+acy^2+iy(a(cx+d)-c(ax+b))}{}$$

...

$$acx+ad-acx-bc$$

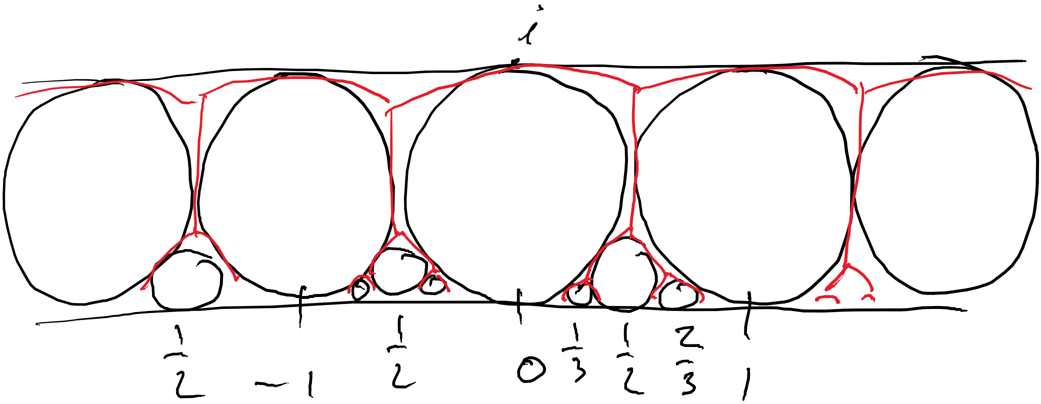
$$= ad-bc = 1 > 0$$

Nenner > 0

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right).z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.z\right)$$: Übung

□

Die Wirkung von $SL_2(\mathbb{Z})$ lässt die folgenden Teilmengen invariant:



Der rote Baum korrespondiert zu unserem Baum. Der (gekürzte) Bruch $\frac{p}{q}$ korrespondiert zu der Region mit (primitiven) Vektor $\binom{p}{q}$.