Blatt 10 (Bonusblatt)

Aufgabe 1

Für eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ ist $k!$ (Sprechweise „k Fakultät") definiert als das Produkt

$$k! := \prod_{i=1}^{k} i = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k\,.$$

Es gilt $0! = 1$.
Berechnen Sie die Zahlen 1!, 2!, 3!, 4! und 5!.

Aufgabe 2

Sei $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine im Punkt $a \in \mathbb{R}$ k-mal differenzierbare Funktion. Das *Taylorpolynom der Ordnung k an der Stelle a* ist die Funktion

$$P_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

d.h. $P_k(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Wir betrachten nun konkret die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto x^2 + 2x\,.$$

Beispiele.

(1) Das Taylorpolynom der Ordnung 1 an der Stelle 0 ist das Polynom $f(0) + f'(0)(x-0) = 0 + 2x = 2x$.
(2) Das Taylorpolynom der Ordnung 1 an der Stelle 1 ist das Polynom $f(1) + f'(1)(x-1) = 3 + 4(x-1) = 4x - 1$.

Berechnen Sie jeweils von f die Taylorpolynome der Ordnung 3 an den Stellen $0 \in \mathbb{R}$ und $1 \in \mathbb{R}$.

Aufgaben 3 und 4

Der Satz von Taylor besagt: Ist $a \in \mathbb{R}$ und ist f eine $k+1$-fach differenzierbare Funktion und ist die k-te Ableitung $f^{(k)}$ stetig, so gilt

$$f(x) = P_k(x) + R_k(x)\,,$$

mit dem sog. Restglied

$$R_k(x) := \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}$$

für ein geeignetes $\xi \in [a, x]$ (oder $\xi \in [x, a]$ wenn $x < a$).

Wir betrachten die Sinusfunktion und deren Taylorpolynom der Ordnung 8 an der Stelle 0:

$$P_8(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\,.$$

Das Restglied $R_8(x)$ aus dem Satz von Taylor hängt von dem uns unbekannten Element $\xi \in \mathbb{R}$ ab. Für das Folgende müssen wir es auch gar nicht kennen:

a) Begründen Sie, dass für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ die Ungleichungen

$$-1 \leq f^{(9)}(\xi) \leq 1$$

gelten.

b) Folgern Sie, dass die Ungleichung

$$|R_k(x)| \leq \frac{|x|^9}{9!}$$

für alle $x \in [-1, 1]$ gilt.

c) Bestimmen Sie die Integrale

$$A := \int_0^1 \sin(x)\,\mathrm{d}\,x \quad \text{und} \quad B := \int_0^1 P_8(x)\,\mathrm{d}\,x\,.$$

d) Begründen Sie, ohne Benutzung der Berechnungen der vorhergehenden Teilaufgabe, dass

$$|A - B| \leq \int_0^1 \frac{x^9}{9!}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{3628800}$$

gilt.

e) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Ordnung 7 an der Stelle 0 der Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \mathrm{e}^x\,.$$

Kommentar

Das Taylorpolynom liefert uns hier eine Näherung an die eigentliche Funktion. Mit dem Restglied können wir zudem abschätzen, wie gut unsere Näherung ist; d.h. wir können den gemachten Fehler begrenzen. Häufig ist zu differenzieren leichter, als zu integrieren. Gleichzeitig ist aber das Integrieren von Polynomen sehr leicht. Wir ersetzen also unsere eigentliche Funktion durch die Näherung (also das Taylorpolynom) und integrieren diese. Mittels des Restgliedes können wir feststellen, ob der Fehler, den wir dabei gemacht haben können, für unsere Zwecke genügend klein war. Mit solchen und weiteren Verfahren zur Näherungsweisen Berechnung befasst sich die Numerik.
Dabei beschränkt sich der Nutzen der Numerik im Allgemeinen und des Taylorpolynoms im Besonderen nicht nur auf Integration.

Abgabe am 16. Januar im Briefkasten Ihres Tutors.