

Blatt 4

AUFGABE 1

Beweisen Sie, dass

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$.
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

AUFGABE 2

Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heißt *injektiv*, wenn für alle $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$ bereits $x = y$ gilt¹.

Zeigen Sie: Sind $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ Funktionen und ist die Komposition $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.

AUFGABE 3

Beweisen Sie: Ist (a_n) eine konvergente reelle Folge, so ist (a_n) beschränkt, d.h. die Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ ist beschränkt.

AUFGABE 4

Rufen Sie sich die Wertetabelle der Sinusfunktion in Erinnerung.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	-1	0

Wir wissen außerdem, dass der Sinus periodisch mit Periode 2π ist.

- a) Geben Sie zwei reelle Folgen (a_n) , (b_n) an, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|\sin(a_n) - \sin(b_n)| = 2$.

Hinweis: Finden Sie zwei Zahlen a_0 und b_0 mit der entsprechenden Eigenschaften und nutzen Sie dann die Periode.

- b) Geben Sie zwei reelle Folgen (a'_n) , (b'_n) an, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left| \sin\left(\frac{\pi}{a'_n}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{b'_n}\right) \right| = 2.$$

Hinweis: Formen Sie Ihre Folgen aus a) entsprechend um.

- c) Gegeben sei nun die Funktion

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{x}\right),$$

wobei $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Geben Sie zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ an, sodass $|f(x) - f(y)| = 2$ und $|x - y| \leq 0,005$ gelten.

Abgabe am 21. November im Briefkasten Ihres Tutors.

¹Das ist gleichbedeutend mit der Definition, die wir auf Blatt 2 gegeben haben.