

Blatt 12

AUFGABE 1

Eine Krankheit ruft mit einer Wahrscheinlichkeit $P(A|K) = \frac{3}{5}$ bzw. $P(B|K) = \frac{4}{5}$ Symptome A bzw. B hervor. Ein nicht erkrankter Mensch zeigt Symptom A mit einer Wahrscheinlichkeit $P(A|\bar{K}) = \frac{1}{5}$ und Symptom B mit einer Wahrscheinlichkeit $P(B|\bar{K}) = \frac{2}{5}$. Die Wahrscheinlichkeit zu erkranken liegt bei $P(K) = \frac{1}{5}$. Die beiden Symptome hängen kausal nicht zusammen. Sie sollen in dieser Aufgabe nachrechnen, dass die Ereignisse an den Symptomen zu erkranken dennoch stochastisch abhängig sind.

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(A, B|K)$ beide Symptome zu zeigen, wenn die Person krank ist.
Hinweis. Wenn wir bereits wissen, ob die Person erkrankt ist oder nicht, sind die Symptome stochastisch unabhängig; Sie müssen also nur zwei Zahlen multiplizieren.
- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(A, B|\bar{K})$ beide Symptome zu zeigen, wenn die Person nicht krank ist.
- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit

$$P(A, B) = P(A, B, K) + P(A, B, \bar{K})$$

beide Symptomen aufzuweisen.

- d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$.
- e) Folgern Sie, dass die Ausprägung der beiden Symptome stochastisch abhängig sind.

AUFGABE 2

Eine Münze wird n -mal geworfen. Mit der Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ zeigt sie bei einem Wurf „Kopf“. Wir notieren die entstehenden Sequenzen als Vektoren $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, wobei $a_i \in \{0, 1\}$ ist und 1 für „Kopf“ und 0 für „nicht Kopf“ steht. Wir erhalten also einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit

$$\Omega := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in \{0, 1\}\} \quad \text{und} \quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega).$$

- a) Es sei A_i das Ereignis, dass beim i -ten Wurf „Kopf“ fällt. Warum ist es sinnvoll anzunehmen, dass für $i \neq j$ die Ereignisse A_i und A_j stochastisch unabhängig sind?
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt in den ersten k Würfeln stets „Kopf“ und ab dann nur noch „nicht Kopf“?

- c) Es sei eine beliebige Wurffolge gegeben, bei der genau k -mal „Kopf“ gefallen ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Folge Ergebnis des Experiments?
- d) Geben Sie eine kurze Begründung an, warum genau $\binom{n}{k}$ Vektoren in Ω genau k Einser und $n - k$ Nuller enthalten.
- e) Es sei B_k das Ereignis, dass in diesem Experiment genau k -mal Kopf gefallen ist. Begründen Sie, dass

$$P(B_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

AUFGABE 3

Wir betreiben das selbe Experiment wie in Aufgabe 2. Es sei

$$Z : \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}, \quad (a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto \sum_{i=1}^n a_i$$

die Zufallsvariable, die angibt, wie oft Kopf gefallen ist. Sei $n = 4$.

- a) Bestimmen Sie P_Z , d.h. berechnen Sie die Zahlen

$$P_Z(\{0\}), \quad P_Z(\{1\}), \quad P_Z(\{2\}), \quad P_Z(\{3\}) \quad \text{und} \quad P_Z(\{4\}).$$

(Man schreibt gerne auch $P(Z = 0)$, $P(Z = 1)$, $\dots$, $P(Z = 4)$ für diese Zahlen.)

- b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F_Z , geben Sie also die Werte

$$F_Z(0), \quad F_Z(1), \quad F_Z(2), \quad F_Z(3) \quad \text{und} \quad F_Z(4)$$

an.

- c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(Z \geq 2) = P_Z(\{2, 3, 4\})$, dass mindestens zweimal Kopf fällt.

AUFGABE 4

Wieder sind wir im Experiment von Aufgabe 2. Z ist die Zufallsvariable von Aufgabe 3. Für $i = 1, \dots, n$ definieren wir zudem die Zufallsvariable

$$X_i : \Omega \rightarrow \{0, 1\}, \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto a_i,$$

die den Ausgang des i -ten Wurfes angibt.

- a) Bestimmen Sie $P(X_1 = 1)$ und $P(X_1 = 0)$.
- b) Sei nun die Anzahl der Würfe $n = 2$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(Z = 1 | X_1 = 1)$ für insgesamt genau einmal „Kopf“ fällt, wenn vom ersten Wurf bekannt ist, dass „Kopf“ gefallen ist.
- c) Sei weiterhin $n = 2$. Berechnen Sie nun die Wahrscheinlichkeit $P(X_1 = 1 | Z = 1)$ dafür, dass der erste Wurf „Kopf“ ergab, wenn insgesamt genau einmal Kopf gefallen ist.