

Blatt 8

AUFGABEN 1 UND 2

Benutzen Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, um folgende Integrale zu berechnen.

- a) $\int_0^1 x^2 \, dx$,
- b) $\int_0^\pi \cos(x) \, dx$,
- c) $\int_0^\pi \sin(x) \, dx$,
- d) $\int_1^5 e^x \, dx$,
- e) $\int_1^5 \frac{1}{x} \, dx$.

AUFGABE 3

Gegeben ist die folgende Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{wenn } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sei weiter Z eine Zerlegung von $[0, 1]$.

- a) Berechnen Sie die Obersumme $\overline{\mathcal{S}}_Z(f)$.
- b) Berechnen Sie die Untersumme $\underline{\mathcal{S}}_Z(f)$.
- c) Bestimmen Sie das Oberintegral $\overline{\mathcal{I}}(f)$.
- d) Bestimmen Sie das Unterintegral $\underline{\mathcal{I}}(f)$.
- e) Was folgt daraus für die Integrierbarkeit von f ?

Hinweis. Sie können ohne Beweis benutzen, dass für alle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ eine Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $a \leq q \leq b$ existiert.

AUFGABE 4

Geben Sie Funktionen $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ an, sodass

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx \neq \int_a^b f(x) \, dx \cdot \int_a^b g(x) \, dx$$

gilt. Begründen Sie Ihre Aussagen.

Für jedes Beispiel, das nur auf einer einzigen Abgabe zu finden ist, gibt es 2 Bonuspunkte.