Blatt 11

Aufgabe 1

Eine Münze wird geworfen. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ fällt sie so, dass „Kopf“ nach oben zeigt. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ ist „Zahl“ zu sehen.
Dieses Experiment soll als Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ modelliert werden. Wir setzen $\Omega = \{K, Z\}$.

a) Erklären Sie in einem Satz, warum Ω eine vernünftige Wahl ist.
b) Erklären Sie in einem Satz, warum wir die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ für die σ-Algebra $\mathcal{A}$ wählen können?
c) Setzen Sie die Zahlen $P(\{K\})$ und $P(\{Z\})$ sinnvoll fest.
d) Bestimmen Sie alle Teilmengen von Ω und für jede solche Teilmenge $M \in \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ die Zahl $P(M)$.
e) Begründen Sie, warum das von Ihnen definierte P ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Aufgabe 2

Sie haben einen fairen 6-seitigen Würfel der einmal geworfen wird. Mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{1}{6}$ zeigt der Würfel eine Augenzahl $1, 2, 3, 4, 5$ oder 6. Folgende Angaben definieren einen Wahrscheinlichkeitsraum:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$$

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \cdots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$

Die Menge $\{2, 3\}$ beschreibt das Ereignis, dass eine 2 oder eine 3 gewürfelt worden ist. Es gilt $P(\{2, 3\}) = P(\{2\}) + P(\{3\}) = \frac{1}{3}$.
Beschreiben Sie in analoger Weise, welche Mengen $M \subseteq \Omega$ folgende Ereignisse beschreiben. Berechnen Sie jeweils auch die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis.

a) Es wird eine 5 gewürfelt.
b) Es wird eine gerade Augenzahl gewürfelt.
c) Die gewürfelte Augenzahl ist mindestens 2.
d) Es wird keine 6 gewürfelt.
e) Es wird eine 7 gewürfelt.

Aufgabe 3

Auf Blatt 10 haben wir die Fakultäten eingeführt: Für ein $n \in \mathbb{N}$ ist $n! := \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Für natürliche Zahlen $0 \leq k \leq n$ ist der

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ definiert durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Er gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, k Objekte aus einer Gesamtmenge von n Objekten zu ziehen.
Zeigen Sie für alle $0 \leq k \leq n$ die Formeln

a) $\binom{n}{n} = 1$.
b) $\binom{n}{0} = 1$.
c) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
d) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
e) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$, für $0 \leq l < n$.

Aufgabe 4

Eine zufällig ausgewählte Person sind ist einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{10}$ an einer bestimmten Krankheit erkrankt. Bei einer erkrankten Person ist mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{7}{10}$ ein gewisses Symptom ausgeprägt. Allerdings zeigt jede Person (ob erkrankt oder nicht) dieses Symptom mit einer Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{10}$.

a) Die Aufgabe verrät Ihnen direkt die Wahrscheinlichkeiten $P(\text{krank})$, $P(\text{zeigt Symptom}|\text{krank})$ und $P(\text{zeigt Symptom})$. Geben Sie die entsprechenden Werte an.
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit $P(\text{krank}|\text{zeigt Symptom})$ ist die Person erkrankt, wenn bereits bekannt ist, dass sie das Symptom zeigt.
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit $P(\text{zeigt Symptom}|\text{nicht krank})$ zeigt eine gesunde Person das Symptom?

Hinweis. Ganz allgemein gilt $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$ und nicht zu A zu gehören bedeutet, zu $\overline{A} = \Omega \backslash A$ zu gehören.

Abgabe am 23. Januar im Briefkasten Ihres Tutors.